

Я.М. Григоренко, Л.С. Рожок

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРТОТРОПИИ НА  
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ВЫПУКЛЫМ  
ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев,  
Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, r.l.s@mail.ru*

**Abstract.** An effect of changing the parameters of orthotropy on the stress state of hollow cylinders with the convex corrugated cross section is studied within the spatial statement with using the analytical methods of separations, approximation of functions by the discrete Fourier series, and the numerical method of discrete orthogonalization. The findings are shown in the form of plots of distribution of displacement and stress fields.

**Key words:** hollow orthotropic cylinders, stress state, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method, convex semi-corrugations.

**Введение.**

Одним из важнейших основных элементов конструкций ракет, самолетов, подводных лодок и т.д. являются цилиндрические оболочки. В строительстве они находят свое применение в конструкциях сооружений, резервуаров, трубопроводов. В настоящее время увеличивается количество конструкций типа оболочек, находящих свое применение в технике, строительстве, медицине и т.д. [16, 20, 23].

Расчет напряженного состояния элементов конструкций осуществляется на основе современных методов, которые описаны различными расчетными моделями и схемами, сочетающими в себе численные и аналитические методы [2, 7 – 9].

Эксплуатация конструкций и их элементов в сложных условиях, приводит к необходимости, с одной стороны, разработки, внедрения и постоянного расширения сферы применения композитных материалов [4, 6, 14, 15, 17, 21] и, с другой стороны, использования оболочек с некруговым, в частности, гофрированным [5, 10, 18, 19], поперечным сечением.

Интерес к композитным материалам вызван высоким уровнем их конструктивных свойств: прочности, жесткости и т. п. Так, еще в работе [3] было отмечено, что использование композитных материалов в конструкциях позволяет повысить их надежность и весовую эффективность.

В данной статье в пространственной постановке рассмотрена задача и проведен анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с поперечным сечением в виде соединенных выпуклых полугофров, которое описано с помощью укороченной эпициклоиды в зависимости от параметров ортотропии. При решении задачи использованы аналитические методы разделения переменных и аппроксимации функций дискретными рядами Фурье, а также численный метод дискретной ортогонализации.

**§1. Постановка задачи.**

В ортогональной криволинейной системе координат  $s, \psi, \gamma$ :  $s$  – длина дуги по образующей;  $\psi$  – полярный угол в поперечном сечении;  $\gamma$  – нормальная координата по толщине цилиндра, в пространственной постановке, рассмотрим задачу о напряженном состоянии упругих полых ортотропных цилиндров постоянной толщины, в

каждой точке которой поперечное сечение задается укороченной эпициклоидой. Рассматриваемые цилиндры находятся под действием внешней поверхностной нагрузки  $q = q_0 \sin(\pi s / l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ).

Уравнение кривой в поперечном сечении поверхности приведения задаем в параметрическом виде [10, 14]

$$x = (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos\left(\frac{A + a}{a} \psi\right); \quad y = (A + a) \sin \psi - \lambda a \cos\left(\frac{A + a}{a} \psi\right),$$

где  $A$  – радиус неподвижной окружности,  $a$  ( $a > 0$ ) – радиус подвижной окружности,  $\lambda a$  ( $\lambda < 1$ ) – расстояние до центра подвижной окружности.

Первую квадратичную форму запишем в следующем виде:

$$dS^2 = ds^2 + B_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2 \quad (1.1).$$

$$[B_2 = B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma) \omega(\psi), \quad H_2(\psi, \gamma) = 1 + \gamma / R(\psi)].$$

Здесь  $\omega(\psi)$  – коэффициент перехода от координаты дуги направляющей к угловому параметру  $\psi$ ;  $R(\psi)$  – радиус кривизны кривой в поперечном сечении

$$\omega = \omega(\psi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2}; \quad R_\psi = R(\psi) = \frac{(A + a) \left(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{A}{a} \psi\right)\right)^{3/2}}{1 + \lambda^2 \left(\frac{A + a}{a}\right) - \lambda \left(\frac{A + 2a}{a}\right) \cos\left(\frac{A}{a} \psi\right)}.$$

С учетом (1.1) основные уравнения пространственной теории упругости запишем в следующем виде [13, 22]:  
выражения для деформаций

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad e_\psi = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma, \quad e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$

$$e_{s\psi} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s}, \quad e_{s\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma}, \quad e_{\psi\gamma} = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\psi}{H_2} \right) + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \quad (1.2)$$

уравнения равновесия

$$H_2 \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{s\gamma}) = 0, \quad \frac{1}{\omega} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{\psi\gamma}) + H_2 \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial s} + \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \sigma_\gamma) + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} - \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\psi = 0; \quad (1.3)$$

обобщенный закон Гука для ортотропного тела

$$e_s = a_{11} \sigma_s + a_{12} \sigma_\psi + a_{13} \sigma_\gamma; \quad e_\psi = a_{12} \sigma_s + a_{22} \sigma_\psi + a_{23} \sigma_\gamma;$$

$$e_\gamma = a_{13} \sigma_s + a_{23} \sigma_\psi + a_{33} \sigma_\gamma; \quad (1.4)$$

$$e_{\psi\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma}, \quad e_{s\gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma}, \quad e_{s\psi} = a_{66} \tau_{s\psi}$$

$$[a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{V_{s\psi}}{E_\psi} = -\frac{V_{\psi s}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{V_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{V_{\gamma s}}{E_s};$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_\psi}; \quad a_{23} = -\frac{V_{\gamma\psi}}{E_\psi} = -\frac{V_{\psi\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{\psi\gamma}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{s\psi}},$$

$E_s, E_\psi, E_\gamma$  – модули упругости в направлении осей координат,  $G_{\psi\gamma}, G_{s\gamma}, G_{s\psi}$  – модули сдвига,  $V_{\psi\gamma}, V_{s\gamma}, V_{s\psi}, V_{\gamma\psi}, V_{\gamma s}, V_{\psi s}$  – соответствующие коэффициенты Пуассона].

Соотношения (1.2) – (1.4) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает напряженное состояние данного класса задач в соответствующей области  $\{0 \leq s \leq l; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2\}$ . Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях цилиндра имеют вид

$$\sigma_\gamma^+ = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma}^+ = 0; \quad \tau_{\psi\gamma}^+ = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2; \quad (1.5)$$

$$\sigma_\gamma^- = 0; \quad \tau_{s\gamma}^- = 0; \quad \tau_{\psi\gamma}^- = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1.$$

На торцах цилиндра рассматриваем граничные условия простого опирания

$$\sigma_s = u_\psi = u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0; \quad s = l. \quad (1.6)$$

Примем за разрешающие функции компоненты напряжений  $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$  и перемещений  $u_\gamma, u_s, u_\psi$ . Сделав некоторые преобразования, получим из (1.2) – (1.4) разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка в виде

$$\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} = (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma +$$

$$+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} = -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} -$$

$$- b_{66} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial s \partial \psi};$$

$$\frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} = -c_2 \frac{1}{B_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma} - b_{22} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) -$$

$$- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial \psi} - b_{22} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial s^2}; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\psi$$

$$\left[ b_{11} = a_{22} a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11} a_{66} / \Omega;$$

$$b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23}$$

с граничными условиями (1.5), (1.6)].

## §2. Метод решения.

Наличие условий (1.6) позволяет понизить размерность задачи путем разделения переменных в направлении образующей. Для этого представим компоненты разрешающих функций и нагрузки в виде разложений в ряды Фурье по координате  $s$

$$X(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(\psi, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(\psi, \gamma) \cos \lambda_n s \quad (2.1)$$

$$\left[ X = \{ \sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_\psi, q_\gamma \}, \quad Y = \{ \tau_{s\gamma}, u_s \}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (0 \leq s \leq l) \right].$$

Подставив (2.1) в систему уравнений (1.7) и соответствующие граничные условия, после разделения переменных получим разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных более высокого порядка для двумерной краевой задачи относительно амплитудных значений разложений (2.1). В полученной таким образом разрешающей системе уравнений будут присутствовать произведения разрешающих функций на коэффициенты, препятствующие разделению переменных вдоль направляющей цилиндра. Примем указанные произведения за дополнительные функции (индекс  $n$  опустим)

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s \} \quad (j = \overline{1,4}); \quad \varphi_1^5 = \left( \frac{1}{H_2 R_\psi} \right)^2 u_\gamma; \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \} \quad (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

За счет введения дополнительных функций (2.2) соответствующая разрешающая система уравнений формально будет иметь вид, позволяющий разделить переменные вдоль направляющей цилиндра, путем представления компонент нагрузки, разрешающих и дополнительных функций в виде разложений в ряды Фурье по координате  $\psi$  в виде

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi; \quad (2.3)$$

$$\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma\}; \quad \tilde{Y} = \{\tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\}.$$

После подстановки разложений (2.3) в разрешающую систему уравнений и соответствующие граничные условия и разделения переменных приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений разложений (2.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 + b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,k} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_1: \quad \sigma_{\gamma,k}^- &= 0; \quad \tau_{s\gamma,k}^- = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k}^- = 0; \\ \gamma = \gamma_2: \quad \sigma_{\gamma,k}^+ &= q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k}^+ = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k}^+ = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Одномерную краевую задачу для системы уравнений (2.4) с граничными условиями (2.5) решаем одновременно для всех гармоник разложений (2.3) устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1]. При этом на каждом шаге интегрирования амплитудные значения дополнительных функций (2.2) вычисляем по текущим значениям амплитуд разрешающих функций, используя процедуру определения амплитудных значений для функций, заданных таблично, предварительно раскладывая их в дискретные ряды Фурье.

### §3. Числовые результаты и их анализ.

Проведем анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров рассматриваемого класса в зависимости от изменения параметров ортотропии.

Задача решена при таких исходных данных: радиус неподвижной окружности  $A = 18$ ; радиус подвижной окружности  $a = 2, 3$ ; параметр  $\lambda = 0,5$ ; толщина цилиндра  $h = 3$ ; длина цилиндра  $l = 80$ . Для механических параметров материала принимаем  $E_s = E_\gamma = E_0 = \text{const}$ ;  $E_\psi = \mu E_0$ ;  $G_{s\psi} = \delta E_0$ ;  $G_{s\gamma} = G_{\psi\gamma} = E_0 / d$ ;  $d=10$ ;  $\nu_{s\psi} = \nu_{\psi\gamma} = 0,3$ .

Рассмотрим 5 вариантов ортотропии: 1)  $\mu = 2$ ;  $\delta = 0,3$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,075$ ; 2)  $\mu = 1,35$ ;  $\delta = 0,215$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,122$ ; 3)  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,385$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,3$ ; 4)  $\mu = 0,741$ ;  $\delta = 0,159$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,165$ ; 5)  $\mu = 0,5$ ;  $\delta = 0,125$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,15$ .

Третий вариант значений упругих постоянных соответствует изотропному случаю, когда  $E_s = E_\gamma = E_\psi = E_0 = \text{const}$ ;  $G_{s\gamma} = G_{\psi\gamma} = E_0 / (2(1+\nu))$ ;  $\nu_{s\gamma} = \nu_{\psi\gamma} = \nu_{s\psi} = \nu = 0,3$ .

Результаты решения задачи представлены на рис. 1 – 4 и в таблице в среднем сечении по длине цилиндра. На рисунках графики для пяти вариантов параметров ортотропии располагаются в соответствии с их номерами. Пунктирной линией отмечены кривые, соответствующие изотропному варианту 3.

На рис. 1 показаны графики распределения полей перемещений  $u_\gamma$  срединной поверхности вдоль направляющей цилиндра для двух значений радиуса подвижной окружности  $a = 2$  (рис. 1, а) и  $a = 3$  (рис. 1, б).

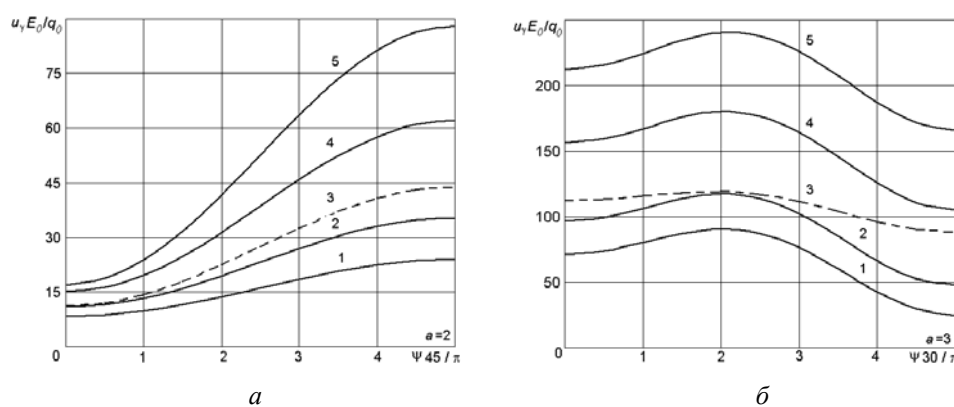


Рис. 1

Из графиков, приведенных на рис. 1, а видно, что максимальных значений перемещения  $u_\gamma$  достигают в вершине полугофров при  $\psi = \pi/9$  и относятся как 23,9:35,4:43,8:62,1:88,1, соответственно. При этом, для 1 и 2 вариантов ортотропии величина перемещений уменьшается в 1,8 и 1,2 раза, а для 4 и 5 вариантов ортотропии – увеличивается в 1,4 и 2,0 раза, соответственно, по сравнению с 3 вариантом для изотропного случая. При переходе из зоны соединения полугофров ( $\psi = 0$ ) к их вершине ( $\psi = \pi/9$ ) перемещения увеличиваются в 2,9; 3,5; 3,9; 4,1; 5,5 раза, соответственно, для 5 вариантов ортотропии.

Для цилиндров с 6 гофрами ( $a = 3$ ) имеем качественно иную картину распределения перемещений  $u_\gamma$  (рис. 1, б). Так, максимального своего значения перемещения достигают в сечении  $\psi = \pi/15$  и относятся как 90,7:117,5:119,1:180,3:240,3. Минимальных значений перемещения достигают в вершинах полугофров в сечении  $\psi = \pi/6$ , при этом уменьшаясь в 3,7; 2,5; 1,3; 1,7; 1,5 раза, соответственно, для 5 вариантов ортотропии.

На рис. 2 представлены графики распределения полей напряжений  $\sigma_\psi^-$  на внутренней поверхности, а на рис. 3 – напряжений  $\sigma_\psi^+$  на внешней поверхности вдоль направляющей цилиндра. Рис. 2, а и 3, а соответствуют значению радиуса подвижной окружности  $a = 2$ , а рис. 2, б и 3, б – значению радиуса  $a = 3$ .

Из графиков, приведенных на рис. 2, а видно, что максимальных абсолютных значений напряжения  $\sigma_\psi^-$  достигают в сечении  $\psi = \pi/30$ . При этом они уменьшаются в 2,5 и 1,6 раза для 1 и 2 вариантов ортотропии и увеличиваются в 1,2 и 1,9 раза для 4 и 5 вариантов ортотропии по сравнению с изотропным случаем 3.

Из графиков, приведенных на рис. 2, б наблюдаем качественно иную картину распределения напряжений  $\sigma_{\psi}^{-}$ . Максимальных абсолютных значений напряжения достигают в зоне соединения полугофров в сечении  $\psi = 0$  и относятся как 1,6:2,4:3,4:4,2:6,1, соответственно.

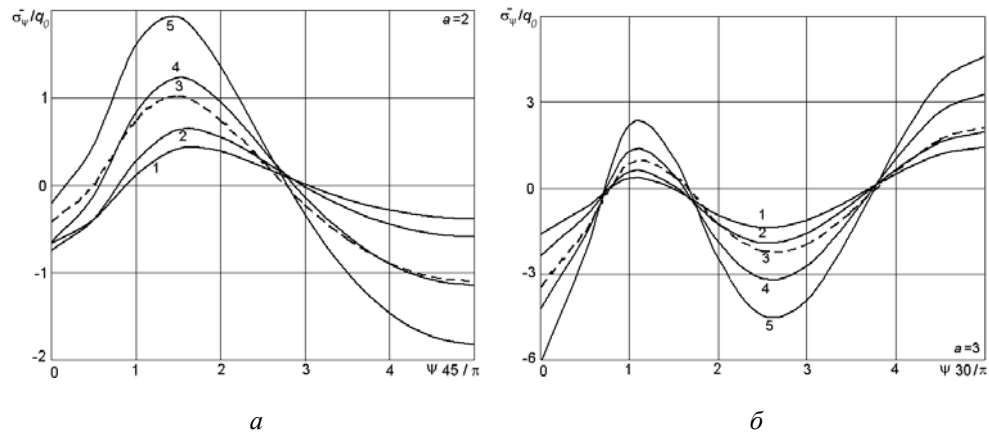


Рис. 2

На внешней поверхности цилиндра (рис. 3, а) для первых двух вариантов ортотропии напряжения  $\sigma_{\psi}^{+}$  достигают своего максимума в сечении  $\psi = 0$ , при этом их величина меньше в 2,7 и 1,6 раза, соответственно, по сравнению с величиной напряжений для варианта 3. В случае 4 и 5 вариантов ортотропии, максимальных абсолютных значений напряжения достигают в сечении  $\psi = \pi / 90$ , увеличиваясь при этом по сравнению с изотропным вариантом в 1,3 и 3,1 раза, соответственно.

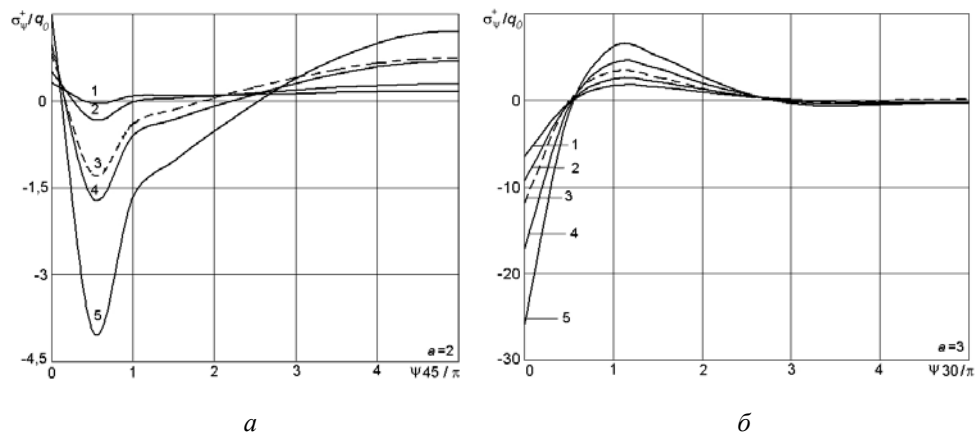


Рис. 3

Из графиков, приведенных на рис. 3, б видно, что максимальных абсолютных значений напряжения  $\sigma_{\psi}^{+}$  достигают в зоне соединения полугофров ( $\psi = 0$ ) и относятся как 6,4:9,4:11,8:17,2:25,9:38,8. При этом на интервале  $\psi \in [\pi / 12; \pi / 6]$  напряжения имеют практически одинаковые значения.

Характер распределения напряжений  $\sigma_s^{-}$  для значений подвижного радиуса  $a = 2$  представлен на рис. 4, а и для  $a = 3$  – на рис. 4, б вдоль направляющей цилиндра. Для

цилиндров с 9 полугофрами ( $a = 2$ ) максимальных значений напряжения  $\sigma_s^-$  достигают в окрестности  $\psi = \pi / 30$ , принимая приблизительно одинаковые значения, равные 6,9; 6,8; 7,1; 6,8; 6,7 для 5 вариантов ортотропии. Для цилиндров с 6 полугофрами ( $a = 3$ ) напряжения  $\sigma_s^-$  принимают максимальные значения в вершинах полугофров  $\psi = \pi / 6$  и относятся как 14,6:13,9:12,3:13,1:12,6, соответственно.

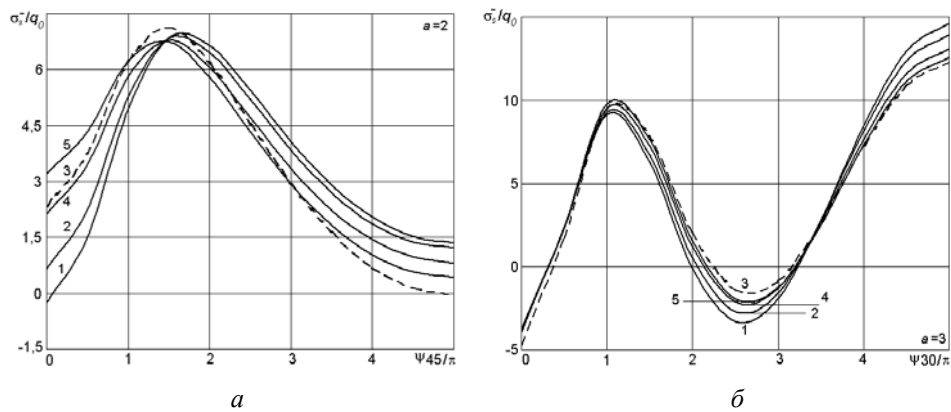


Рис. 4

В таблице представлены значения напряжений  $\sigma_s^+$  на внешней поверхности цилиндра в некоторых сечениях направляющей для двух значений подвижного радиуса  $a = 2, 3$  и для 5 вариантов ортотропии. Из таблицы следует, что максимальных абсолютных значений напряжения достигают в местах соединения полугофров ( $\psi = 0$ ) как для  $a = 2$ , так и для  $a = 3$ . При этом значения напряжений незначительно отличаются друг от друга на всем интервале изменения координаты  $\psi$ .

$a$	$\psi$	$\sigma_s^+ / q_0$				
		1	2	3	4	5
2	0	5,37	5,41	5,21	5,47	5,55
	$\pi/45$	3,76	3,04	1,15	1,56	0,25
	$2\pi/45$	3,76	3,38	2,50	2,66	2,05
	$\pi/15$	3,80	3,68	3,53	3,52	3,41
	$4\pi/45$	3,88	3,92	4,23	4,10	4,32
	$\pi/9$	3,91	4,00	4,47	4,31	4,63
3	0	-38,61	-38,10	-35,42	-38,13	-38,82
	$\pi/30$	15,37	15,17	15,03	14,87	14,62
	$\pi/15$	9,83	9,27	8,08	8,61	8,28
	$\pi/10$	3,73	3,38	2,66	3,00	2,85
	$2\pi/15$	1,81	1,96	2,44	2,20	2,37
	$\pi/6$	1,64	2,05	3,15	2,59	2,92

#### Заключение.

В данной работе в пространственной постановке решена задача и проведено исследование напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с поперечным сечением в виде выпуклых полугофров, описанных с помощью укороченной эпициклоиды, в зависимости от параметров ортотропии.

Анализ проведенного исследования свидетельствует о взаимном влиянии ортотропии и геометрических параметров рассматриваемых цилиндров на их напряженное состояние. Таким образом, варьируя соответствующими механическими параметрами материала и геометрическими параметрами цилиндров, можно существенно влиять на величины факторов напряженного состояния с целью получения наиболее рационального их распределения.



РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження впливу параметрів ортотропії на напружений стан порожнистих ортотропних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів. Результати розв'язання задачі наведено у вигляді графіків розподілу полів переміщень та напружень.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Урусова Г.П. Динамічна стійкість оболонок обертання з гофрованою формою твірної // Доп. НАНУ. – 2011. – № 10. – С. 61 – 66.
3. Новожиллов В. В. Развитие метода комплексного преобразования в линейной теории оболочек за 50 лет // Теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. – С. 107 – 115.
4. Beaumont P. W. R. On the Problems of Cracking and the Question of Structural Integrity of Engineering Composite Materials // Appl. Comp. Mater. – 2014. – **21**, N 1. – P. 5 – 43.
5. Beben D. Field Performance of Corrugated Steel Plate Road Culvert under Normal Live-Load Conditions // J. Perform. Construct. Facil. – 2013. – **27**, N 6. – P. 807 – 817.
6. Carpenter H. W., Reid R. G., Paskaramoorthy R. Extension of the layer removal technique for the measurement of residual stresses in layered anisotropic cylinders // Int. J. Mech. and Materials in Design – 2014. – **10**, N 3. – P. 269 – 280.
7. Chernopiskii D.I. On stress-strain state in thick-walled cylindrical shells bounded by corrugated surfaces // Strength of Materials – 2012. – **44**, N 1. – P. 40 – 52.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 197.
9. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. App. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 105 – 127.
10. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections // J. Mathem. Scie. – 2014. – **198**, N 2. – P. 158 – 165.
11. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
12. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
13. Lekhnitsky S.G. Theory of an Anisotropic Body. – Moscow: MIR Publishers, 1981. – 415 p.
14. Lubarda V. A. On Pressurized Curvilinearly Orthotropic Circular Disk, Cylinder and Sphere Made of Radially Nonuniform Material // J. Elasticity. – 2012. – **109**, N 2. – P. 103 – 133.
15. Marangalou J. H., Ito K., Rietbergen B. A novel approach to estimate trabecular bone anisotropy from stress tensors // Biomech. and Model. in Mechanics. – 2015. – **14**, N 1. – P. 39 – 48.
16. Mashat D. S., Carrera E., Zenkour A. M., Al Khateeb S. A., Lamberti A. Evaluation of refined theories for multilayered shells via axiomatic/asymptotic method // J. Mech. Sci. and Techn. – 2014. – **28**, N 11. – P. 4663 – 4672.
17. Maksimuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
18. Ma L., Zhou L., Wan S. Study of the Calculation Method of Lateral Load Distribution on a Continuous Composite Box Girder Bridge with Corrugated Steel Webs // J. of Highway and Transportation Research and Development (English Edition) – 2014. – **8**, N 2. – P. 42 – 46.
19. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels Under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 702 – 714.
20. Soldatos K. P. Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
21. Sun X.S., Tan V. B. C., Chen Y., Tan L. B., Jaiman R. K., Tay T. E. Stress analysis of multi-layered hollow anisotropic composite cylindrical structures using the homogenization method // Acta Mech. – 2014. – **225**, N 6. – P. 1649 – 1672.
22. Timoshenko S.P. Theory of Elasticity. – New York: MG Graw-Hill, 1934. – 452 p.
23. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // Rus. Aeronaut. (Iz VUZ) – 2014. – **57**, N 2. – P. 118 – 126.

Поступила 09.02.2015

Утверждена в печать 31.03.2016