

Я.М. Григоренко¹, Л.С. Рожок²

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ
С ВОГНУТЫМ ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ
РАЗНОЙ КРИВИЗНЫ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; ayagrigorenko@yandex.ru;*

²*Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; r.l.s@ua.fm*

Abstract. An effect of variability of curvature on the stress state of hollow cylinders is studied within the spatial statement with using the analytical methods of separation of variables, approximation of functions by the discrete Fourier series and numerical method of discrete orthogonalization. The cylinders are assumed to have the cross-sections in the form of concave semi-corrugations. The change of curvature is described as variations of the moving circle radius. The findings are shown in the form of plots of distribution of displacement and stress fields that are further analyzed.

Key words: noncircular hollow cylinders, stress state, discrete Fourier series, method of discrete orthogonalization.

Введение.

Широкое применение оболочечных конструкций обусловлено интенсивным развитием многих областей техники [17, 18]. На современном этапе характерным является тенденция использования конструкций типа оболочек в условиях возрастающей интенсивности внешних воздействий – высокое и сверхвысокое давление, экстремальная температура и др.

Такие обстоятельства вынуждают все чаще прибегать к применению толстостенных конструкций. В качестве примеров использования оболочек в современной технике можно указать следующие: сосуды высокого давления, двигателестроение, криогенная техника, защитные оболочки ядерных реакторов. Расчетная схема в виде толстостенной цилиндрической оболочки применяется и для расчета различных инженерных сооружений – своды, кольцевые фундаменты, напорные трубы, обделки туннелей и др. [4, 5].

Расчету оболочечных конструкций посвящено значительное количество исследований [1, 3, 6, 8]. В работах [12, 14] решение такого класса задач осуществляется с использованием метода конечных элементов.

Однако продолжает оставаться актуальной проблема построения трехмерной теории толстостенных оболочек, а также разработка эффективных методов решения разрешающих уравнений такой теории для отдельных классов оболочек. Отметим, что оболочки со сложным гофрированным поперечным сечением рассмотрены в работах [7, 10, 15].

Данная статья является продолжением исследований напряженного состояния некруговых полых изотропных цилиндров. Рассмотрены цилиндры со сложным поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, которое описано с помощью укороченной гипоциклоиды. Задача решена в пространственной постановке с использованием аналитического метода разделения переменных в двух координатных направлениях и применением метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье, а также численного метода дискретной ортогонализации [2].

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругие полые цилиндры постоянной толщины, находящиеся под действием внутреннего давления $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$). Поперечное сечение направляющей поверхности отсчета представим в параметрическом виде укороченной гипоциклоидой [13]

$$x = (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos\left(\frac{A - a}{a} \psi\right); \quad y = (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin\left(\frac{A - a}{a} \psi\right),$$

где A – радиус неподвижной окружности; a ($a > 0$) – радиус подвижной окружности; λa ($\lambda < 1$) – расстояние до центра подвижной окружности.

Отнесем рассматриваемые цилиндры к ортогональной криволинейной системе координат s, ψ, γ : s – длина дуги образующей; ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) – угловой параметр, центральный угол в поперечном сечении; γ ($\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$) – нормальная координата по толщине цилиндра.

В выбранной системе координатах первую квадратичную форму запишем в виде

$$dS^2 = ds^2 + B_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2,$$

где приняты такие обозначения:

$$B_2 = B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma) \omega(\psi); \quad H_2 = H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)};$$

$$\omega = \omega(\psi) = (A - a) \left(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{A - a}{a} \psi\right) \right)^{1/2};$$

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{(A - a) \left(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{A - a}{a} \psi\right) \right)^{3/2}}{1 - \frac{\lambda^2 (A - a)}{a} + \lambda \left(\frac{A - 2a}{a} \right) \cos\left(\frac{A - a}{a} \psi\right)};$$

H_2 – параметр Ламе; R_ψ – радиус кривизны в поперечном сечении; ω – коэффициент перехода от координаты дуги направляющей к угловому параметру ψ .

На торцах цилиндра рассмотрим граничные условия типа простого опирания

$$\sigma_s = 0; \quad u_\psi = 0; \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l. \quad (1.1)$$

Граничные условия на боковых поверхностях имеют вид

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad (1.2)$$

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (1.3)$$

В качестве исходных уравнений примем уравнения пространственной теории упругости для изотропного тела [16], а за разрешающие функции – компоненты напряжений $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$ и перемещений u_γ, u_s, u_ψ . После некоторых преобразований получим для трехмерной краевой задачи разрешающую систему уравнений в частных производных шестого порядка с переменными коэффициентами в виде

$$\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} = -\frac{1}{H_2 R_\psi} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{H_2 R_\psi} \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) \right]; \\
& \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} = -\frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \frac{1}{H_2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \\
& \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} = -\frac{2}{H_2 R_\psi} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \tag{1.4} \\
& \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_\gamma; \\
& \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\psi
\end{aligned}$$

$$(0 \leq s \leq l; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2)$$

с граничными условиями (1.1) – (1.3).

§2. Метод решения.

При решении полученной краевой задачи для системы уравнений (1.4) с граничными условиями (1.1) – (1.3) применим метод разделения переменных в двух направлениях – вдоль образующей и направляющей цилиндра – путем разложения соответствующих функций в ряды Фурье с использованием аппроксимации некоторых из них дискретными рядами Фурье, а также численный метод дискретной ортогонализации.

Разделению переменных вдоль образующей способствует наличие граничных условий на торцах цилиндра (1.1). Представим разрешающие функции и компоненты нагрузки в виде разложений в ряды Фурье по координате s

$$X(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(\psi, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(\psi, \gamma) \cos \lambda_n s, \tag{2.1}$$

где

$$X = \{ \sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_\psi, q_\gamma \}; \quad Y = \{ \tau_{s\gamma}, u_s \}; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (0 \leq s \leq l).$$

Ряды (2.1) подставим в разрешающую систему уравнений (1.4) и в соответствующие граничные условия (1.2, 1.3); разделив переменные, получим разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, описывающих двумерную краевую задачу для каждого члена рядов (2.1) [9].

Прежде, чем производить разделение переменных вдоль направляющей цилиндра, заменим в разрешающей системе уравнений дополнительными функциями некоторые выражения, препятствующие разделению переменных по координате ψ . Эти функции

представляют собой произведения разрешающих функций на коэффициенты, зависящие от двух координат ψ и γ . Такая замена позволит формально представить разрешающую систему уравнений в виде, допускающем разделение переменных вдоль направляющей, путем представления всех функций в виде разложений в ряды Фурье по координате ψ , т.е.

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi; \quad (2.2)$$

$$\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma\}; \quad \tilde{Y} = \{\tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\},$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right\} (j = \overline{1,5}); \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \{\tau_{\psi\gamma}; u_\psi\} (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Разделив переменные, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений рядов Фурье (2.2) в виде (в обозначениях разрешающих функций и компонентов нагрузки опустим индекс n , соответствующий разложениям в ряды Фурье (2.1))

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E}{1-\nu^2} (\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5); \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \\ &\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{(1-\nu-2\nu^2)}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad (2.5)$$

$$\sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (2.6)$$

Полученную краевую задачу (2.4) – (2.6) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации одновременно для всех k гармоник разложений в ряды Фурье (2.3). На каждом шаге интегрирования амплитудные значения дополнительных функций вычисляются по текущим значениям амплитуд разрешающих функций с использованием метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье [11]. С учетом граничных условий, в начале интегрирования, дополнительные функции определяются по заданным начальным значениям разрешающих функций.

§ 3. Числовые результаты и их анализ.

Проведем исследование влияния кривизны, вызванное изменением величины радиуса подвижной окружности a , на напряженное состояние полых изотропных цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров (рис. 1) для двух значений их толщины. Задача решена при таких исходных данных: длина цилиндра $l = 80$; толщина цилиндра $h = 0,6; 0,9$; радиус неподвижной окружности $A = 24$; радиус подвижной окружности $a = 2; 3; 4; 6$; параметр $\lambda = 0,4$; модуль Юнга $E = E_0 = \text{const}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

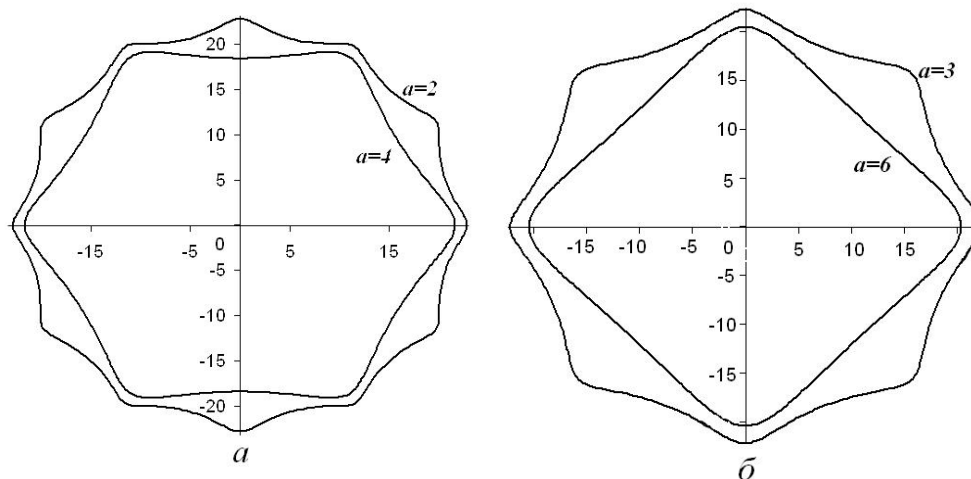
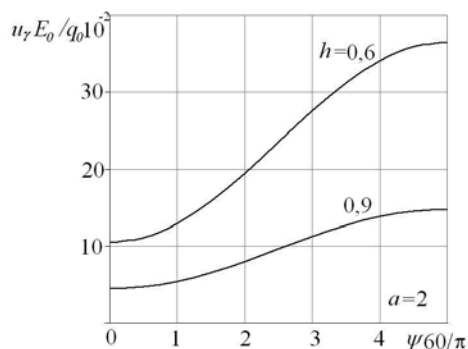


Рис. 1

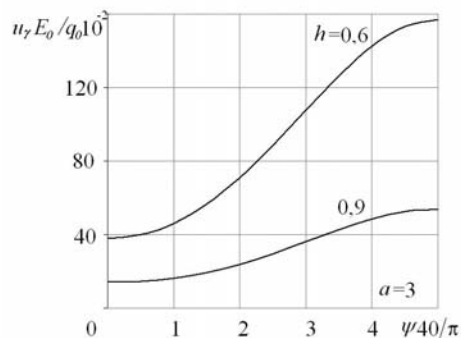
В местах соединения полугофров, радиус кривизны срединной поверхности принимает свои максимальные абсолютные значения $R_{\psi} = 1,47; 1,99; 2,40; 3,20$ для $a = 2; 3; 4; 6$, соответственно. Выбор указанных толщин позволяет оставаться в пределах теории оболочек средней толщины.

Результаты решения задачи представлены на рисунках в виде графиков распределения полей перемещений (рис. 2) и напряжений (рис. 3) в среднем сечении по длине цилиндра.

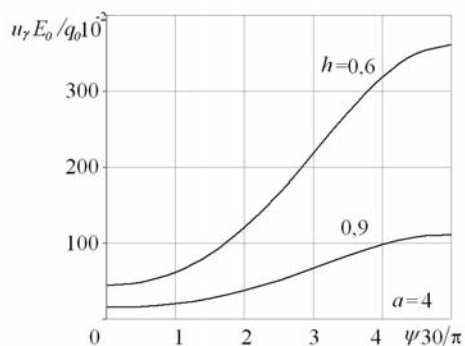
На рис. 2, $a - z$ представлены графики распределения полей перемещений u_{γ} на внутренней поверхности для четырех значений радиуса подвижной окружности по направляющей цилиндра. Отношение величины радиуса неподвижной окружности к величине радиуса подвижной определяет количество полугофров цилиндра. Так, для $a = 2$ количество полугофров равно 12, для $a = 3 - 8$, для $a = 4 - 6$ и для $a = 6 - 4$, соответственно. Увеличение количества полугофров приводит к увеличению жесткости цилиндра, что оказывает влияние на распределении перемещений.



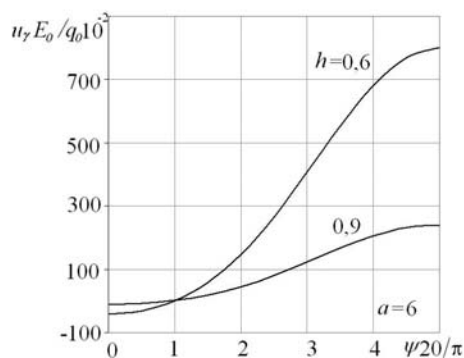
а



б



в



г

Рис. 2

Максимальных значений перемещения достигают во впадинах полугофров для цилиндров как для толщины $h = 0,6$, так и для $h = 0,9$. При этом для более тонких цилиндров ($h = 0,6$) с уменьшением количества полугофров величина перемещений возрастает: в 22 раза для $a = 2$; в 5,1 раза для $a = 3$; в 2,2 раза для $a = 4$ по сравнению с аналогичными значениями перемещений в цилиндре при $a = 6$, а для более толстых ($h=0,9$), соответственно, – в 16,3; 4,5; 2,2 раза.

При переходе из зоны соединения ($\psi = 0$) во впадину полугофров перемещения возрастают примерно: в 3,5 раза для $a = 2$; в 4 раза для $a = 3$, в 7,5 – 8 раз для $a = 4$ и в 20 раз для $a = 6$. Кроме того, можно отметить, что в пределах одного значения величины радиуса подвижной окружности, увеличение толщины оказывает наибольшее влияние на уменьшение перемещений в соответствующих сечениях для менее жестких цилиндров.

На рис. 3, а, г показаны графики распределения напряжений σ_y на внутренней поверхности цилиндра для четырех значений радиуса подвижной окружности по направляющей цилиндра.

Как видно из представленных графиков, максимальных значений напряжения достигают в зонах соединения полугофров ($\psi = 0$), при этом при переходе из этой зоны во впадину полугофров значения напряжений меняют знак на противоположный и уменьшаются, примерно, в 4 раза для $a = 2$ и в 1,7 раз – для $a = 6$.

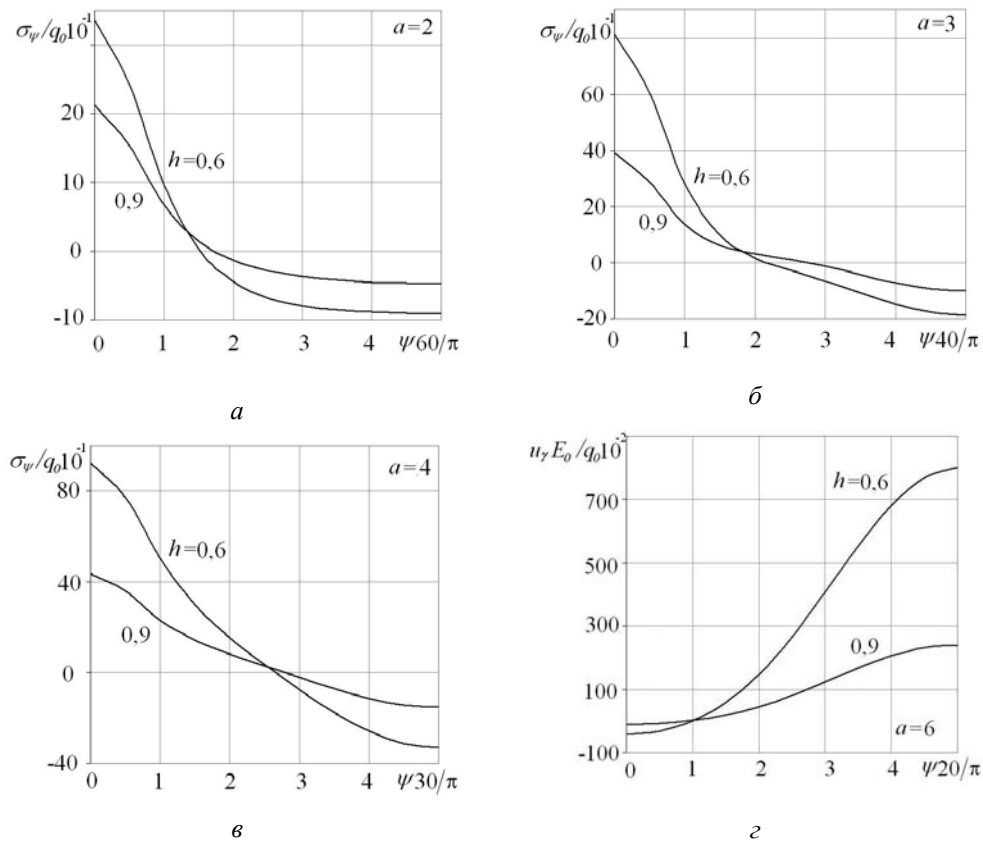


Рис. 3

При изменении толщины цилиндров абсолютные значения напряжений уменьшаются, примерно, в 1,5 – 2, 5 раза в соответствующих сечениях для всех значений величины радиуса подвижной окружности.

Заключение.

В пространственной постановке решена задача о напряженном состоянии полей цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, описанных укороченной гипоциклоидой, в зависимости от изменения кривизны, вызванной вариациями радиуса подвижной окружности.

Из анализа полученного решения следует, что изменение радиуса подвижной окружности влечет за собой изменение количества полугофров в поперечном сечении цилиндров, что оказывает влияние на изменение их жесткости, что, в свою очередь, существенно влияет на распределение полей перемещений и напряжений.

РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження впливу на напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді увігнутих напівгофрів, зміни кривизни, що обумовлена варіаціями радіуса рухомого кола. Результати розв'язування задачі наведено у вигляді графіків розподілу полів переміщень і напружень. Проведено аналіз отриманих результатів.

1. Аврамов К.В., Морачковский О.К., Тонконоженко А.М., Кожарин В.Ю., Кочуров Р.Е. Полуаналитический метод конечных элементов для расчета напряженно-деформируемого состояния цилиндрических оболочек с продольными ребрами жесткости // Пробл. машиностроения. – 2014. – 17, № 1. – С. 33 – 41.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
3. Емельянов И.Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // Вычисл. механика сплошных сред. – 2015. – 8, № 3. – С. 245 – 253.
4. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсеченных поверхностей // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 54 – 64.
5. Шацкий И.П., Струк А.Б. Напряженный стан трубопроводу в зонах локального руйнування ґрунту // Пробл. прочности. – 2009. – № 5. – С. 127 – 133.
6. Bepalova E.I., Urusova G.P. Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 410 – 419.
7. Chernopiskii D.I. On stress-strain state in thick-walled cylindrical shells bounded by corrugated surfaces // Strength of Materials. – 2012. – 44, N 1. – P. 40 – 52.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 197.
9. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 2. – P. 105 – 127.
10. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections // J. Math. Sci. – 2014. – 198, N 2. – P. 158 – 165.
11. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
12. Hart E.L., Hudramovich V.S., Ryabokon' S.A., Samarskaya E.V. Numerical simulation of stress-strain state for nonhomogeneous shell-type structures based on the finite element method // J. Model. and Numer. Simul. Mater. Sci. – 2013. – 3, N 4. – P. 155 – 157.
13. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
14. Popov G.Ya., Protserov Yu.S., Gonchar I.A. Exact Solution of Some Axisymmetric Problems for Elastic Cylinders of Finite Length Taking Into Account Specific Weight // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 391 – 402.
15. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels Under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 702 – 714.
16. Timoshenko S.P. Theory of Elasticity. – New York: MG Graw-Hill, 1934. – 452 p.
17. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // Russian Aeronautics (Iz VUZ) – 2014. – 57, N 2. – P. 118 – 126.
18. Zheng M., Zhao Y., Teng H., Hu J., Yu L. Elastic Limit Analysis for Elliptical and Circular Tubes Under Lateral Tension // Arab. J. Sci. and Eng. – 2015. – 40, N 6. – P. 1727 – 1732.

Поступила 16.03.2016

Утверждена в печать 05.07.2016