И.В.Луцкая[1], В.А.Максимюк[1], Е.А.Сторожук[1], И.С.Чернышенко[2]

НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ДИСКРЕТНО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: [1] desc@inmech.kiev.ua, [2] prikl@inmech.kiev.ua

Abstract. A technique of analysis is developed and a stress-strain state of nonlinearly elastic orthotropic thin shells with stiffened holes and shells of discretely variable thickness is studied. The reduction surface is not necessary the median surface. The constitutive equations are obtained basing on the Lomakin theory of plasticity of anisotropic media. The methods of successive approximations and variation-differences are used. The Kirchhoff-Love hypotheses are realized using the Lagrange multiplier method. The technique is able to study the stress-strain state of the shell with arbitrary law of changing the thickness, including the shells reinforced by ribs.

Key words: shell theory, nonlinear elastic composite, Lagrange multiplier, composite shell, stress concentration.

Введение.

Композитные элементы конструкций в виде тонких, нетонких и переменной толщины оболочек различной формы находят широкое применение в машиностроении, промышленном и гражданском строительстве, авиационной и космической технике, судостроении. Оболочки могут иметь вырезы [9], подкрепленные отверстия [10, 11], жесткие включения [16], подкрепляющие ребра [6, 15]. Вокруг таких структурных неоднородностей возникают повышенные градиенты напряженно-деформированного состояния (НДС). Композитные материалы (КМ) могут быть ортотропными, слоистыми, нелинейно-упругими. Необходимость учета реальных свойств КМ требует привлечения адекватных теоретических представлений. Особенно это относится к учету нелинейных свойств ортотропных материалов.

Основные теоретические и экспериментальные результаты по рассматриваемой проблеме изложены в обобщающих монографиях [1, 13 и др.] и обзорных статьях [7, 9, 12, 14 и др.].

Из анализа работ (обзоров и монографий) следует, что теоретические исследования о концентрации напряжений около свободных отверстий или жестких включений предшествовали экспериментальным работам (в отличие от аналогичных исследований применительно к подкрепленным отверстиям). Во втором случае первыми были экспериментальные работы, что свидетельствует, очевидно, об определенных трудностях теоретического характера на том развитии теории оболочек и методов анализа их напряженности и деформативности.

Введение участков переменной толщины в оболочках позволяет снизить опасные напряжения [5, 8]. Более технологическим представляется ступенчатый способ изменения толщины [4, 5].

Сложность процессов, которые при этом возникают, обусловливает необходимость построения теории, разработки методов решения задач статики с применением современных численных методов. Для этого применяются метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов, метод последовательных приближений (МПП), вариационно-разностный метод (ВРМ) и их модификации.

Ниже предложены концепции, теории, методы для исследования деформирования композитных структурно неоднородных и подкрепленных элементов конструкций, а также представлены конкретные числовые результаты исследования.

1. Постановка нелинейных задач.

Следуя [3, 10], тонкую композитную оболочку с подкреплениями в виде ребер, колец, накладок или с участками утолщений или утончений рассматриваем как оболочку переменной толщины. Поверхности такой оболочки могут быть кусочно-гладкими. Выберем между ними некоторую воображаемую гладкую поверхность, как поверхность приведения в теории оболочек.

Отнесем поверхность приведения оболочки к криволинейной ортогональной сопряженной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Уравнение поверхности приведения запишем в параметрической форме

$$X = X(\alpha_1, \alpha_2) \quad (X \to Y, Z), \tag{1}$$

где X, Y, Z – координаты точек поверхности в глобальной декартовой системе координат (x, y, z).

Расстояния вдоль координаты α_3 от поверхности приведения к внешним поверхностям оболочки обозначим $h_1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $h_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда для толщины оболочки будем иметь равенство

$$h(\alpha_1, \alpha_2) = h_1(\alpha_1, \alpha_2) + h_2(\alpha_1, \alpha_2). \tag{2}$$

Принимаем, что тонкая оболочка изготовлена с нелинейно-упругого ортотропного КМ, свойства которого не меняются во времени. Процесс нагружения под действием поверхностных и краевых сил происходит при постоянной температуре и является активным и простым [1]. Оси ортотропии КМ совпадают с линиями главных кривизн поверхности приведения оболочки.

При определенных величинах действующих нагрузок в оболочке проявляются нелинейные свойства анизотропного материала, а деформации являются малыми. Указанные предпосылки позволяют для получения основных уравнений воспользоваться геометрически линейной теорией оболочек [1] и теорией пластичности анизотропных сред [1, 2], учитывая переменную толщину оболочки.

2. Основные соотношения и методические аспекты решения задач.

Компоненты U_1, U_2, U_3 вектора перемещений произвольной точки оболочки выражаются [9] через перемещения u_1, u_2, u_3 точек ее поверхности приведения и углы поворота нормали φ_1, φ_2 формулами

$$\begin{gathered} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2); \\ U_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2); \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{gathered} \tag{3}$$

Для гипотез Кирхгофа – Лява φ_1, φ_2 определяются [9] с помощью метода множителей Лагранжа из условий равенства нулю деформаций поперечного сдвига, т.е.

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{4}$$

и совпадают с углами поворота касательных.

Геометрические соотношения [9] между компонентами деформаций и перемещениями и углами поворота, в которых не учитывается изменение метрики по толщине оболочки, т.е. параметры Ляме совпадают с коэффициентами первой квадратичной формы поверхности приведения. Тогда для деформаций произвольной точки оболочки имеют место формулы

$$e_{11}=\varepsilon_{11}+\alpha_3\kappa_{11}\,;\; e_{12}=\varepsilon_{12}+2\alpha_3\kappa_{12}\quad (1\leftrightarrow 2)\,, \tag{5}$$

которые определены через компоненты деформации поверхности приведения

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{u_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+k_1u_3\,;\quad \kappa_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\varphi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\,;$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)+\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right);\quad 2\kappa_{12}=\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\varphi_1}{A_1}\right)+\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\varphi_2}{A_2}\right);$$

$$\varepsilon_{13}=\varphi_1+\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}-k_1u_1\quad (1\leftrightarrow 2), \tag{6}$$

где $A_i (i=1,2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы; k_i – кривизны поверхности приведения.

Ориентируясь на применение в дальнейшем метода множителей Лагранжа [9], для реализации геометрических гипотез Кирхгофа – Лява не будем выражать аналитически углы поворота касательных через перемещения. Это способствует повышению надежности создаваемых программ для вычислительных машин.

Физические нелинейные зависимости между компонентами напряжений и деформаций при плоском напряженном состоянии и простых нагружениях представим согласно теории пластичности анизотропных сред В.А.Ломакина [2] в виде

$$\begin{aligned} e_{11}&=\left(\frac{1}{E_{11}}+\Psi q_{1111}\right)\sigma_{11}+\left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}}+\Psi q_{1122}\right)\sigma_{22};\\ e_{22}&=\left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}}+\Psi q_{2211}\right)\sigma_{11}+\left(\frac{1}{E_{22}}+\Psi q_{2222}\right)\sigma_{22};\\ e_{12}&=\left(\frac{1}{G_{12}}+4\Psi q_{1212}\right)\sigma_{12}, \end{aligned} \tag{7}$$

где E_{11}, E_{22}, G_{12} ν_{12}, ν_{21} – упругие постоянные ортотропного КМ; q_{1111}, q_{1122}, q_{2211}, q_{2222}, q_{1212} – компоненты тензора, учитывающего анизотропию нелинейных свойств КМ.

Функция $\Psi(f)$ в (7) описывает нелинейное деформирование КМ и имеет вид

$$\Psi=\frac{1}{2\sqrt{f}}\int_{f_s}^{f}\frac{W_p'}{\sqrt{f}}df\ , \tag{8}$$

где f – квадратичная функция напряжений

$$f=\frac{1}{2}(q_{1111}\sigma_{11}^2+q_{2222}\sigma_{22}^2+2q_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}+4q_{1212}\sigma_{12}^2). \tag{9}$$

Постоянные и функция в соотношениях (7) определяются на основе экспериментов на растяжение образцов КМ вдоль осей ортотропии и под углом $45°$ к ним. Методика эксперимента и обработки данных изложена в [1].

Равенства (7) – (9) и все последующие содержат полные напряжения σ_{ij} или их нелинейные составляющие σ_{ij}^*, которые следует понимать не как аналитические выражения, а как формулы для расчетов в численной реализации метода. Формулы же для линейных составляющих напряжений являются аналитическими выражениями.

Уравнения (7) являются существенно нелинейными, разрешить их относительно напряжений можно численно с помощью, например, метода Ньютона. Тогда после численного обращения равенства (7) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(e_{11}, e_{22}, e_{12}\right) \quad \left(i, j = 1, 2\right). \tag{10}$$

Ориентируясь на применение в дальнейшем МПП, выделим в напряжениях, как слагаемые, нелинейные

$$\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0} \quad \left(i, j = 1,2\right) \tag{11}$$

и линейные члены

$$\sigma_{11}^{0} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} \;\; (1 \leftrightarrow 2);\; \sigma_{12}^{0} = G_{12}e_{12}, \tag{12}$$

где приняты обозначения

$$c_{11} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}. \tag{13}$$

Введем [10] средние по толщине оболочки внутренние усилия T_{ij} и моменты M_{ij} согласно формулам

$$T_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij} d\alpha_3; \quad M_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij}\alpha_3 d\alpha_3 \quad \left(i, j = 1,2\right) \tag{14}$$

и представим их согласно (11) в виде суммы линейных и нелинейных слагаемых

$$T_{ij} = T_{ij}^{0} + T_{ij}^{*}; \quad M_{ij} = M_{ij}^{0} + M_{ij}^{*} \quad \left(i, j = 1, 2\right). \tag{15}$$

Здесь линейные члены, обозначенные верхними символами ^{0}, определяются такими формулами:

$$T_{11}^{0} = (c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22})h + (c_{11}\kappa_{11} + c_{12}\kappa_{22})(h_2^2 - h_1^2)/2;$$

$$T_{22}^{0} = (c_{22}\varepsilon_{22} + c_{21}\varepsilon_{11})h + (c_{22}\kappa_{22} + c_{21}\kappa_{11})(h_2^2 - h_1^2)/2;$$

$$T_{12}^{0} = G_{12}\varepsilon_{12}h + G_{12}\kappa_{12}(h_2^2 - h_1^2); \tag{16}$$

$$M_{11}^{0} = (c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22})(h_2^2 - h_1^2)/2 + (c_{11}\kappa_{11} + c_{12}\kappa_{22})(h_2^3 + h_1^3)/3;$$

$$M_{22}^{0} = (c_{22}\varepsilon_{22} + c_{21}\varepsilon_{11})(h_2^2 - h_1^2)/2 + (c_{22}\kappa_{22} + c_{21}\kappa_{11})(h_2^3 + h_1^3)/3;$$

$$M_{12}^{0} = G_{12}\varepsilon_{12}(h_2^2 - h_1^2)/2 + 2G_{12}\kappa_{12}(h_2^3 + h_1^3)/3.$$

Нелинейные члены в (15), обозначенные верхними символами *, будем вычислять согласно таким формулам:

$$T_{ij}^{*} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij}^{*} d\alpha_3; \quad M_{ij}^{*} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij}^{*\prime}\alpha_3 d\alpha_3 \quad \left(i, j = 1, 2\right). \tag{17}$$

Исходя [9] из принципа виртуальной работы, выделив в напряжениях, усилиях и моментах линейные и нелинейные члены, принимая, что согласно МПП в форме дополнительных напряжений величины нелинейных составляющих (T_{ij}^{*}, M_{ij}^{*}) известны с предыдущего приближения и не варьируются, представим вариационное уравнение в виде

$$\delta \Pi = \delta(\Pi^0 + \Pi^*) = 0, \qquad (18)$$

где введены такие обозначения:

$$\Pi^0 = \frac{1}{2}\iint_\Omega (T_{11}^0\varepsilon_{11} + T_{22}^0\varepsilon_{22} + T_{12}^0\varepsilon_{12} + M_{11}^0\kappa_{11} + M_{22}^0\kappa_{22} + 2M_{12}^0\kappa_{12})\,d\Omega - \\ - A_n - A_k + \iint_\Omega (T_{13}^f\varepsilon_{13} + T_{23}^f\varepsilon_{23}); \qquad (19)$$

$$\Pi^* = \iint_\Omega (T_{11}^*\varepsilon_{11} + T_{22}^*\varepsilon_{22} + T_{12}^*\varepsilon_{12} + M_{11}^*\kappa_{11} + M_{22}^*\kappa_{22} + 2M_{12}^*\kappa_{12})\,d\Omega. \qquad (20)$$

Работа поверхностных и краевых сил в (18) определяется формулами

$$A_n = \iint_\Omega \left(q_1u_1 + q_2u_2 + q_3u_3 + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2\right)d\Omega; \qquad (21)$$

$$A_k = \int_{\Gamma_\sigma} (T_{1\nu}u_1 + T_{2\nu}u_2 + T_{3\nu}u_3 + M_{1\nu}\varphi_1 + M_{2\nu}\varphi_2)\,ds. \qquad (22)$$

Таким образом, линеаризированная задача сведена к определению в каждом приближении стационарных значений функционала

$$\Pi^{0*} = \Pi^0 + \Pi^*. \qquad (23)$$

Функционал (23) $\Pi^{0*}(u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, T_{13}^f, T_{23}^f)$ зависит от семи функций, которые предполагаются независимыми и могут варьироваться. Перерезывающие силы T_{13}^f, T_{23}^f в (19) являются множителями Лагранжа.

Из условия стационарности (23) следуют естественные статические краевые условия [9], а главные геометрические условия имеют вид

$$u_1 = u_{1k};\ u_2 = u_{2k};\ u_3 = u_{3k};\ \varphi_1 = \varphi_{1k};\ \varphi_2 = \varphi_{2k}. \qquad (24)$$

Применяя ВРМ к (23), получаем систему нелинейных разрешающих уравнений [9] такого вида:

$$\sum_{k=i-1}^{i+1}\sum_{l=j-1}^{j+1}\sum_{n=1}^{K^F} A_{mn}(k,l)f_n(k,l) = \Delta V(i,j)q_m(i,j) + \Delta s(i,j)T_{\nu m}(i,j) + \Phi_m(i,j);$$

$$m = \overline{1,7};\quad i = \overline{1,K^I};\quad j = \overline{1,K^J}, \qquad (25)$$

которая на каждой итерации является линеаризированной системой алгебраических уравнений с симметричной матрицей $[A]$ ленточной структуры и вектором нелинейных членов $\{\Phi\}$. Здесь ΔV и Δs – дискретные аналоги дифференциалов поверхности и дуги; K^I, K^J – количество узлов сетки вдоль координатных осей, соответственно.

3. Физически нелинейное напряженно-деформированное состояние тонких ортотропных сферических оболочек.

Рассмотрим два способа уменьшения концентрации напряжений возле отверстий: подкрепление контура отверстия линейно-упругим кольцом; утолщение оболочки около отверстия. Утолщение примем из того же нелинейно-упругого ортотропного материала, что и самой оболочки. К характеру утолщения не выдвигаются требования гладкости. Оно может быть кусочно-переменным или кусочно-постоянным.

3.1. Сферическая оболочка с подкрепленным отверстием. Пусть оболочка постоянной толщины h в виде сферического радиусом R сегмента дугой s_k с подкрепленным круговым отверстием радиуса r_0 находятся под действием внутренней давления $p = \text{const}$ и перерезывающей силы $Q_0 = pr_0 / 2$, приложенной к контуру отверстия [1, 9]. Контур отверстия подкреплен линейно-упругим кольцом прямоугольного поперечного сечения высотой a и шириной b, которое изготовлено из изотропного материала с модулем упругости E_k. Внешний край оболочки – шарнирно оперт. В качестве поверхности приведения выбрана срединная поверхность оболочки.

Оболочка изготовлена из нелинейно-упругого ортотропного стеклопластика с такими параметрами [1]: $E_{11} = 15$ ГПа; E_{22}=12 ГПа; $\nu_{12} = 0{,}12$; $q_{1111} = 2{,}0$; $q_{2222} = 3{,}14$; $q_{1122} = -0{,}24$. Другие параметры и функция, описывающая анизотропию нелинейных свойств материала, приведены в [1].

Геометрические параметры оболочки и подкрепления [10]: $R = 400h$; $r_0 = 30h$; $s_k = 5r_0$; $a = b = 3h$. Модуль упругости кольца будем варьировать в широких пределах (включая как отсутствие подкрепления, так и жесткое включение).

Числовые результаты получены согласно линейной ($p = 0{,}1$ МПа) и нелинейной ($p = 0{,}2$ МПа) постановкам задач при равномерной разбивке меридиана оболочки на 161 узловые точки и при относительном изменении максимальных деформаций в двух последующих приближениях не большем, чем 10^{-2}.

В табл. 1 (линейная задача) и 2 (нелинейная задача) приведены значения относительных радиальных перемещений ($\tilde{u} = u_1/h$), прогибов ($\tilde{w} = u_3/h$), радиальных ($\sigma_{11} = \sigma_r^0 \cdot 10^5$ Па) и круговых ($\sigma_{22} = \sigma_\theta^0 \cdot 10^5$ Па) напряжений на внешний ($\tilde{\gamma} = \alpha_3/h = 0{,}5$) и внутренней ($\tilde{\gamma} = -0{,}5$) поверхностях оболочек возле отверстия.

Таблица 1

НДС	$\tilde{\gamma}$	E_k, ГПа					
		0	1,5	15	40	80	∞
$\tilde{u} \cdot 10^2$	0	6,90	6,04	3,11	1,64	0,842	–0,427
$\tilde{w} \cdot 10$	0	23,10	20,60	8,48	4,38	2,670	0,567
σ_r^0	0,5	1	–9	224	191	131	–8
	–0,5	1	75	61	203	323	559
σ_θ^0	0,5	1200	1065	434	214	119	–1
	–0,5	737	658	349	217	151	54

Из представленных результатов расчетов следует, что максимальные напряжения в данных оболочках имеют место на контуре отверстия для всех жесткостей подкрепления. Для неподкрепленного и слабоподкрепленного отверстий ($E_k \leq$ 15 ГПа) максимальными являются окружные напряжения на внешней поверхности, а с увеличением жесткости подкрепления ($E_k \geq 80$ ГПа) максимальными становятся меридиональные напряжения на внутренней поверхности. Вариант жесткости $E_k = 40$ ГПа подкрепления можно принять близким к оптимальному, поскольку максимальные меридиональные и окружные напряжения выравниваются. Физическая нелинейность проявляется, в основном, в случаях неподкрепленного и слабоподкрепленного отверстий, а также в случае жесткого включения. С увеличением жесткости подкрепления влияние физической нелинейности на прогибы изменяется – сначала они увеличиваются, а затем уменьшаются. При близком к оптимальному подкреплению влияние нелинейности незначительно.

Таблица 2

НДС	$\tilde{\gamma}$	E_k, ГПа					
		0	1,5	15	40	80	∞
$\tilde{u}\cdot 10^2$	0	18,5	14,8	6,51	3,43	1,82	–0,701
$\tilde{w}\cdot 10$	0	63,1	50,5	17,40	8,70	5,19	0,932
σ_r^0	0,5	1	38	453	376	253	–32
	–0,5	2	125	129	421	651	1065
σ_θ^0	0,5	1878	1655	784	415	239	–3
	–0,5	1395	1222	668	423	289	99

3.2. Сферическая оболочка переменной толщины. Пусть толщина оболочки в виде сферического сегмента изменяется вдоль меридиана s по закону [8]

$$h = \begin{cases} h_k\left[1 + a\left(s_1 - s\right)/s_1\right]; & 0 \le s \le s_1; \\ h_k; & s_1 < s \le s_k, \end{cases} \tag{26}$$

где $s_1 = bs_k$ – участок меридиана оболочки, на котором толщина – переменна.

Геометрические параметры оболочки следующие: $R = 62{,}5h_k$; $r_0 = 5h_k$; $s_k = 24h_k$; $a = 0{,}5$; $b = 0{,}2$. Материал оболочки, нагрузка, граничные условия приняты такими же, как и выше (см. раздел 3.1).

Расчеты НДС выполнены (табл. 3) в линейной (ЛЗ) и нелинейной (НЗ) постановках (p = 2 МПа) при равномерной разбивке меридиана оболочки на 41 узловую точку и при относительном изменении максимальных деформаций в двух последующих приближениях не большем, чем 10^{-2}. В табл. 3 для сравнения приведены компоненты на контуре отверстия для трех вариантов толщины оболочки: постоянной – $h = h_k = \text{const}$; переменной – формула (26); кусочно-постоянной – формула

$$h = \begin{cases} ah_k; & 0 \le s \le s_1; \\ h_k; & s_1 < s \le s_k. \end{cases} \tag{27}$$

При этом толщина (27) на контуре отверстия оболочки принята такой же, как и толщина (26) в этой же точке.

Таблица 3

НДС	$\tilde{\gamma}$	Постоянная $h = h_k = \text{const}$		Переменная (26)		Кусочно-постоянная (27)	
		ЛЗ	НЗ	ЛЗ	НЗ	ЛЗ	НЗ
$\tilde{u}\cdot 10^2$	0	3,35	4,70	2,58	3,37	2,25	2,76
$\tilde{w}\cdot 10$	0	5,32	7,03	4,12	5,05	3,56	4,10
σ_θ^0	0,5	2251	1831	1692	1491	1399	1263
	–0,5	1396	1319	1128	1080	1041	992

Отметим, что результаты расчетов для случаев постоянной и переменной толщин с точностью до двух значащих цифр совпадают с аналогичными результатами, полученными МКР [8], что свидетельствует об эффективности предложенной методики. Более того, МКР не позволяет проводить расчет оболочки кусочно-постоянной толщины из-за необходимости вычисления первой и второй производных от толщины, а ВРМ является свободным от такого недостатка и в предложенном варианте позволяет проводить исследование НДС оболочки с произвольным законом изменения толщины, включая оболочки с ребрами.

Выводы.

1. Дана постановка, развита теория, разработаны методы решения новых классов задач теории композитных структурно неоднородных и подкрепленных оболочек: нелинейно-упругие ортотропные тонкие оболочки с подкрепленными отверстиями или переменной толщины.

2. Исследовано НДС композитных оболочек с вырезами, подкрепленными отверстиями и жесткими включениями. Дан анализ влияния свойств КМ, геометрических параметров оболочек, жесткости подкрепляющих элементов на НДС оболочек. Выявлены новые механические эффекты.

3. Установлено, что характер проявления физической нелинейности на НДС оболочек зависит от жесткости подкрепления.

4. Теоретические положения, разработанные методы и сформулированные выводы могут быть использованы для разработки программных средств расчетов композитных структурно-неоднородных элементов конструкций в авиационной, судостроительной и химической областях промышленности.

Р Е З Ю М Е . Розроблено методику розрахунку та досліджено напружено-деформований стан нелінійно-пружних ортотропних тонких оболонок з підкріпленими отворами та дискретно змінної товщини. Поверхня приведення не обов'язково є серединною. Визначальні рівняння базуються на теорії пластичності анізотропних середовищ Ломакіна. Використано метод послідовних наближень, варіаційно-різницевий метод. Гіпотези Кірхгофа – Лява реалізовано за допомогою методу множників Лагранжа. Методика дозволяє дослідити НДС як оболонок з довільним законом зміни товщини, так і оболонок, підкріплених ребрами. Числові результати наведено у вигляді таблиць та дано їх аналіз.

1. *Концентрация* напряжений / Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).
2. *Ломакин В.А.* О теории пластичности анизотропных сред // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1964. – № 4. – С.49 – 53.
3. *Луцька І.В., Максимюк В.А., Сторожук Є.А., Чернишенко І.С.* Методика розрахунку нелінійно-пружного деформування тонких композитних оболонок дискретно змінної товщини [Електронний ресурс] // Математика в сучасному технічному університеті: Зб. наук.-метод. праць / Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут». – Київ, 2015. – Вип. 1. – С. 48 – 55.
4. *Chen L., Rotter J.M., Doerich-Stravridis C.* Practical calculations for uniform external pressure buckling in cylindrical shells with stepped walls // Thin-Walled Structures. – 2012. – **61**. – P. 162 – 168.
5. *Delošević M., Petrović D., Bižić M.* Identification of the Stress-Strain State of a Cylindrical Tank with Walls of Variable Thickness // FME Trans. – 2011. – **39**, N1. – P. 25 – 32.
6. *Karpov V., Semenov A.* Strength and Stability of Orthotropic Shells // World Appl. Sci. J. – 2014.– **30**, N5.– P. 617–623.
7. *Kharat A., Kulkarni V.V.* Stress Concentration at Openings in Pressure Vessels – A Review // Int. J. Inn. Res. Sci. Eng.Tech. – 2013. – **2,** N 3. – P. 670 – 678.
8. *Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Physically nonlinear axisymmetric problems of the theory of orthotropic shells of variable thickness // Sov. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N 1. – P. 38 – 41.
9. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
10. *Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress State of Flexible Composite Shells with Stiffened Holes // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 558 – 565.
11. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 425 – 433.
12. *Nagpal S., Jain N., Sanyal S.* Stress Concentration and its Mitigation Techniques in Flat Plate with Singularities – A Critical Review // Eng. J.– 2012. – **16**, N1. – P. 1 – 16.
13. *Pilkey W.D., Pilkey D.F.* Peterson's Stress Concentration Factors. – New-York: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 560 p.
14. *Qatu M.S., Asadi E., Wang W.* Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open J. of Compos. Mater. – 2012. – **2**. – P. 61 – 86.
15. *Semenov A.A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // Thin-Walled. Struct. – 2016. – **106**.– P. 428 – 436.
16. *Shevchenko V.P., Zakora S.V.* Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 159 – 166.

Поступила 28.12.2015 Утверждена в печать 05.07.2016