

Н. П. Семенюк¹, В. М. Трач²

**УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОМПОЗИТНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЛОКАЛЬНЫМИ
НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; comros@inmtech.kiev.ua*

²*Национальный университет водного хозяйства и природопользования,
ул. Соборная, 11, 33018, Ровно, Украина; e-mail: trach-vm@ukr.net*

Abstract. An approach to solving the problem on nonlinear deformation of orthotropic cylindrical shells is proposed. It is assumed that the surface of shell has a local deflection restricted by segments of coordinate lines. The equations of the Timoshenko-Mindlin shell theory, relationships of the Byskov-Hatchinson asymptotic method, continuum extension method are used in the process of solving the nonlinear algebraic equations. While the critical loads and trajectories of deformation are evaluated, the number of interacting modes is determined that is sufficient for the satisfactory by exactness result. The examples of analysis of composite shells with positive and negative amplitudes of initial local deflections are shown.

Key words: buckling, post-buckling, imperfection, laminate shell, interaction of modes, external pressure.

Введение.

Известный метод оптимизации подкрепленных оболочек базируется на выборе таких жесткостей ребер и обшивки, при которых равны расчетные критические значения нагрузки локального и общего выпучивания. Этот подход в настоящее время называется «наивным». Оказалось, что оболочки с совпадающими критическими нагрузками весьма чувствительны к начальным несовершенствам. В работе Бискова и Хатчинсона [12] предложен метод расчета на устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек, в котором учитывается влияние на критические значения нагрузки взаимодействия локального и общего выпучивания при наличии начальных несовершенств. Метод отличается от предложенного ранее Койтером [15] тем, что он применим в случае как равных, близких, так и различных собственных значений однородной задачи, которая используется для определения критических нагрузок оболочки без несовершенств. Это позволяет применять метод и в других задачах устойчивости оболочек с многомодальными несовершенствами [7, 8, 11, 16, 18].

В данной статье предложен подход к решению задачи о нелинейном деформировании ортотропных цилиндрических оболочек, на поверхности которых имеется прогиб, ограниченный отрезками координатных линий. При его разработке использованы: уравнения теории оболочек Тимошенко – Миндлина, вариант которой изложен в работах [2, 16, 19]; основные соотношения асимптотического метода Бискова – Хатчинсона [11, 12] и метода непрерывного продолжения для решения нелинейных алгебраических уравнений, предложенного в работах Давиденко [4, 5, 16]. Локальный

прогиб задается в виде произведения двух тригонометрических функций таких, чтобы на ограничивающем контуре они равнялись нулю. Указанные произведения представляются двойными тригонометрическими рядами Фурье. Каждый член такого ряда в предлагаемом варианте является собственной функцией однородной задачи, при решении которой определяются критические нагрузки и формы потери устойчивости идеальных оболочек. С формальной точки зрения ряд Фурье представляет собой разложение начальных несовершенств в ряд по собственным векторам невозмущенной задачи. Коэффициенты рядов равны амплитудам мод геометрических несовершенств, к исследованию взаимодействия которых сводится рассматриваемая задача. Процедура определения амплитуд и их использования будет описана ниже при решении конкретных примеров методом Бискова – Хатчинсона. Важным в этой задаче является определение количества взаимодействующих мод, достаточного для получения удовлетворительного по точности результата.

Многомодальные несовершенства оболочек из композиционных материалов, не связанные с локальными прогибами, учитывались в задачах устойчивости при обсуждении их влияния на критические нагрузки и характер закритического поведения в работах авторов [7, 8, 18]. Представленные ниже результаты являются дополнением и развитием ранее полученных в указанных работах.

Отметим, что устойчивость изотропных оболочек с локальными прогибами, имеющими ограничения по двум координатам, исследована рядом авторов как аналитически, так и, в основном, численными методами [3, 6, 9, 14, 11].

§1. Постановка задачи. Разрешающие уравнения.

Рассмотрим слоистую цилиндрическую оболочку радиуса R с общей толщиной t и длиной L , которая нагружена системой сил, пропорциональных некоторому параметру λ .

Представим необходимые для проведения расчетов соотношения, используя нелинейную теорию оболочек Тимошенко – Миндлина [2, 19]. Выражение принципа виртуальных работ в этом случае принимает вид

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[T_{11} \delta \varepsilon_1 + T_{22} \delta \varepsilon_2 + T_{12}^* \delta \omega_1 + T_{21}^* \delta \omega_2 + T_{13}^* \delta \theta_1 + T_{23} \delta \theta_2 + T_{13} \delta \theta + T_{23}^* \delta \psi + M_{11} \delta k_1 + \right. \\ \left. + M_{22} \delta k_2 + M_{12} \delta t_1 + H (\delta t_1 + \delta t_2) \right] dx dy - \delta A = 0. \quad (1.1)$$

Здесь x, y – координатные линии, совпадающие с образующей и направляющей цилиндрической поверхности приведения; T_{ij}, M_{ij} – усилия и моменты, статически эквивалентные действующим напряжениям. Проекции усилий на оси срединной поверхности до деформации имеют вид

$$T_{12}^* = S + T_{11} \omega_1; \quad T_{21}^* = S + \frac{1}{R} H + T_{22} \omega_2; \\ T_{13}^* = T_{13} + T_{11} (\theta_1 + \bar{\theta}_1) + S (\theta_2 + \bar{\theta}_2); \quad T_{23}^* = T_{23} + S (\theta_1 + \bar{\theta}_1) + T_{22} (\theta_2 + \bar{\theta}_2). \quad (1.2)$$

Присутствующие здесь функции с чертой сверху обозначают углы поворота поверхности, обусловленные имеющимися до нагружения оболочки начальными геометрическими несовершенствами в виде прогибов \bar{w} .

Введем параметры, необходимые для записи нелинейных выражений деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R};$$

$$k_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad t_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad t_2 = \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Используя их, получаем формулы:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \theta_1^2 + 2\theta_1\bar{\theta}_1); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \theta_2^2 + 2\theta_2\bar{\theta}_2);$$

$$\varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1\theta_2;$$

$$k_{11} = k_1; \quad k_{22} = k_2 + \frac{\varepsilon_2}{R}; \quad k_{12} = t_1 + t_2 + \frac{\omega_2}{R}; \quad \varepsilon_{13} = \theta + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2. \quad (1.4)$$

Вариация работы внешних нагрузок δA имеет различный вид в зависимости от характера их распределения по лицевым поверхностям или же по боковой поверхности. В случае цилиндрической оболочки одним из наиболее практически интересных является вариант нагружения ее однородным внешним давлением интенсивности q . При этом имеем равенство:

$$\delta A = \int_0^{L/2} \int_0^R q [-\theta_1 \delta u - \theta_2 \delta v + (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta w] dx dy. \quad (1.5)$$

Полагаем, что оболочка состоит из N слоев волокнистого композита, имеющего симметричное относительно срединной поверхности строение. Соотношения упругости в этом случае имеют такой вид:

$$T_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}; \quad T_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22}; \quad S = C_{66}\varepsilon_{12}; \quad T_{13} = C_{55}\varepsilon_{13}; \quad T_{23} = C_{44}\varepsilon_{23};$$

$$M_{11} = D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22}; \quad M_{22} = D_{12}k_{11} + D_{22}k_{22}; \quad H = D_{66}k_{12}. \quad (1.6)$$

Для жесткостей C_{ij} и D_{ij} в (1.6) имеем формулы

$$C_{kl} = \sum_{i=1}^N C_{kl}^i; \quad D_{kl} = \sum_{i=1}^N (D_{kl}^i + z_i^2 C_{kl}^i),$$

где C_{kl}^i , D_{kl}^i – жесткости растяжения и изгиба i -го слоя, z_i – поперечная координата срединной поверхности i -го слоя относительно срединной поверхности оболочки.

Соотношения, составляющие основу метода Бискова – Хатчинсона [12], удобно получить в общем виде, введя обобщенные перемещения, напряжения и деформации оболочки как векторы: $U = (u, v, w, \theta, \psi)$; $\sigma = (T_{11}, T_{22}, S, T_{23}, T_{13}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21})$; $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, k_{11}, k_{22}, \tau_1, \tau_2)$. При этом будем использовать компактность формулировок Будянского [10]. Если поле начальных несовершенств характеризуется вектором \bar{U} , обобщенные деформации и перемещения можно представить как

$$\varepsilon(U, \bar{U}) = \varepsilon(U + \bar{U}) - \varepsilon(U); \quad \Delta(U, \bar{U}) = \Delta(U + \bar{U}) - \Delta(U). \quad (1.7)$$

Вектор напряжений для оболочки с несовершенствами $\bar{\sigma}$ связан с вектором деформаций $\varepsilon(U, \bar{U})$ матрицей жесткости слоистой оболочки H , т.е.

$$\bar{\sigma} = H\varepsilon(U, \bar{U}). \quad (1.8)$$

Выражение принципа виртуальных работ (1.1) принимает вид

$$\bar{\sigma}\varepsilon'(U, \bar{U})\delta u - \lambda\Delta'(U, \bar{U})\delta U = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.7) – (1.9) позволяют решать различные нелинейные задачи о деформировании оболочек с начальными геометрическими несовершенствами. К приведенным уравнениям (1.7) – (1.9) применим метод асимптотического анализа, предложенный авторами работы [12]. Полагаем, что докритическое напряженно-деформированное состояние совершенной оболочки является линейным, а также, что при $\lambda=1$ поля перемещений, деформаций и напряжений характеризуются векторами $U_0, \varepsilon_0, \sigma_0$. Линеаризуя уравнения (1.7) – (1.9) в окрестности нагрузки бифуркации, получаем совокупность уравнений для определения критических значений параметра нагрузки λ_i и соответствующих мод выпучивания U_i , т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_i \varepsilon'(0) \delta U + \lambda_i \sigma_0 \varepsilon'' U_i \delta U - \lambda_i \Delta'' U_i \delta U &= 0; \\ \sigma_i &= H \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i = \varepsilon'(0) U_i \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Эти M форм ортогональны

$$\sigma_0 \varepsilon'' U_i U_j - \Delta'' U_i U_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.11)$$

Обозначим через ξ_i амплитуды мод выпучивания U_i . Они остаются неопределенными при решении однородной задачи (1.10) и могут быть получены только при решении исходной нелинейной задачи (1.7) – (1.11). Для этого вектор перемещений представим в виде асимптотического разложения

$$U = \lambda U_0 + \xi_i U_i + \xi_i \xi_j U_{ij}. \quad (1.12)$$

Здесь и ниже принимаем правило суммирования по повторяющимся индексам. Перемещения U_{ij} ортогональны к модам выпучивания:

$$\sigma_0 \varepsilon'' U_i U_{kl} - \Delta'' U_i U_{kl} = 0 \quad i = 1, \dots, M; \quad k = 1, \dots, M; \quad l = 1, \dots, M. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.12) в первое из выражений (1.10), получим

$$\begin{aligned} \lambda \sigma_0 \varepsilon'(0) \delta U - \lambda \Delta'(0) \delta U + \xi_i [\sigma_i \varepsilon'(0) \delta U + \lambda \sigma_0 \varepsilon'' u_i \delta U - \lambda \Delta'' U_i \delta U] + \\ + \xi_i \xi_j [\sigma_{ij} \varepsilon(0) \delta U + \sigma_i \varepsilon'' U_j \delta U + \lambda \sigma_0 \varepsilon'' u_{ij} \delta U - \lambda \Delta'' u_{ij} \delta U] + \\ + \xi_i \xi_j \xi_k [\sigma_i \varepsilon'' U_{jk} \delta U + \sigma_{ij} \varepsilon'' U_k \delta U + H \varepsilon'' U_i U_{jk} \varepsilon'(0) \delta U] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь учтено, что

$$\sigma_{ij} = H \varepsilon_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'(0) U_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon'' U_i U_j. \quad (1.15)$$

Поскольку $\lambda \sigma_0 \varepsilon'(0) \delta U - \lambda \Delta'(0) \delta U = 0$, то с учетом соотношения (1.10), выражение (1.14) примет вид

$$\xi_i (\lambda - \lambda_i) (\sigma_0 \varepsilon'' U_i \delta U - \Delta'' U_i \delta U) + \xi_i \xi_j L_{ij}(\lambda) + \xi_i \xi_j \xi_k L_{ijk} + \dots = 0 \quad (1.16)$$

$$[L_{ij}(\lambda) = \sigma_{ij} \varepsilon'(0) \delta U + \sigma_i \varepsilon'' U_j \delta U + \lambda \sigma_0 \varepsilon'' U_{ij} \delta U - \lambda \Delta'' U_{ij} \delta U;$$

$$L_{ijk} = \sigma_i \varepsilon'' U_{jk} \delta U + \sigma_{ij} \varepsilon'' U_k \delta U + H \varepsilon'' U_i U_{jk} \varepsilon'(0) \delta U].$$

Вариационное уравнение относительно полей $U_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ может быть получено из (1.16), если учесть [12], что для вариаций δU в этом случае справедливо условие ортогональности

$$\sigma_0 \varepsilon'' U_i \delta U - \Delta'' U_i \delta U = 0. \quad (1.17)$$

Пренебрегая в (1.16) слагаемыми третьей и более высоких степеней ξ_i , учитывая симметрию искомых функций относительно индексов i, j , выводим уравнение

$$\sigma_{ij} \varepsilon'(0) \delta U + \lambda \sigma_0 \varepsilon'' U_{ij} \delta U - \lambda \Delta'' U_{ij} \delta U = -\frac{1}{2} (\sigma_i \varepsilon'' U_j \delta U + \sigma_j \varepsilon'' U_i \delta U). \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.18) зависит от нагрузки λ . Авторы метода [12] предлагают использовать в качестве λ в уравнении (1.18) наименьшее из совокупности λ_j . Однако вносимую при этом погрешность необходимо оценивать в зависимости от рассматриваемых задач. Если решены однородная (1.10) и неоднородная (1.15), (1.18) краевые задачи, относительно амплитуд ξ_i из уравнения (1.16) (где полагаем $\delta U = U_1$), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijk r} = \bar{\xi}_r \frac{\lambda}{\lambda_r} \quad r = 1, \dots, M, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ijr} &= -A_{ijr} / 2D; \\ b_{ijk r} &= -B_{ijk r} / D; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$A_{ijr} = \sigma_r \varepsilon'' U_i U_j + 2\sigma_i \varepsilon'' U_j U_r; \quad D = \lambda_r (\sigma_0 \varepsilon'' U_r^2 - \Delta'' U_r^2);$$

$$B_{ijk r} = \frac{1}{2} (\sigma_i \varepsilon'' U_r U_{jk} + \sigma_j \varepsilon'' U_k U_r + \sigma_r \varepsilon'' U_i U_{jk} + \sigma_{ir} \varepsilon'' U_j U_k + 2\sigma_i \varepsilon'' U_j U_{kr}).$$

Уравнения (1.19) могут быть использованы: для исследования нелинейного деформирования несовершенных конструкций в докритическом состоянии; для расчета критических (предельных) нагрузок, а также для изучения закритического поведения рассматриваемых конструкций.

Кроме того, система (1.19) применима в случае совпадающих, почти совпадающих или существенно различающихся мод. Это свойство метода Бискова – Хатчинсона используется ниже для разработки методики расчета устойчивости и закритического поведения слоистых композитных цилиндрических оболочек с мультимодальными несовершенствами, в частности, с локальными несовершенствами, которые могут быть описаны тригонометрическими рядами Фурье.

§2. Решение для цилиндрических оболочек.

Для многослойных цилиндрических оболочек полученные векторные соотношения (1.10) – (1.20) при использовании выражений (1.1) – (1.6) преобразуем к координатному виду. Линеаризованные уравнения (1.10) для цилиндрической оболочки примут такой вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^i \delta \varepsilon_1 + S^i \delta \alpha_1 + T_{22}^i \delta \varepsilon_2 + \left(S^i + \frac{2}{R} H^i \right) \delta \omega_2 + T_{13}^i (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ & \left. + H^i \delta k_{12} + T_{23}^i (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^i \delta k_{11} + M_{22}^i \delta k_{22} + \lambda_i \left[T_{11}^0 (\omega_1^i \delta \alpha_1 + \theta_1^i \delta \theta_1) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ T_2^0 \left(\omega_2^i \delta \omega_2 + \theta_2^i \delta \theta_2 \right) + S^0 \left(\theta_1^i \delta \theta_2 + \theta_2^i \delta \theta_1 \right) \Big] \Big\} dx dy = 0. \quad (2.1)$$

Вариационное уравнение (1.18) относительно переменных второго порядка в теории оболочек Тимошенко – Миндлина представим в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^{ij} \delta \varepsilon_1 + S^{ij} \delta \omega_1 + T_{22}^{ij} \delta \varepsilon_2 + \left(S^{ij} + \frac{2}{R} H^{ij} \right) \delta \omega_2 + T_{13}^{ij} (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ & + T_{23}^{ij} (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^{ij} \delta k_{11} + M_{22}^{ij} \delta k_{22} + H^{ij} \delta k_{12} + \lambda_i \left[T_{11}^0 (\omega_1^{ij} \delta \omega_1 + \right. \\ & \left. \left. + \theta_1^{ij} \delta \theta_1 \right) + T_2^0 (\omega_2^{ij} \delta \omega_2 + \theta_2^{ij} \delta \theta_2) + S^0 (\theta_1^{ij} \delta \theta_2 + \theta_2^{ij} \delta \theta_1) \right] \Big\} dx dy = \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[(T_{11}^i \omega_1^{ji} + T_{11}^j \omega_1^i) \delta \omega_1 + (T_{22}^i \omega_2^j + T_{22}^j \omega_2^i) \delta \omega_2 + \right. \\ & \left. + (T_{11}^i \theta_1^j + S^i \theta_2^j + T_{11}^j \theta_1^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_1 + (T_{22}^i \theta_2^j + S^i \theta_2^j + T_{22}^j \theta_2^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_2 \right] dx dy. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Если получены решения краевых задач (2.1) и (2.2), по формулам (1.20) определяются коэффициенты a_{ijr} и b_{ijk} системы уравнений (1.19).

Присутствующие в выражениях (1.20) значения величин D , A_{ijr} и B_{ijk} находим с помощью таких формул:

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[T_{11,r} \varepsilon_{1,r} + T_{12,r} \omega_{1,r} + T_{22,r} \varepsilon_{2,r} + T_{21,r} \omega_{2,r} + T_{13,r} \varepsilon_{13,r} + T_{23,r} \omega_{23,r} + \right. \\ & \left. + M_{11,r} k_{11,r} + M_{22,r} k_{22,r} + H k_{12,r} \right] dx dy; \\ A_{ijr} &= \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[2T_{11,i} (\omega_{1,j} \omega_{1,r} + \theta_{1,j} \theta_{1,r}) + 2T_{22,i} (\omega_{2,j} \omega_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{2,r}) + \right. \\ & + 2S_i (\theta_{1,j} \theta_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{1,r}) + T_{11,r} (\omega_{1,i} \omega_{1,j} + \theta_{1,i} \theta_{1,j}) + \\ & \left. + T_{22,r} (\omega_{2,i} \omega_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{2,j}) + S_r (\theta_{1,i} \theta_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{1,j}) \right] dx dy; \\ B_{ijk} &= \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[2T_{11,i} (\omega_{1,j} \omega_{1,kr} + \theta_{1,j} \theta_{1,kr}) + 2T_{22,i} (\omega_{2,j} \omega_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{2,kr}) + 2S_i (\theta_{1,j} \theta_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{1,kr}) + \right. \\ & + T_{11,i} (\omega_{1,jk} \omega_{1,r} + \theta_{1,jk} \theta_{1,r}) + T_{22,i} (\omega_{2,jk} \omega_{2,r} + \theta_{2,jk} \theta_{2,r}) + S_i (\theta_{1,jk} \theta_{2,r} + \theta_{2,jk} \theta_{1,r}) + \\ & + T_{11,r} (\omega_{1,i} \omega_{1,jk} + \theta_{1,i} \theta_{1,jk}) + T_{22,r} (\omega_{2,i} \omega_{2,jk} + \theta_{2,i} \theta_{2,jk}) + S_r (\theta_{1,i} \theta_{2,jk} + \theta_{2,ij} \theta_{1,k}) + \\ & + T_{11,ij} (\omega_{1,k} \omega_{1,r} + \theta_{1,k} \theta_{1,r}) + T_{22,ij} (\omega_{2,k} \omega_{2,r} + \theta_{2,k} \theta_{2,r}) + S_{ij} (\theta_{2,k} \theta_{1,r} + \theta_{1,k} \theta_{2,r}) + \\ & \left. + T_{11,ri} (\omega_{1,j} \omega_{1,k} + \theta_{1,j} \theta_{1,k}) + T_{22,ri} (\omega_{2,j} \omega_{2,k} + \theta_{2,j} \theta_{2,k}) + S_{ri} (\theta_{2,j} \theta_{1,k} + \theta_{2,k} \theta_{1,j}) \right] dx dy. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Локальный прогиб цилиндрической поверхности задаем в виде функции двух переменных x, y , совпадающих в некоторой локальной области поверхности приведения с осями координат глобальной системы ($0 \leq x \leq L$, $-\pi R \leq y \leq \pi R$), где L – длина образующей цилиндра; $2\pi R$ – длина направляющей. Локальная область ограничена контуром $L_1 \leq x \leq L_1 + l_1$, $-y_1 \leq y \leq y_1$. Начальный прогиб в указанной области представляем в виде

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} \cos \frac{\pi y}{2y_1}. \quad (2.4)$$

Так как амплитуда каждой функции в выражении (2.4) равна единице, то амплитуда начального прогиба \bar{w} равна $\bar{\xi}$. Решение возмущенной задачи будем искать в виде тригонометрических рядов Фурье, учитывая, что тригонометрические функции являются собственными для однородной задачи (2.1). Определим

$$\sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} = \sum_m B_m \sin \frac{m\pi x}{L_1}; \quad \left[B_m = \frac{2}{L} \left(\alpha \cos \frac{\pi L_1}{l_1} - \beta \sin \frac{\pi L_1}{l_1} \right) \right]; \quad (2.5)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\sin \gamma_1 (L_1 + l) - \sin \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\sin \gamma_2 (L_1 + l) - \sin \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\cos \gamma_1 (L_1 + l) - \cos \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\cos \gamma_2 (L_1 + l) - \cos \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{l_1} - \frac{m\pi}{L}; \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{l_1} + \frac{m\pi}{L}.$$

Так как

$$y = R\varphi; \quad y_1 = R\varphi_1,$$

то

$$\cos \frac{\pi y}{2y_1} = \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} = A_0 + \sum_n A_n \cos n\varphi,$$

где

$$A_0 = \frac{2\varphi_1}{\pi^2}; \quad A_n = \cos n\varphi_1 / \varphi_1 \left[\left(\frac{\pi}{2\varphi_1} \right)^2 - n^2 \right].$$

Используя указанные разложения, начальный прогиб представим в виде двойного ряда Фурье

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sum_{m=1} \sum_{n=0,1} B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi. \quad (2.6)$$

Из коэффициентов двумерной матрицы $\bar{\xi} B_m A_n$ образуем одномерный вектор с компонентами $\bar{\xi}_i$ таким образом, что $\bar{\xi}_1 > \bar{\xi}_2 > \bar{\xi}_3 > \dots > \bar{\xi}_m$.

Ниже в примерах расчета показано, как согласуются волновые числа m, n мод выпучивания совершенных оболочек с аналогичными числами тригонометрических функций рядов Фурье.

Применим представленную методику для расчета слоистых цилиндрических оболочек при внешнем давлении. В качестве разрешающих функций используем перемещения. Предварительно приведем разрешающую систему к безразмерному виду [1, 2]. В этом случае параметр нагрузки $\lambda = qR / (C_{11}t)$. При решении однородной задачи (2.1) перемещения представляем в виде тригонометрических рядов, каждый член которых удовлетворяет условиям шарнирного закрепления торцов:

$$\begin{aligned}
 u_i &= A_{m,n}^i \cos l_m \zeta \cos n_i \varphi; \\
 v_i &= B_{m,n}^i \sin l_m \zeta \sin n_i \varphi; \\
 w_i &= C_{m,n}^i \sin l_m \zeta \cos n_i \varphi; \\
 \theta_i &= D_{m,n}^i \cos l_m \zeta \cos n_i \varphi; \\
 \psi_i &= E_{m,n}^i \sin l_m \zeta \sin n_i \varphi
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$(l_m = m\pi R / L; \zeta = x / R; \varphi = y / R).$$

Систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов получим, подставив (2.7) в (2.1). Путем перебора параметров волнообразования m и n определяем спектр собственных значений λ_i и соответствующих им собственных векторов, нормированных таким образом, что $C_{m,n}^i = 1$.

Решение системы уравнений (2.2) с учетом вида их правых частей представим в виде

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= \sum_k \left[A_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \varphi + A_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \varphi \right] \cos l_k \zeta; \\
 v_{ij} &= \sum_k \left[B_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j) \varphi + B_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j) \varphi \right] \sin l_k \zeta; \\
 w_{ij} &= \sum_k \left[C_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \varphi + C_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \varphi \right] \sin l_k \zeta; \\
 \theta_{ij} &= \sum_k \left[D_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \varphi + D_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \varphi \right] \cos l_k \zeta; \\
 \psi_{ij} &= \sum_k \left[E_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j) \varphi + E_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j) \varphi \right] \sin l_k \zeta.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для решения системы (1.19) при начальном значении параметра нагрузки λ используем метод Ньютона – Канторовича. Рассматриваем пошаговую процедуру увеличения нагрузки. Полученное решение на i -м шаге используем в качестве начального значения при следующем $(i+1)$ -м шаге. Для построения решения в тех точках, где якобиан системы (1.19) равен нулю, используем метод непрерывного продолжения

[4, 5]. Вводим вектор \bar{X} размерности $(M+1)$ с компонентами $(\xi_1, \dots, \xi_M, \lambda)^T$. Система (1.19) в этом случае может быть записана в компактном виде

$$F_r(\bar{X}) = 0 \quad (r = 1, \dots, M). \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.7) по параметру s , соответствующему продвижению вдоль кривой равновесных состояний, получаем систему M линейных однородных уравнений для $M+1$ неизвестных, т.е.

$$\sum_{j=1}^{M+1} F_{r,j} \frac{d\xi_j}{ds} = 0 \quad r = 1, \dots, M, \quad (2.10)$$

где $\bar{J} = [F_{r,j}] = \left[\frac{\partial F_r}{\partial \xi_i} \right]$ – матрица Якоби системы (2.9). Ранг $[\bar{J}] = M$ в регулярных и предельных точках.

Решение системы (2.10) представим в виде задачи Коши

$$\frac{d\bar{X}}{ds} = \text{ort}(J, Q)$$

с начальным условием $\bar{X}(s_0) = \bar{X}_0$.

Операция $\text{ort}(J, Q)$, разработанная в [4], обозначает процесс ортогонализации векторов-строк матрицы \bar{J} и определения орта, дополняющего исходный базис до базиса размерности $(M+1)$. В качестве начального значения $\bar{X}(s_0)$ используем решение, вычисленное по методу Ньютона – Канторовича при $\lambda \ll \lambda_s$. Описанная процедура соответствует методу непрерывного продолжения [5]. Она оказалась весьма эффективной при решении многих нелинейных задач [8, 11 – 13, 16, 18].

§3. Результаты расчета и их анализ.

Используя изложенную методику расчета, исследуем некоторые особенности нелинейного деформирования цилиндрических оболочек из композитов при наличии геометрических несовершенств в виде локальных прогибов с положительной и отрицательной амплитудой. Полагаем, что оболочка состоит из 10 элементарных слоев армированного волокнами стеклопластика.

В приведенных ниже примерах расчета принимаем характерную для практики последовательность распределения направлений армирования по толщине: $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, -180^\circ, -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ$. Механические характеристики слоев материала (стеклопластика), вычисленные по формулам [2] при содержании эпоксидного связующего 0,38, следующие: $E_1 = 0,43415 \cdot 10^7$ МПа; $E_2 = 0,11338 \cdot 10^6$ МПа; $G_{12} = 0,52888 \cdot 10^5$ МПа; $G_{13} = 0,52888 \cdot 10^5$ МПа; $G_{23} = 0,42830 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_1 = 0,28266$.

Рассмотрено два варианта геометрических параметров оболочек. В первом из них оболочки – средней длины и тонкие ($L/R = 2, t/R = 0,01, L_1/L = 0,5, l_1/L = 0,4, t = 0,01$ м), во втором – более короткие и толстые ($L/R = 1, t/R = 0,05, L_1/L = 0,36, l_1/L = 0,1, t = 0,05$ м). Если задать одинаковыми пределы изменчивости волновых параметров m, n в выражениях λ_{mn} и $\bar{\xi}_{mn}$, то получим две матрицы $[\lambda_{mn}]$ и $[\bar{\xi}_{mn}]$. Каждому собственному значению $\lambda_{m,n}$ будет соответствовать амплитуда несовершенства $\bar{\xi}_{m,n}$. Однако использовать систему (1.19) с учетом всей совокупности указанных величин не имеет смысла. Ввиду очень большого различия значений $\lambda_{m,n}$ и $\bar{\xi}_{m,n}$ необходимо ограничить порядок системы (1.19). Одним из практически возможных путей реализации

вычислительного процесса является построение двух одномерных массивов λ_r и $\bar{\xi}_i$. Для первого варианта оболочек отрезки этих массивов приведены в табл. 1. Здесь же приведен столбец собственных значений λ_i в порядке их возрастания. Различие между λ_r и λ_i обусловлено несопадением собственных форм и волновых чисел в двойном ряде (2.6).

Таблица 1

λ_r	$\bar{\xi}_i$	m	n	λ_i	m_1	n_1
$0,26574 \cdot 10^{-1}$	$0,29198 \cdot 10^{-1}$	1	7	$0,26574 \cdot 10^{-1}$	1	7
$0,26959 \cdot 10^{-1}$	$0,33623 \cdot 10^{-1}$	1	6	$0,26959 \cdot 10^{-1}$	1	6
$0,30539 \cdot 10^{-1}$	$0,24506 \cdot 10^{-1}$	1	8	$0,30539 \cdot 10^{-1}$	1	8
$0,36548 \cdot 10^{-1}$	$0,19754 \cdot 10^{-1}$	1	9	$0,36548 \cdot 10^{-1}$	1	9
$0,39758 \cdot 10^{-1}$	$0,37578 \cdot 10^{-1}$	1	5	$0,39758 \cdot 10^{-1}$	1	5
$0,43824 \cdot 10^{-1}$	$0,15139 \cdot 10^{-1}$	1	10	$0,43824 \cdot 10^{-1}$	1	10
$0,54895 \cdot 10^{-1}$	$0,24331 \cdot 10^{-1}$	2	9	$0,52064 \cdot 10^{-1}$	1	11
$0,57323 \cdot 10^{-1}$	$0,18647 \cdot 10^{-1}$	2	10	$0,54895 \cdot 10^{-1}$	2	9
$0,58306 \cdot 10^{-1}$	$0,30184 \cdot 10^{-1}$	2	8	$0,57323 \cdot 10^{-1}$	2	10
$0,62907 \cdot 10^{-1}$	$0,13348 \cdot 10^{-1}$	2	11	$0,58306 \cdot 10^{-1}$	2	8
$0,73992 \cdot 10^{-1}$	$0,35962 \cdot 10^{-1}$	2	7	$0,61129 \cdot 10^{-1}$	1	12
$0,99746 \cdot 10^{-1}$	$0,40877 \cdot 10^{-1}$	1	4	$0,62907 \cdot 10^{-1}$	2	11
0,11889	$0,41413 \cdot 10^{-1}$	2	6	$0,70431 \cdot 10^{-1}$	2	12
0,24308	$0,46285 \cdot 10^{-1}$	2	5	$0,70946 \cdot 10^{-1}$	1	13
0,36048	$0,12959 \cdot 10^{-1}$	5	8	$0,73992 \cdot 10^{-1}$	2	7

В табл. 1 приняты следующие обозначения:

λ_r – значения критических параметров, вычисленных в два этапа: на первом – из коэффициентов матрицы ξ_{mn} получаем три одномерных массива таких, что в первом содержатся расположенные в порядке убывания коэффициенты указанной матрицы, а второй и третий содержат значения волновых чисел m, n , соответственно; на втором этапе – определяем массив чисел λ_{mn} при значениях m, n из второго и третьего столбцов. Коэффициенты массива λ_r , расположенные в порядке возрастания, образуют первый столбец табл. 1;

$\bar{\xi}_i$ – значения коэффициентов рядов Фурье для несовершенств;

λ_i – значения критических параметров идеальной оболочки;

m, n – это волновые параметры функций рядов Фурье;

m_1, n_1 – волновые параметры собственных функций исходной однородной задачи.

Точность результатов, получаемых при решении системы уравнений (1.19), зависит от максимального значения индекса r , определяющего также количество коэффициентов в столбцах табл. 1.

Выбрать значение числа r можно не только по сходимости вычисляемых критических нагрузок, но и по близости равновесных кривых при увеличении этого числа. Кривые равновесных состояний (траекторий), приведенные на рис. 1, получены для первого варианта оболочек.

На этом рисунке по оси абсцисс отложены отношения прогибов к толщине при $\varphi = 0$ и $\zeta = (L_1 + l_1 / 2) / R$, а по оси ординат – значение $\lambda^* = \lambda_r / \lambda_c$, где λ_c – минимальное из совокупности значений λ_i . Прогибы вычисляем с помощью отрезка ряда

для w в разложениях (2.8). Числа возле этих кривых обозначают максимальные значения индекса r , определяющего количество уравнений в системе (1.19).

Важным моментом, который следует отметить, является то, что при увеличении порядка уравнений (1.19) кривые сближаются, хотя сходимость не является равномерной. При $r=18$ и $r=21$ они совпадают. Этот факт учитывался при построении графиков, приведенных на рис. 2, *a*, *б*, которые получены в той же точке при

$$\varphi = 0 \text{ и } \zeta = (L_1 + l_1 / 2) / R.$$

Вычисления произведены при удержании в системе (1.19) 18-ти уравнений. Равновесные кривые на рис. 2, *a*, *б* получены для первого варианта геометрических параметров оболочек, имеющих начальный прогиб с положительной (вмятины) и отрицательной (выпучины) амплитудой, соответственно.

На этих рисунках числа возле кривых равны значениям параметра ξ . Умноженные на этот параметр числа во втором столбце табл. 1 определяют значение амплитуды несовершенства $\bar{\xi}_{mn}$ с соответствующими волновыми числами. В скобках возле указанных чисел приведены относительные величины предельных нагрузок.

Для второго варианта оболочек отрезки этих массивов приведены в табл. 2. Обозначения имеющихся в ней величин такие же, как и в табл. 1.

Равновесные кривые для этой оболочки приведены на рис. 3, *a*, *б*. В этом варианте при расчете учтено также 18 форм несовершенств, которые взаимодействуют. Это количество устанавливалось путем увеличения r до стабилизации результатов.

Различие между рис. 3, *a* и *б* обусловлено тем, что кривые на первом из них получены для оболочек с вмятинами, на втором – с выпучинами.

На всех приведенных рисунках равновесные траектории построены без учета линейного члена в разложениях (1.12).

Сравнивая предельные значения нагрузок при вогнутых и выпуклых начальных прогибах, отметим, что начальные несовершенства обоих видов оказывают отрицательное влияние на устойчивости оболочек.

При этом вмятины приводят к более существенному снижению критических нагрузок, чем выпучины. Весьма различаются равновесные кривые по виду при начальных выпуклых и вогнутых локальных прогибах.

Как можно отметить по характеру кривых на рис. 2, *a* и рис. 3, *a*, вершины прогибов с положительной амплитудой перемещаются к центру оболочки при росте давле-

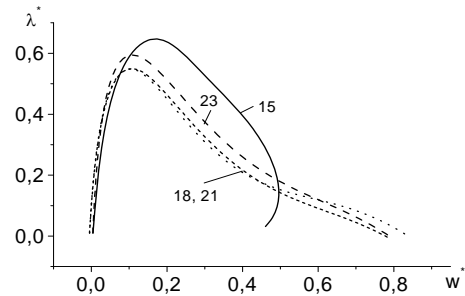
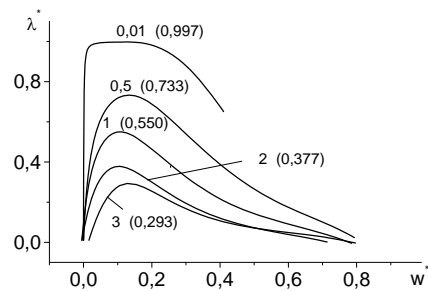
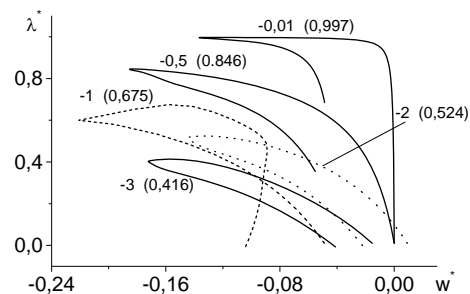


Рис. 1



a



б

Рис. 2

ния как в докритическом состоянии, так и в закритическом. Иной характер кривых на рис. 2, б и рис. 3, б.

Таблица 2

λ_r	$\bar{\xi}_i$	m	n	λ_i	m_1	n_1
0,12283	$0,12772 \cdot 10^{-1}$	1	6	0,12283	1	6
0,13899	$0,15001 \cdot 10^{-1}$	1	5	0,12550	1	7
0,21177	$0,16914 \cdot 10^{-1}$	1	4	0,13542	1	8
0,49835	$0,18384 \cdot 10^{-1}$	1	3	0,13899	1	5
$0,16507 \cdot 10$	$0,10947 \cdot 10^{-1}$	4	6	0,14828	1	9
$0,19286 \cdot 10$	$0,19309 \cdot 10^{-1}$	1	2	0,16221	1	10
$0,23102 \cdot 10$	$0,12857 \cdot 10^{-1}$	4	5	0,17631	1	11
$0,35395 \cdot 10$	$0,14497 \cdot 10^{-1}$	4	4	0,19008	1	12
$0,38861 \cdot 10$	$0,12550 \cdot 10^{-1}$	6	6	0,20325	1	13
$0,54913 \cdot 10$	$0,14740 \cdot 10^{-1}$	6	5	0,21177	1	4
$0,62049 \cdot 10$	$0,15756 \cdot 10^{-1}$	4	3	0,21569	1	14
$0,84433 \cdot 10$	$0,16620 \cdot 10^{-1}$	6	4	0,22734	1	15
$0,11992 \cdot 10^2$	$0,19625 \cdot 10^{-1}$	1	1	0,23816	1	16
$0,13732 \cdot 10^2$	$0,16549 \cdot 10^{-1}$	4	2	0,24819	1	17
$0,14786 \cdot 10^2$	$0,18064 \cdot 10^{-1}$	6	3	0,25744	1	18

Несмотря на то, что давление направлено к центру, вершины прогибов с отрицательной амплитудой до прощелкивания перемещаются в противоположную сторону.

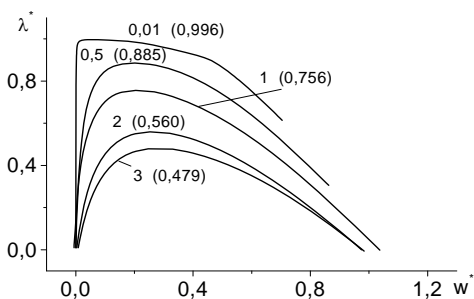
В критической точке происходит резкий поворот направления кривых к центру.

Такое поведение вершины прогиба при увеличении нагрузки объясняется взаимодействием совершенной части оболочки и той ее части, которая находится в начальном деформированном состоянии.

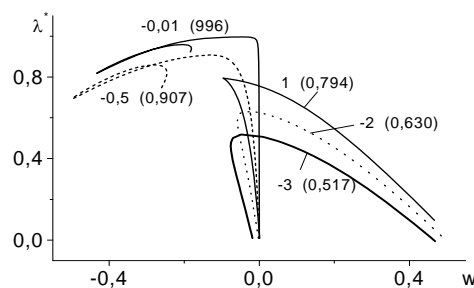
В обоих случаях передаваемые от оболочки моменты изгибают указанный участок, что приводит к отмеченным перемещениям вершины начального прогиба.

Заключение.

Результаты данной статьи свидетельствуют, что асимптотический метод Бискова – Хатчинсона может быть использован для исследования нелинейного деформирования, включая определение предельных нагрузок, ортотропных цилиндрических обо-



а



б

Рис. 3

лочек с локальными начальными несовершенствами в виде прогибов малых участков поверхности. несовершенства подобного рода описываются двойными тригонометрическими рядами Фурье. Коэффициенты рядов равны амплитудам мод несовершенств, к исследованию взаимодействия которых сводится рассматриваемая задача.

На основании анализа сходимости полученных результатов установлено, что при вычислениях в этих рядах следует учитывать ограниченное количество членов. При этом, как следует из приведенных в табл. 1 и 2 волновых чисел, выполняется условие применимости метода Бискова – Хатчинсона [12] относительно длины волн взаимодействующих мод.

На числовых примерах установлено: 1) начальные прогибы (как вогнутые, так и выпуклые) уменьшают критические значения интенсивности давления, причем больше в первом случае; 2) существуют значительные различия в нелинейном деформировании оболочек с положительными и отрицательными амплитудами начальных прогибов.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано підхід до розв'язання задачі про нелінійне деформування ортотропних циліндричних оболонок, на поверхні яких є прогин, обмежений відрізками координатних ліній. Використовуються рівняння теорії оболонок Тимошенка – Міндліна, співвідношення асимптотичного методу Бискова – Хатчинсона, методу неперервного продовження для розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь. При розрахунку критичних навантажень і траєкторії деформування визначається кількість взаємодіючих мод, яка достатня для отримання задовільного за точністю результату. Наведено приклади розрахунку композитних оболонок с додатними та від'ємними амплітудами початкових прогинів.

1. *Баженов В.А., Семенюк Н.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. *Ванин Г.Л., Семенюк Н.П.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200с.
3. *Гавриленко Г.Д., Красовский Л.П.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек с одиночной локальной вмятиной // Проблемы прочности. – 2004. – № 3. – С. 52 – 58.
4. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, – 1988. – 232 с.
5. *Давыденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 4. – С. 196 – 206.
6. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кенплер Х., Кочык З.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., Лейпциг: Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
7. *Семенюк Н.П., Жукова Н.Б.* Устойчивость, закритическое поведение и оптимизация оболочек из композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1991. – № 1. – С. 132 – 137.
8. *Семенюк Н.П., Жукова Н.Б.* Влияние взаимодействия форм выпучивания на оптимальные проекты слоистых цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. – 1993. – **29**, № 3. – С. 355 – 360.
9. *Amazigo J.C., Fraser W.B.* Buckling under External Pressure of Cylindrical Shells with Dimple Shaped Initial Imperfections // Int .J. Solids Structures. – 1971. – **7**, N 8 – P. 883 – 900.
10. *Budiansky B.* Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – **14**. – P. 2 – 65.
11. *Byskov E.* Mode Interaction in Structures an Overview // Proc. CD-ROM of the Sixth World Congress of Computational Mechanics, Tsinghua University, China (September 2004).
12. *Byskov E., Hutchinson J.W.* Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells // AIAA J. – 1977. – **16**, N 7. – P. 941 – 948.

13. *Elishakoff I.* Probabilistic resolution of the twenties century conundrum in elastic stability //Thin-Walled Structures. – 2012. – **59**. – P. 35 – 57.
14. *Gotsulyak E.A., Prusov D.E., Aranchii N.E.* Stability of Geometrically Imperfect General-View Shells // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 11. – P. 1476 – 1481.
15. *Koiter W.T.* General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // *Report WTHD 91*. Holland, Delft University of Technology, 1976.
16. *Kolakovsky Z.* On certain aspects of global and local buckling modes in thin-walled colum-beams // *Mechnika theoreticzna i stosowna*. – 1994. – 2.32. – P. 409 – 427.
17. *Semenyuk N.P.* Nonlinear Deformation of Shell Loaded with Finite Angles of Rotation and Low Elastoplastic Strains // Int. Appl. Mech.. – 2015. – **51**, N 2. – P. 149 – 158.
18. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Two methods for Calculating the Stability of Shells with Single-Mode and Multimode Imperfections // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 1. – P. 20 – 24.
19. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* The Theory of Stability of Cylindrical Composite Shells Revisited // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 449 – 460.

Поступила 22.09.2015

Утверждена в печать 05.07.2016

