В.Б.Ларин

ОБ УТОЧНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ НЕДЕМПФИРОВАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

Abstract. An algorithm of solving the problem of specification of parameters (stiffnesses) is offered for the undamped mechanical system by the results of observation of some eigenvectors and eigenfrequencies. This algorithm is based on analysis of the linear matrix inequalities that allows to use the standard procedures of MATLAB and comparatively easy to take into account the structure of the unknown matrix of stiffnesses. It is shown on the simple example that the high exactness of determination of the model parameters needs the sufficient number of observable eigenvectors.

Key words: undamped mechanical system, linear matrix inequality, model updating.

§1. Введение.

Задача определения (уточнения) параметров механических систем, в той или иной постановке, продолжают привлекать внимание исследователей (см. например, [3 – 7], где есть дальнейшие ссылки). В частности, исследования проводятся как применительно к системам, движение которых описывается уравнением [6]

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = 0\,, \tag{1.1}$$

так и уравнением [7]

$$M\ddot{q} + Kq = 0\,. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) q – вектор обобщенных координат системы; M, B, K – квадратные матрицы соответствующего размера. Предполагаются известными исходные значения параметров этих систем. Задача состоит в определении (уточнении) значений «фактических» параметров этих систем (например, жесткостей), используя результаты экспериментальных наблюдений некоторого числа (не всех) собственных векторов и соответствующих собственных значений. Для решения этих задач в [6, 7] предложены итерационные процедуры.

Ниже рассмотрена аналогичная задача применительно к уравнению (1.2). Как и в [6], предполагаем, что матрица M известна точно и подлежит уточнению только матрица жесткости K. Для решения этой задачи, как и в [5], используем подход, связанный с линейными матричными неравенствами (ЛМН) [1, 2]. С вычислительной точки зрения, этот подход сравнительно прост и легко позволяет точно учесть особенности структуры матрицы K. Эффективность подхода демонстрируется на примере.

§2. Общие соотношения.

Как отмечено в [1, соотношения (2.3), (2.4)], матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0\,, \tag{2.1}$$

где матрицы $Q(x)=Q^T(x)$, $R(x)=R^T(x)$, $S(x)$ линейно зависят от x, эквивалентно следующим матричным неравенствам:

$$R(x)>0\,,\; Q(x)-S(x)R^{-1}(x)S^T(x)>0\,. \tag{2.2}$$

Здесь и далее верхний индекс «T» означает транспонирование. Рассмотрим следующее ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T \\ T^T & I \end{bmatrix}>0\,;\quad Z=Z^T\,, \tag{2.3}$$

которое, согласно (2.1), (2.2), можно записать в виде $Z>TT^T$. Здесь и далее I – единичная матричная матрица соответствующего размера. Соотношения (2.1) – (2.3) позволяют рассмотреть следующую стандартную задачу ЛМН на собственные значения (см. [1, соотношения (2.9) (п.2.2.2)]). А именно, – задачу минимизации линейной функции cx (например, $cx=\mathrm{tr}(Z)$, где $\mathrm{tr}(Z)$ – след матрицы Z) при выполнении условий (2.3).

Соотношения (2.3) можно обобщить в виде следующей системы ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z_i & T_i \\ T_i^T & I \end{bmatrix}>0\,,\; i=1,2,\ldots,k\,;\quad Z_i=Z_i^T\,,$$

которые представим в виде, аналогичном (2.2), т.е.

$$Z_i>T_{\,i}T_i^T\,,\; i=1,2,\ldots,k\,. \tag{2.4}$$

Применительно к (2.4) также можно рассматривать стандартную задачу ЛМН на собственные значения. А именно, задачу минимизации

$$cx=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,\mathrm{tr}(Z_i) \tag{2.5}$$

при выполнении условий (2.4). В (2.5) α_i – весовые коэффициенты. Для решения этой задачи можно использовать процедуру mincx.m пакета MATLAB [2].

§3. Постановка задачи.

В соответствии с введением принимаем известными исходные значения фигурирующих в (1.2) матриц M,K, которые обозначим M_0,K_0. Фактические значения этих матриц обозначим $\bar{M},\bar{K}$. Размер этих матриц равен $n\times n$. Предполагаем, как и в [6], что фактическое значение матрицы $\bar{M}$ совпадает с M_0, а значение элементов матрицы $\bar{K}$ подлежат уточнению по результатам наблюдений некоторого числа $(m<n)$ собственных векторов и собственных значений. Обозначим

$$X_e=\left[X_1^{(e)},\ldots,X_m^{(e)}\right]\in R^{n\times m}\,;\quad \Lambda_e=\mathrm{diag}\left[(\omega_1^{(e)})^2,\ldots,(\omega_m^{(e)})^2\right]\in R^{m\times m}\,.$$

Располагая этими данными, для определения оценки матрицы $\bar{K}$ (матрицы $\tilde{K}$) используем соотношение

$$KX_e=M_0X_e\Lambda_e\,. \tag{3.1}$$

Это соотношение фигурирует в [7, выражение (3)]. Если уравнения, следующие из (3.1), не полностью определяют все элементы матрицы $\tilde{K}$, то, как и в [7], в дополнение к (3.1), вводится условие

$$\min\left\|K-K_0\right\|\,. \tag{3.2}$$

Ниже, для получения матрицы $\tilde{K}$, определяемой соотношениями (3.1), (3.2), как в [5], будем использовать аппарат ЛМН. Рассмотрим следующие матричные неравенства:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & T_1 \\ T_1^T & I \end{bmatrix} > 0\,; \quad \begin{bmatrix} Z_2 & T_2 \\ T_2^T & I \end{bmatrix} > 0\,, \tag{3.3}$$

где $T_1 = \tilde{K}X_e - M_0 X_e \Lambda_e$; $T_2 = \tilde{K} - K_0$.

Применительно к рассматриваемой задаче необходимо определить матрицу $\overline{K}$, при которой $T_1 = 0$, а матрица T_2 – минимальна. Естественно, что аппроксимацией решения задачи (3.1), (3.2) может быть решение задачи минимизации функции (2.5), т.к. выбором весовых коэффициентов в (2.5) можно обеспечит достаточно малую норму матрицы T_1. Действительно из (3.3) следует, что

$$Z_1 > T_1 T_1^T\,; \quad Z_2 > T_2 T_2^T\,. \tag{3.4}$$

С другой стороны, соответствующая минимизируемая функция (2.5) имеет такой вид:

$$cx = \alpha_1 \mathrm{tr}(Z_1) + \alpha_2 \mathrm{tr}(Z_2)\,. \tag{3.5}$$

Приняв во внимание (3.4), можно утверждать, что выбором весовых коэффициентов α_1, α_2 в (3.5) можно обеспечить достаточно малую величину $\mathrm{tr}(Z_1)$, а следовательно и величину $T_1 T_1^T$ (см. пример).

Таким образом, задача уточнения значений элементов $\overline{K}$ сведена к задаче минимизации целевой функции (3.5) при соответствующем выборе коэффициентов α_1, α_2.

Как уже упоминалось, для решения этой задачи можно использовать стандартную задачу mincx.m пакета MATLAB.

В связи с тем, что элементы матрицы $\tilde{K}$ являются линейными комбинациями жесткостей системы, после определения матрицы $\tilde{K}$, уточненные значения параметров системы (жесткостей) можно получить из соответствующей переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (см. пример).

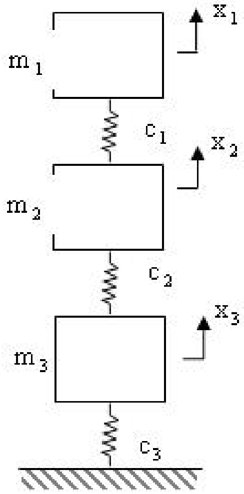
§4. Числовые примеры.

Рассмотрим систему, изображенную на рисунке.

Движение этой системы описывается уравнением (1.2), в котором матрицы M, K и вектор q имеют следующую структуру:

$$M = \mathrm{diag}\{[m_1, \quad m_2, \quad m_3]\}\,;$$

$$K = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$



Принимаем следующие значения матриц M_0, K_0:

$$M_0 = \mathrm{diag}\{[1, \quad 2, \quad 10]\}\,; \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix},$$

т.е. исходные значения параметров системы, показанной на рисунке, следующие:

$$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 10\,,\ \ c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 5\,.$$

Предполагаем, что фактические значения жесткостей системы имеют такой вид:

$$\bar{c}_1 = 1;\ \bar{c}_2 = 24;\ \bar{c}_3 = 9,$$

т.е. матрица $\bar{K}$ принимает вид:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, отличие исходных и «фактических» жесткостей системы можно характеризовать следующим образом:

$$nc_0 = \left\| c_0 - \bar{c} \right\| = 4{,}12, \tag{4.2}$$

где $c_0 = \left[c_1, \quad c_2, \quad c_3 \right]^T$, $\bar{c} = \left[\bar{c}_1, \quad \bar{c}_2, \quad \bar{c}_3 \right]^T$.

Соответствующие принятым значениям матриц M_0 и $\bar{K}$, матрицы собственных векторов $\bar{X}_e$ и собственных значений $\bar{\Lambda}_e$ имеют вид:

$$\bar{X}_e = \begin{bmatrix} 0{,}4967 & 0{,}5109 & 0{,}7016 \\ -0{,}5633 & -0{,}0371 & 0{,}4258 \\ 0{,}1089 & -0{,}2713 & 0{,}1205 \end{bmatrix}; \quad \bar{\Lambda}_e = \begin{bmatrix} -2{,}1342 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}0726 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3931 \end{bmatrix}.$$

Обнуляя в матрице $\bar{X}_e$ соответствующий столбец (или столбцы) можно моделировать ситуации, когда измеряется только часть собственных векторов и соответствующих собственных значений.

Для оценки возможностей рассматриваемого алгоритма выполнены следующие три численные эксперименты.

1. В матрице $\bar{X}_e$ обнулен первый столбец, т.е. предполагается, что доступны результаты наблюдений только двух собственных векторов и соответствующих собственных значений. В функционале (3.5) принимаем, что $\alpha_2 = 0$. Так как в этом случае соотношение $T_1 = 0$ полностью определяет искомое значение элементов матриц $\tilde{K}$, то целью этого эксперимента является оценка точности предлагаемых вычислительных процедур.

2. В матрице $\bar{X}_e$ обнулены первые два столбца, т.е. измеряется только третий собственный вектор. И в этом эксперименте принимаем, что в функционале (3.5) $\alpha_2 = 0$, несмотря на то, что в этом случае число уравнений, следующих из условия $T_1 = 0$, меньше числа неизвестных.

3. Исходные данные аналогичны принятым в предыдущем эксперименте, но в функционале (3.5) принято, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 10^{-6}$.

Перед описанием результатов этих экспериментов представим два замечания.

1) В соответствии со структурой матрицы K (см. (4.1)) переопределенная система линейных уравнений, определяющих жесткости $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ по полученной $\tilde{K}$, оценке матрицы $\bar{K}$, имеет вид

$$A\tilde{c} = b; \tag{4.3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{bmatrix}; \quad b = \left[\tilde{K}(1,1) \quad \tilde{K}(1,2) \quad \tilde{K}(2,21) \quad \tilde{K}(2,3) \quad \tilde{K}(3,3) \right]^T.$$

2). Как отмечено во Введении, рассматриваемый подход, базирующийся на процедурах ЛМН, позволяет легко учесть особенности структуры искомой матрицы. В рассматриваемом примере, для описания структуры матрицы K, использован подход аналогичный, описанному в [2, пример 8.4].

Представим результаты экспериментов. В *первом эксперименте* получены следующие значения искомых величин:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -1{,}0000 & 0 \\ -1{,}0000 & 3{,}0000 & -2{,}0000 \\ 0 & -2{,}0000 & 11{,}0000 \end{bmatrix}; \quad T_1 = 10^{-8} \begin{bmatrix} -0{,}1467 & 0{,}1467 & 0 \\ 0{,}1467 & -0{,}7252 & -0{,}0468 \\ 0 & -0{,}0468 & 0{,}3924 \end{bmatrix};$$

$$n = \left\|\tilde{K} - \bar{K}\right\| / \left\|\bar{K}\right\| = 6{,}64 \cdot 10^{-10}; \quad nt = \left\|T_1\right\| = 2{,}53 \cdot 10^{-9}.$$

Вектор $\tilde{c}$, определяемый (4.3), имеет такой вид:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \\ 9{,}0000 \end{bmatrix}; \quad nc = \left\|\tilde{c} - \bar{c}\right\| = 6{,}8 \cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что точностные характеристики рассматриваемого алгоритма достаточно высоки.

Рассмотрим *эксперимент 2.* Получены следующие результаты:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -1{,}0000 & 0 \\ -1{,}0000 & 3{,}6915 & -4{,}4438 \\ 0 & -4{,}4438 & 19{,}6372 \end{bmatrix}; \ T_1 = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5496 \\ 0 & 0 & 0{,}1221 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0{,}6495 \\ 3{,}7429 \\ 15{,}8943 \end{bmatrix};$$

$$n = \left\|\tilde{K} - \bar{K}\right\| / \left\|\bar{K}\right\| = 0{,}8128; \quad nt = \left\|T_1\right\| = 5{,}63 \cdot 10^{-15}; \quad nc = \left\|\tilde{c} - \bar{c}\right\| = 7{,}12.$$

Отметим, что, несмотря на то, что в этом эксперименте $nt \approx 10^{-15}$, полученные результаты трудно назвать удовлетворительными. Например, величина nc существенно превышает величину nc_0, определяемую согласно (4.2), т.е. уточнения параметров системы не происходит. Это является следствием того, что в случае измерения только одного собственного вектора, число уравнений, определяемых условием $T_1 = 0$, меньше числа известных. В этой связи, целесообразно учесть условие (3.2), что и выполнено в следующем эксперименте.

Эксперимент 3. Получены следующие результаты:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -1{,}0000 & 0 \\ -1{,}0000 & 2{,}8385 & -1{,}4290 \\ 0 & -1{,}4290 & 8{,}9820 \end{bmatrix}; \quad T_1 = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}6938 \\ 0 & 0 & 0{,}2728 \\ 0 & 0 & -0{,}8151 \end{bmatrix}; \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 1{,}0819 \\ 1{,}5928 \\ 7{,}3892 \end{bmatrix};$$

$$n = \left\|\tilde{K} - \bar{K}\right\| / \left\|\bar{K}\right\| = 0{,}19; \quad nt = \left\|T_1\right\| = 1{,}1 \cdot 10^{-5}; \quad nc = \left\|\tilde{c} - \bar{c}\right\| = 1{,}66.$$

В итоге можно констатировать, что использование соотношения (3.2) позволяет существенно улучшить результаты, полученные в предыдущем эксперименте (ср. полученные значения nc в этих двух экспериментах). Однако, возникает вопрос о выборе величин коэффициентов α_1 и α_2 в функционале (3.5). Очевидно, что произвольное назначение коэффициентов α_1, α_2 в (3.5) может не приводить к уточнению параметров модели (ср. результаты эксперимента 2, в котором принято, что $\alpha_2 = 0$ и эксперимента 3, в котором $\alpha_2 = 10^{-6}$).

5. Заключение.

В данной работе предложен алгоритм решения задачи об уточнении параметров (жесткостей) недемпфированной механической системы по результатам наблюдения некоторых собственных векторов и собственных частот. Алгоритм базируется на процедурах линейных матричных неравенств, что позволяет использовать для решения этой задачи стандартные процедуры пакета MATLAB и сравнительно легко учесть структуру искомой матрицы жесткостей. На простом примере показано, что для достижения высокой точности определения параметров модели необходимо располагать достаточным числом наблюдаемых собственных векторов.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано алгоритм розв’язання задачі про уточнення параметрів (жорсткостей) недемпфованої механічної системи за результатами спостереження деяких власних векторів і власних частот. Алгоритм базується на процедурах лінійних матричних нерівностей, що дозволяє використовувати для розв’язування цієї проблеми стандартні процедури пакету MATLAB і порівняно легко врахувати структуру матриці жорсткостей. На простому прикладі показано, що для досягнення високої точності визначення параметрів моделі необхідно мати в своєму розпорядженні достатнє число спостережуваних власних векторів.

1. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.
2. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI control toolbox users guide. – The MathWorks Inc. – 1995. – 321 p.
3. *Golub V.P., Ragulina V.S., Fernati P.V* Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Isotropic Materials in Torsion // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 196 – 206.
4. *Lakiza V.D.* Experimental Study of the Vibrations of a Composite Cylindrical Shell with a Filler Subject to Two-Frequency Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 167 – 175.
5. *Larin V.B.* Algorithms for Solving a Unilateral Quadratic Matrix Equation and the Model Updating Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 321 – 334.
6. *Yuan Y.* An iterative updating method for damped gyroscopic systems // Int. J. of Computation and Mathematics Sciences. – 2010. – 4:2. – P. 63 – 71.
7. *Yuan Q., Dai H.* The Matrix Pencil Nearness Problem in Structural Dynamic Model Updating // J. Eng. Math. – 2015. – **93**. – P. 131 – 143.

Поступила 23.12.2015 Утверждена в печать 05.07.2016