А.В.Константинов[1], О.С.Лимарченко[2], В.Н.Мельник[2], И.Ю.Семенова[2]

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ФАРАДЕЯ О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

[1]*Институт математики НАН Украины,*
ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев, Украина; e-mail: akonst.im@mail.ru;
[2]*Киев. нац. ун-т им. Т.Г.Шевченко,*
просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: olelim2010@yahoo.com

Abstract. The nonlinear dynamics of the mechanical system “reservoir – liquid with free surface” is studied for the generalized Faraday problem. A generalization of results of the classical Faraday problem is carried out in two directions. First, the system is assumed to have the additional degree of freedom – a possibility not only carry out the translational motion of the system in the horizontal plane by the given law (as in the classical Faraday problem), but also under action of the vertical force. It is shown on the basis of performed study that in presence of the additional degree of freedom the dynamical processes in the system develop as the aggregate of mechanisms of parametric resonance and forced vibrations. In this case, the system can perform the nonlinear vibrations both owing to kinematic perturbations and owing to dynamical excitation (force).

Key words: nonlinear dynamics, combined motion, generalized Faraday problem, parametric resonance, instability domain.

Введение.

Параметрический резонанс в механической системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» впервые экспериментально исследовал М. Фарадей в 1831 году. Как следует из результатов эксперимента, выход на режим параметрического резонанса происходит в системе, если частота внешнего параметрического возбуждения равна удвоенной низшей частоте колебаний свободной поверхности жидкости.

Резервуар в эксперименте Фарадея рассматривался только цилиндрической формы и имел всего одну степень свободы – возможность вертикального перемещения по заданному закону [3, 4]. Обеспечивается эта возможность с помощью жесткого закрепления резервуара к лабораторному оборудованию и связана с самой постановкой эксперимента. В такой постановке задачи не учитывается силовое и моментное влияние колебаний жидкости на движение резервуара, совместный характер его движения с жидкостью, особенно когда относительная масса жидкости в системе значительна. Это исключает ряд реальных свойств в практических приложениях резервуаров с жидкостью и, в первую очередь, в динамике ракет с жидкостью. Несмотря на это исследования по задаче Фарадея в несвязанной постановке активно проводятся и в настоящее время [5 – 7], о чем свидетельствует довольно полный обзор исследований по параметрическому резонансу в задачах динамики резервуаров с жидкостью [4]. Исследование задачи в совместной постановке приводит к значительно более сложным эффектам [2, 8, 9, 12] и, прежде всего, к смещению проявления эффектов по частоте [1, 12]. Поэтому предлагаются следующие направления обобщения классической задачи Фарадея о развитии параметрического резонанса на свободной поверхности жидкости:

резервуар движется вертикально по заданному гармоническому закону в поле слабой гравитации; в этих условиях необходимо учитывать силы поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости;

резервуар движется вертикально по заданному гармоническому закону и может совершать горизонтальные перемещения вызванные поперечными колебаниями жидкости (внесение в систему дополнительной степени свободы – возможности движения в горизонтальной плоскости);

резервуар закреплен на маятниковом подвесе, точка подвеса движется вертикально по заданному гармоническому закону, резервуар может совершать угловые колебания за счет поперечных колебаний жидкости (внесение в систему дополнительной степени свободы – возможности наклонных движений резервуара);

резервуар движется вертикально, но не по заданному гармоническому закону, а под действием гармонической силы;

резервуар движется вертикально под действием гармонической силы, а также может совершать горизонтальные перемещения за счет поперечных колебаний жидкости;

резервуар движется вертикально под действием гармонической силы и может совершать наклонные колебания за счет поперечных колебаний жидкости;

параметрические колебания происходят в резервуаре, имеющем форму тела вращения с наклонными стенками, а не цилиндра.

В данной работе исследованы такие варианты обобщенной задачи Фарадея: во-первых, в систему вводится дополнительная степень свободы – возможность поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости за счет колебаний свободной поверхности жидкости, во-вторых, резервуар может совершать вертикальные гармонические колебания как по заданному закону (как в классической задаче Фарадея), так и под действием вертикальной гармонической силы. При этом исследование проводится на основе метода, в котором, в отличие от большинства современных подходов, не применяется гипотеза о возможности пренебрежения колебаниями на собственных частотах системы (последующий анализ показал, что учет колебаний свободной поверхности жидкости на собственных и комбинационных частотах является определяющим для большинства динамических эффектов, включая сам факт возможности выхода системы на режим установившихся колебаний), исследование динамики системы выполнено на основе нелинейной многомодовой модели (12 форм колебаний) совместного движения жидкости и резервуара [1, 2, 10, 11].

1. Объект исследования.

Рассмотрим цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. Резервуар считаем абсолютно твердым телом, которое движется поступательно под действием активных внешних сил. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым. В классической постановке задачи Фарадея резервуар совершает только вертикальные движения по заданному гармоническому закону $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ (рис. 1, *а*), в обобщенной задаче Фарадея резервуар может также перемещаться поступательно в горизонтальной плоскости вдоль оси *OY* (рис. 1, *б*). Кроме того, рассмотрим обобщение задачи Фарадея, когда резервуар движется только вертикально под действием силы (рис. 1, *в*), а также с возможностью поступательного движения в горизонтальной плоскости вдоль оси *OY* (рис. 1, *г*). На всех представленных рисунках приняты обозначения: $\varepsilon_z, \varepsilon_y$ – перемещения резервуара вдоль осей *OZ* и *OY*, H_z; p – амплитуда и частота внешнего силового или моментного параметрического воздействия; F_z – функция внешней вертикальной силы; M – общая масса системы. Величина прилагаемой внешней вертикальной силы F_z подбирается таким образом, чтобы обеспечить резервуару такое же ускорение вдоль оси *OZ*, как и в случае классической задачи Фарадея.

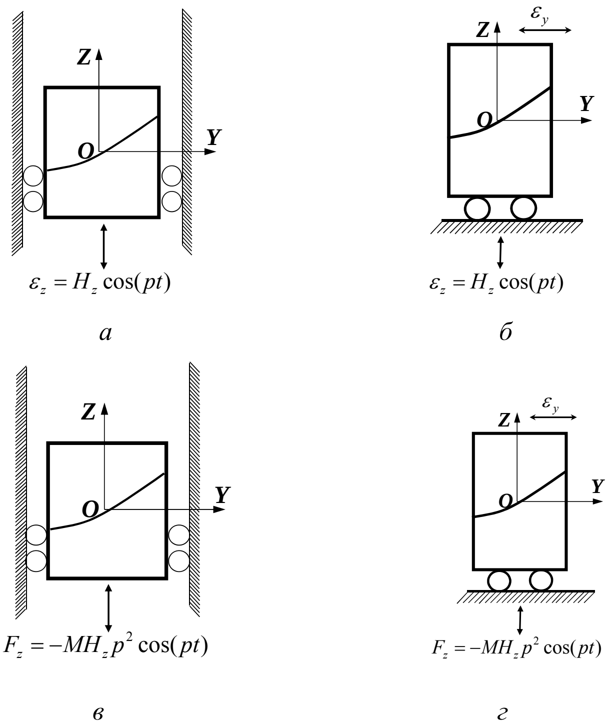

Рис. 1

Следуя методике работы [2], математическая модель системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» строится на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = 0, \text{ где } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при этом функция Лагранжа задается в классической форме Гамильтона – Остроградского как разность между кинетической и потенциальной энергиями

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}_3\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2}M_T(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F)g\varepsilon_z - \frac{1}{2}\rho g\int_S(\xi^2 - H^2)dS + \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

где ρ – плотность жидкости; τ – область, занимаемая жидкостью; $d\tau = rdrd\theta dz$ – элемент объема в цилиндрических координатах, причем ось Oz направлена противоположно вектору $\vec{g}$ ускорения свободного падения, а система координат неподвижно связана с резервуаром; $\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$; φ – потенциал скоростей жидкости; ξ – возмущение свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенной свободной поверхности некапиллярной жидкости; S – поперечное сечение цилиндрического резервуара; H – глубина жидкости в резервуаре; M_T – масса резервуара; M_F – масса жидкости; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ — вектор перемещения резервуара; $\vec{F}$ – главный вектор внешних сил, действующих на резервуар.

Для решения задачи в вариационной постановке целесообразно свести описание задачи к минимальному числу независимых переменных, описывающих движение резервуара с жидкостью, т.е. фактически построить разложения искомых переменных, удовлетворяющие всем кинематическим граничным условиям. Так как безвихревое движение идеальной однородной несжимаемой жидкости полностью определяется движением ее границ, то возмущения свободной поверхности жидкости ξ и радиус-вектор перемещения резервуара $\vec{\varepsilon}(t)$ полностью характеризуют движение объема жидкости и поэтому потенциал скоростей жидкости φ следует принимать зависимой переменной.

Следуя методике работы [2], разложения искомых переменных представим в виде

$$\xi(r,\theta,t)=\sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta);\quad \varphi=\sum_i b_i(t)\varphi_i(r,\theta,z),$$

где $\xi(r,\,\theta,\,t)$ – уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости; $a_i(t)$ – амплитуды форм колебаний указанной поверхности жидкости ξ . Системы функций ψ_i и $\varphi_i=\psi_i\dfrac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i\sinh\kappa_i H}$ являются решением порождающей линейной спектральной задачи [2] и имеют вид

$$\psi_n(r,\theta)=J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(n\theta)\\ \cos(n\theta)\end{matrix}\qquad (n=0,\,1,\,2,\,...;m=1,\,2,\,...\,.$$

В работе [2] разработан метод исключения кинематических граничных условий на свободной поверхности жидкости, позволяющий получить дискретную модель механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» минимальной размерности. На основе разработанного метода, вариационных методов математической физики и асимптотических методов нелинейной механики в [2] построена математическая модель, позволяющая исследовать поступательные и угловые (наклонные) движения механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при различных видах кинематического возмущения и динамического (силового и моментного) возбуждения.

На основе этого метода получена дискретная модель механической системы «цилиндрический резервуар – жидкость со свободной поверхностью», позволяющая исследовать динамику совместного движения резервуара и жидкости при поступательном движении резервуара (по заданному закону или под действием вертикально приложенной силы). Эта модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно независимых параметров a_i – коэффициентов разложений в ряд возмущений свободной поверхности жидкости ξ по формам колебаний свободной поверхности ψ_i и ε_i – компоненты вектора перемещений центра невозмущенной свободной поверхности жидкости относительно некоторой неподвижной системы отсчета

$$\sum_i \ddot{a}_i\left\{\beta_{ri}^q+\sum_j a_j\gamma_{rij}^q+\sum_{i,j}a_ia_j\delta_{rijk}^q\right\}+\ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i\vec{B}_{ri}^2+\sum_{i,j}a_ia_j\vec{B}_{rij}^3+\sum_{i,j,k}a_ia_ja_k\vec{B}_{rijk}^4\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j(\gamma_{ijr}^q-2\gamma_{rij}^q)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k(\delta_{ijkr}^q-2\delta_{rijk}^q)-N_ra_r+ \tag{1}$$

$$+\dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i(\vec{B}_{ir}^2-\vec{B}_{ri}^2)+\sum_{i,j}\dot{a}_ia_j2(\vec{B}_{ijr}^3-\vec{B}_{rij}^3)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_ia_ja_k3(\vec{B}_{ijkr}^4-\vec{B}_{rijk}^4)\right\},$$

$$\rho\left\{\sum_i\ddot{a}_i\left[\vec{B}_i^1+\sum_j a_j\vec{B}_{ij}^2+\sum_{j,k}a_ja_k\vec{B}_{ijk}^3\right]\right\}+(M_T+M_F)\ddot{\vec{\varepsilon}}= \tag{2}$$

$$= \vec{F} - (M_T + M_F) g\vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\}.$$

Система (1) – (2) включает в себя $N+3$ уравнений (N – число рассматриваемых форм колебаний жидкости) и описывает динамику совместного движения резервуара и жидкости при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Уравнения (1) описывают динамику амплитуд форм колебаний свободной поверхности жидкости, а уравнения (2) – динамику резервуара, однако эти уравнения взаимозависимы и включают силы взаимодействия между компонентами механической системы. Принципиальным являться тот факт, что полученная математическая модель является моделью минимальной размерности, так как ее размерность равняется числу степеней свободы системы. Это свойство выгодно отличает полученную модель от других моделей, например, моделей, основанных на подходе Дж. Майлса [3].

Совокупность коэффициентов, входящих в уравнения (1) – (2), определяет свойства рассматриваемой механической системы и особенности проявления в ней внутренних линейных и нелинейных связей. Эти коэффициенты определяются через квадратуры от решения краевой задачи по определению форм колебаний свободной поверхности жидкости для произвольного числа форм колебаний жидкости. При этом коэффициенты β_{ir}^q, γ_{ijr}^q, δ_{ijkr}^q, N_r соответствуют случаю движения жидкости в неподвижном резервуаре, а коэффициенты $\vec{B}_r^1$, $\vec{B}_{ri}^2$, $\vec{B}_{rij}^3$, $\vec{B}_{rijk}^4$ отражают взаимосвязь движения жидкости и поступательного движения резервуара.

2. Обобщение задачи Фарадея для случая вертикального силового гармонического возбуждения.

Рассмотрим обобщение задачи Фарадея, когда к резервуару приложена вертикальная гармоническая сила, а резервуар может совершать только вертикальные колебания (рис. 1, *в*). Полученные результаты будем сравнивать с классической задачей Фарадея (рис. 1, *а*), когда вертикальное движение резервуара принимается заданным. Пусть резервуар радиусом R = 1м частично заполнен водой до глубины $H = R$, при этом соотношение масс принято $M_T = 1000 M_F$. Амплитуда начального возмущения свободной поверхности жидкости на стенке резервуара $\xi = 0,01R$. В классической задаче Фарадея резервуар совершает вертикальные колебания по заданному гармоническому закону $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ с амплитудой $H_z = 0,01R$ и внешней частотой $p = 2\omega_1$, где $\omega_1 \approx 4,14$ Гц – частота колебаний свободной поверхности жидкости при выбранных параметрах системы. В обобщенной задаче Фарадея резервуар совершает вертикальные колебания под действием силы $F_z = -(M_T + M_F) H_z p^2 \cos pt$, чтобы обеспечить такое же ускорение резервуару, как и в классической задаче.

На рис. 2 представлен график возмущения амплитуды свободной поверхности жидкости на стенке резервуара под действием вертикальной периодической силы, а на рис. 3 – ее частотный спектр, полученный с применением быстрого преобразова-

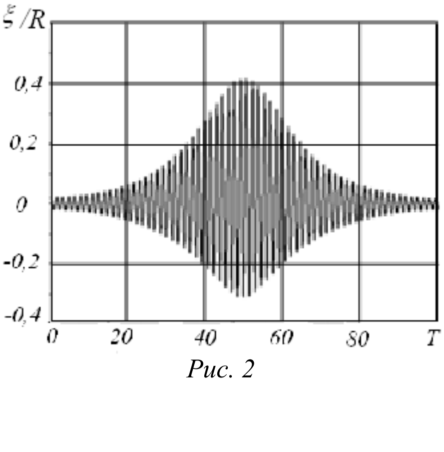

Рис. 2

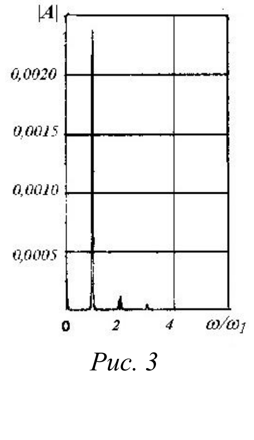

Рис. 3

ния Фурье. Как видно из рис. 2, возмущения свободной поверхности жидкости выходят на режим параметрического резонанса (амплитуда колебаний возрастает в 40 раз), хотя и вызваны динамическим, а не кинематическим внешним воздействием. Наличие параметрического механизма подтверждается и характерным для параметрического резонанса частотным спектром (рис. 3) – доминирующей частотой колебаний свободной поверхности жидкости является половина частоты внешнего воздействия $\omega \approx p/2 = 2\omega_1/2 = \omega_1$. Близость значений частоты колебаний свободной поверхности ω_1 и частоты параметрического воздействия объясняет наличие в колебаниях свободной поверхности жидкости эффекта сильной амплитудной модуляции. Наличие этого же эффекта приводит к явлению антирезонанса (рис. 2) – амплитуда возмущения свободной поверхности на некотором интервале времени падает до уровня $\xi = (0,01, ..., 0,03)R$, т.е. значение амплитуды падает на порядок (примерно в 10 – 12 раз) и сохраняется в течение трех периодов колебаний первой антисимметричной формы. Как показывают результаты вычислительных экспериментов, для тяжелого резервуара колебания свободной поверхности жидкости $\xi(t)$ и резервуара $\varepsilon_z(t)$ в классической (при заданном законе движения резервуара) и обобщенной задаче Фарадея (при силовом возбуждении движения) практически полностью совпадают. Причиной такого совпадения является малая относительная масса жидкости, силовой отклик которой в обоих случаях не влияет на колебания резервуара и поэтому двухстороннее взаимодействие между резервуаром и жидкостью практически отсутствует.

Рассмотрим аналогичную задачу для случая, когда соотношение масс резервуара и жидкости составляет $M_T = 0,001M_F$. На рис. 4 и 5 представлены графики возмущения свободной поверхности жидкости в классической и обобщенной задачах Фарадея, соответственно. Как видно из графиков, в легком резервуаре в обобщенной задаче подвижность жидкости возрастает, поэтому амплитуда возмущения $\xi(t)$ свободной

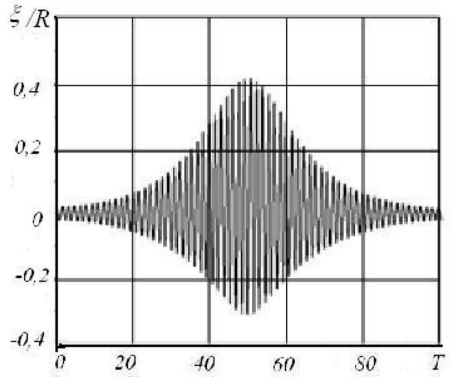

Рис. 4

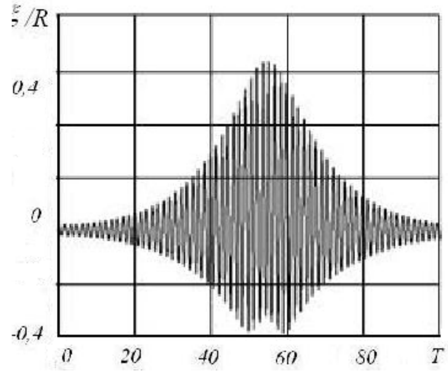

Рис. 5

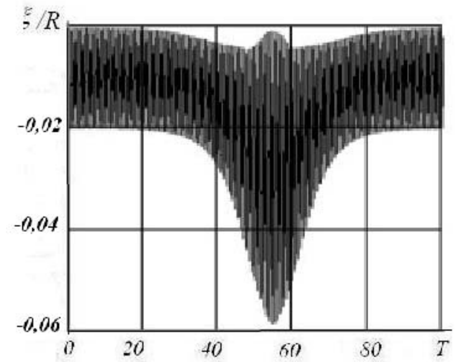

Рис. 6

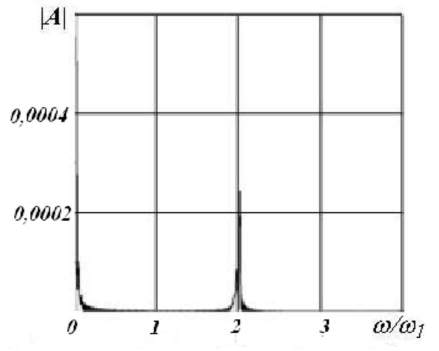

Рис. 7

поверхности увеличивается, при этом структура частотного спектра аналогична случаю тяжелого резервуара. На рис. 6 представлен график перемещения резервуара под действием вертикальной гармонической силы. Как видно из графика, из-за малой массы резервуара силовой отклик жидкости на стенки резервуара существенно влияет на закон его движения. В отличие от классической задачи Фарадея, легкий резервуар под действием вертикальной силы движется по оси *OZ* не по косинусоиде, а по более сложному закону. Это подтверждает и частотный спектр вертикального перемещения резервуара (рис. 7), в котором присутствуют две очень близкие частоты.

Если в классической задаче Фарадея выбрать соответствующую частоту p и амплитуду H_z заданного закона движения из области неустойчивости, тогда в результате колебания свободной поверхности жидкости выйдут на режим параметрического резонанса. В обобщенной задаче Фарадея при действии на систему вертикальной периодической силы по закону $F_z = -(M_T + M_F)H_z p^2 \cos pt$ с такими же значениями параметров p и H_z к выходу на режим резонанса (или хотя бы на нелинейный режим колебаний) не приводит.

3. Обобщение задачи Фарадея при вертикальном силовом гармоническом возбуждении с возможностью поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим обобщение задачи Фарадея, когда к резервуару приложена вертикальная гармоническая сила, а резервуар имеет дополнительную степень свободы – возможность поступательного движения в горизонтальной плоскости за счет совместного характера движения системы из-за колебаний свободной поверхности жидкости (рис. 1, *г*). Полученные результаты будем сравнивать с обобщенной задачей Фарадея (рис. 1, *б*), когда вертикальное движение резервуара задано, а сам резервуар имеет также дополнительную степень свободы. Как показано в работе [1], для случая рис. 1, *б* области неустойчивости смещены в сторону увеличения значений частоты внешнего кинематического воздействия $p = 2\omega_e$, где ω_e – собственная частота системы. Это происходит потому, что при наличии дополнительной степени свободы собственная частота системы ω_e зависит от соотношения масс резервуара и жидкости (рис. 8), и, таким образом, для более легких резервуаров частота внешнего параметрического воздействия повышается (рис. 9, где 1 – $M_T = 100M_F$, 2 – $M_T = 10M_F$, 3 – $M_T = M_F$, 4 – $M_T = 0{,}1M_F$, 5 – $M_T = 0{,}01M_F$).

Для исследования особенностей механизма выхода системы на режим параметрического резонанса примем параметры резервуара как и в п. 3; соотношение масс резервуара и жидкости примем $M_T = 0{,}1M_F$. Как видно из рис. 9, при таком соотноше-

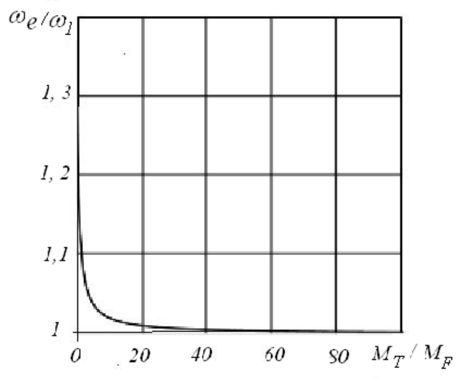

Рис. 8

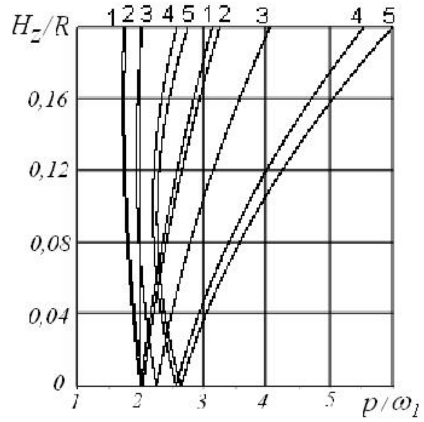

Рис. 9

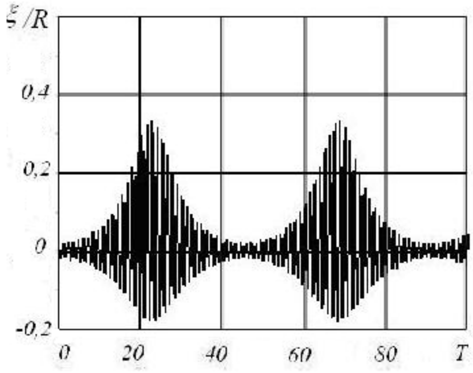

Рис. 10

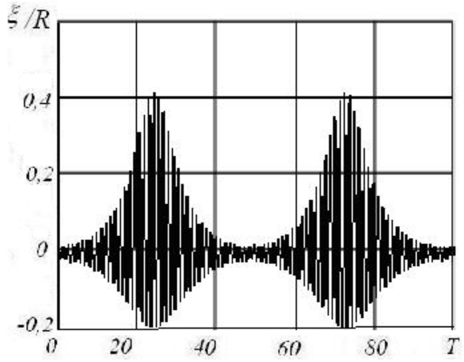

Рис. 11

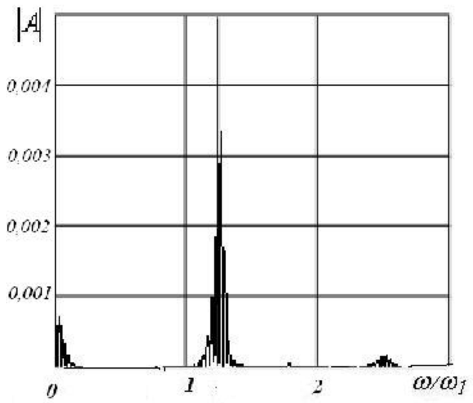

Рис. 12

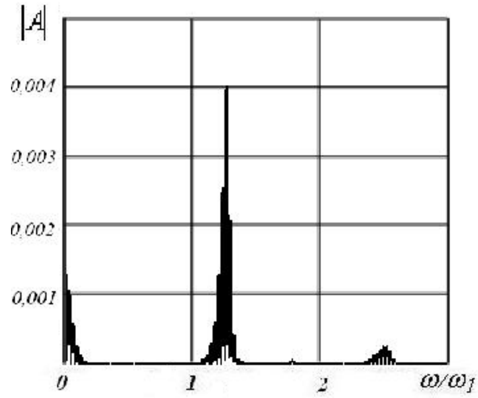

Рис. 13

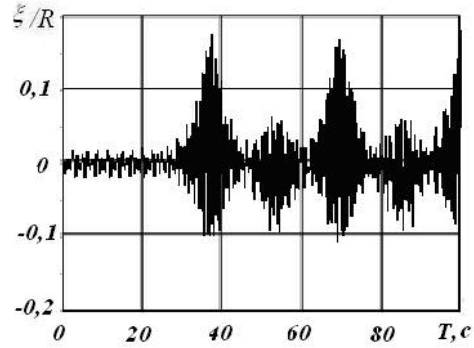

Рис. 14

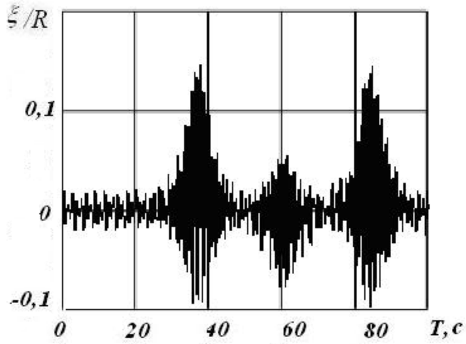

Рис. 15

нии масс и амплитуде $H_z = 0{,}01R$ частота внешнего воздействия должна быть в пределах $2{,}494\omega_1 \le p \le 2{,}64\omega_1$, чтобы вывести систему в режим параметрического резонанса, выбрано значение $p = 2{,}55\omega_1$. На рис. 10 и 11 показаны амплитуды возмущения свободной поверхности жидкости при кинематическом и динамическом возбуждении движения, а на рис. 12 и 13 – частотный спектр амплитуды возмущения, соответственно. Как видно из рис. 10 и 11, в обоих случаях наблюдается выход системы на режим параметрического резонанса при наличии глубокой амплитудной модуляции, различаются только максимумы амплитуд. Спектры колебаний свободной поверхности жидкости для обоих обобщений также подобны и характеризуются присутствием доминирования основного тона и близких к нему комбинационных частот.

Рассмотрим обобщенную задачу Фарадея, когда частота внешнего возбуждения равна $p = 1,9\omega_1$, т.е. расположена за границей области неустойчивости в дорезонансной зоне. На рис. 14 и 15 показаны амплитуды возмущения свободной поверхности жидкости, а на рис. 16 и 17 – частотные спектры. Как видно из графиков изменения амплитуды, в обоих случаях наблюдается выход системы на режим резонанса, причем в случае кинематического воздействия эти амплитуды больше. Анализ частотных спектров на рис. 16 и 17 показывает, что обоих случаях в спектре присутствуют гармоники как в окрестности частоты $p \approx \omega_1$, так и в окрестности частоты $p \approx 1,9\omega_1$. Это означает, что в системе динамические процессы развиваются как совокупность параметрического резонанса и режима вынужденных колебаний, причем режим вынужденных колебаний является определяющим (гармоники на частотах $p \approx 1,9\omega_1$ являются доминирующими). Аналогичная ситуация наблюдается и при возбуждении системы на дорезонансной частоте.

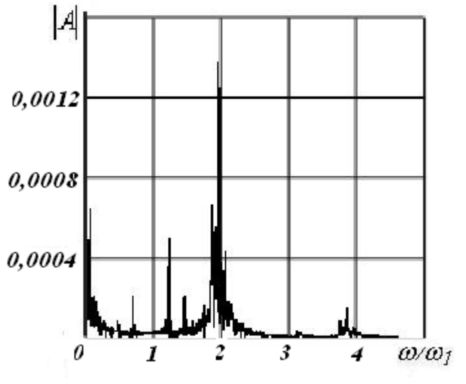

Рис. 16

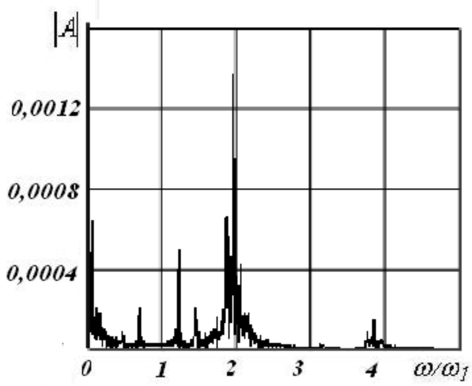

Рис. 17

Механизм вынужденных колебаний выводит систему «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» на режим резонанса, даже когда частота внешнего кинематического возбуждения не является резонансной. Т.е. в отличие от классической задачи Фарадея наличие дополнительной степени свободы с помощью вертикального кинематического возбуждения позволяет вывести колебания свободной поверхности жидкости в нелинейный режим на любой частоте. Для обобщенной задачи с вертикальной гармонической силой вообще невозможно построить области устойчивости и неустойчивости. Тем не менее, наличие дополнительной степени свободы также позволяет вывести систему на нелинейный режим вследствие действия механизма вынужденных колебаний.

Заключение.

1. В работе исследована нелинейная динамика механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» в обобщенной задаче Фарадея. Обобщение результатов классической задачи Фарадея проведено по двум направлениям: во-первых, в систему введена дополнительная степень свободы – возможность поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости за счет колебаний свободной поверхности жидкости, во-вторых, резервуар может совершать вертикальные гармонические колебания как по заданному закону (как в классической задаче Фарадея), так и под действием вертикальной гармонической силы.

2. Показано, что в случае, когда резервуар может совершать только вертикальные колебания, действие внешней силы может ввести систему в режим параметрического резонанса только на изолированных частотах, кратных удвоенной частоте колебаний свободной поверхности жидкости (в отличие от классической задачи Фарадея, где существуют целые области неустойчивости).

3. Внесение в систему дополнительной степени свободы – возможности поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости – приводит к повышению частоты параметрического резонанса, причем она тем выше, чем меньше масса резервуара по отношению к массе жидкости. В этом случае динамические процессы в системе развиваются как совокупность параметрического резонанса и вынужденных колебаний, так что на любой внешней частоте возможен выход системы на нелинейный режим (существенное увеличение амплитуды колебаний). Причем механизм этот действует как в случае кинематического, так и в случае силового вертикального возбуждения движения. Для случая учета совместного движения резервуара и жидкости и при наличии возможности движения резервуара в поперечном направлении показано значительное (до 1,7 раз) изменение частот проявления параметрического резонанса и более раннее и существенное проявление нелинейных эффектов взаимодействия по сравнению с классическим вариантом задачи Фарадея.

Р Е З Ю М Е . Досліджено нелінійну динаміку механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для узагальненої задачі Фарадея. Узагальнення результатів класичної задачі Фарадея проведено в двох напрямках. По-перше, системі надано додатковий ступінь вільності: можливість поступального руху системи в горизонтальній площині; по-друге, резервуар може виконувати вертикальні гармонічні коливання як за заданим законом (як в класичній задачі Фарадея), так і під дією вертикальної сили. На основі проведеного дослідження показано, що при наявності додаткового ступеня вільності динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність механізмів параметричного резонансу і вимушених коливань. В цьому випадку система може здійснювати нелінійні коливання як за рахунок кінематичних збурень, так і за рахунок динамічного збудження (сили).

1. *Константінов О.В., Лимарченко О.С.* Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною // Фіз.-матем. моделювання та інформац. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 76 – 85.
2. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В*. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
3. *Ibrahim R.A*. Liquid Sloshing Dynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
4. *Ibrahim R*. Recent advances in physics of fluid paranetric sloshing and related problems // J. of Fluid Engineering. – September 2015. – **135**. – P. 090801-1 – 090801-52.
5. *Ikeda T.* Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid // J. Sound and Vibr. – 2007. – **302**, N 4 – 5. – P. 657 – 682.
6. *Ikeda T., Murakami Sh.* Nonlinear Vibrations of Elastic Structures Containing a Cylindrical Liquid Tank under Vertical Excitation // J. Syst. Design and Dynam. – 2008. – **2**, N 3. – P. 822 – 836.
7. *Ikeda T., Murakami Sh., Ushio Sh.* Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Containing Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks // J. Syst. Design and Dynam. – 2009. – **3**, N 1. – P. 120 – 134.
8. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2015. – **50**, N 3. – P. 353 – 364.
9. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
10. *Limarchenko O.S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscuillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // Укр. матем. журн. – 2007. – **59**, N 1. – P. 44 – 70.
11. *Limarchenko O.S., Semenova I.Yu.* Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 8. – P. 864 – 868.
12. *Limarchenko O.S., Tkachenko R.V.* Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 289 – 294.

Поступила 28.12.2015 Утверждена в печать 29.11.16