

А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина

## БИФУРКАЦИИ И СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A problem on coupled generators having the property of multistability - the generator with exponential inertial nonlinearity and Chou generator – is considered. Using the characteristic equation of system in variations the possibility of appearance of new vibrational regimes under synchronization is established.

**Key words:** nonlinear system, bifurcation, synchronization, periodic orbit, strange attractor.

### Введение.

В работе на примере двух связанных генераторов рассматривается возможность возникновения новых движений при синхронизации двух одинаковых связанных трехмерных систем. Математические модели и блок-схемы генераторов, создающих электрические колебания, приведены в работах [1, 2, 5, 7]. Прежде проводится анализ математической модели одного генератора. Приводятся предположения, утверждение и теорема о существовании аттракторов. Устанавливается качество движения: регулярность, хаотичность, мультистабильность. Изучается динамика двух идентичных генераторов, которые обладают мультистабильностью. Синхронизация двух связанных генераторов, которые генерируют в одиночном состоянии хаос, является процессом установления регулярных колебаний в связке. Выявляется причина возникновения новых регулярных колебаний в связанных генераторах. Качество аттрактора (регулярность, хаотичность, мультистабильность) связано с бифуркационным процессом. Все эти вопросы связаны с полем, которое порождает система в вариациях. Определенное качество системы в вариациях указывает на возможность возникновения новых движений в связке генераторов.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^3$ ,  $F(x)$  – гладкая векторная функция, определенная на некотором подмножестве пространства  $R^n$ .

Введем в рассмотрение малое отклонение  $\delta x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в окрестности частного решения  $\bar{x}_i(t)$  уравнений (1)  $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Примем  $\delta x_i$  в качестве новых координат. Для линейной системы,  $d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x$ ,  $\delta x \in R^3$ , где  $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x|_{x=\bar{x}}$ , соответствующей системе (1), которая является *системой уравнений в вариациях* [13, 14], составим характеристическое уравнение  $f(\lambda, \bar{x}) = 0$  матрицы  $A(\bar{x})$ . С помощью характеристического уравнения системы в вариациях можно получить характеристические показатели (ХП) любой точки 3-мерного пространства системы (1), включая особые точки.

Введем характеристические показатели нетривиальных решений  $\Lambda_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \times [t^{-1} \ln \|x_j(t)\|]$  ( $j=1, 2, 3$ ), где  $x_j(t) - j$ -е фундаментальное решение системы,  $\|0\|$  – норма. Числа  $\Lambda_j$  называются обобщенными характеристическими показателями системы (1). Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений  $\delta x$  вблизи частного решения  $\bar{x}(t)$  нелинейной системы (1), совокупность  $\Lambda_j$  называют характеристическими показателями Ляпунова (ХПЛ) частного решения  $\bar{x}(t)$ . Для вычисления ХПЛ сложных движений применяются высокоточные численные методы [8]. Более наглядным методом анализа качества траекторий в многомерных системах может быть подход, связанный с бифуркационным процессом. Предположим, что система порождает аттрактор. Утверждение о существовании аттрактора должно содержать информацию о том, что круговая траектория находится в окрестности нуля и не уходит на  $\infty$ . Пусть характеристическое уравнение трехмерной системы в вариациях  $f(\lambda, \bar{x}) = 0$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  зависит лишь от одной переменной  $\bar{x}_1$ ; если имеет место условие

$$f(\lambda, \bar{x}_1) = f(\lambda, -\bar{x}_1), \quad (2)$$

то поле системы  $d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x$  обладает симметрией. Приведем условие кососимметрии для траектории двухмерной системы вида (1), которое потребуется далее,

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2). \quad (3)$$

О трехмерной системе вида (1) сделаем следующие предположения.

**Предположение 1.** Система (1) имеет одну особую точку седлофокус с характеристическими показателями  $Re\lambda_1 > 0, Re\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$  с положительной седловой величиной  $\sigma = Re\lambda_1 + Re\lambda_2 + \lambda_3 > 0$ .

**Предположение 2.** На одной координатной плоскости система (1) относительно особой точки имеет круговую траекторию, которой соответствуют возрастающие колебания (обозначим эту плоскость  $xu$ ). На другой координатной плоскости отображаются затухающие колебания, так что затухание преобладает над возрастанием в системе (1) (обозначим эту плоскость  $xz$ ). На третьей (плоскость  $uz$ ) – переменные не связаны между собой и не вызывают неустойчивости. Пусть система в вариациях имеет характеристическое уравнение, в котором коэффициенты зависят от частных решений  $\bar{x}, \bar{z}$ , так что на плоскости  $xz$  просматривается полная картина изменения качества решений.

**Утверждение 1.** Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2. Тогда в окрестности особой точки (седлофокуса) образуется аттрактор.

Вопросы существования аттракторов исследованы в многих работах [8, 12]. Предположения 1, 2 устанавливают существование круговой траектории. Для регулярного аттрактора это может быть замкнутая кривая, которая обладает какой-либо симметрией. Если нет симметрии и аттрактор асимметричен, то траектория замыкается вследствие повторяемости бифуркационных процессов, которые порождают притяжение и регулярность.

Известно, что мультистабильность зависит от качества векторного поля [3, 10]. Так, для некоторых значений параметров генератор колебаний порождает (в зависимости от начальных условий) регулярный и странный аттракторы.

Постановка задачи изучения процесса бифуркации и синхронизации двух связанных генераторов включает в себя следующие пункты.

1. Установление существования аттрактора. Утверждение 1 может быть первым шагом для установления существования аттрактора относительно одной особой точки.

2. Существование регулярного аттрактора связано с рассмотрением симметрии или установлением притягивающего характера на основе анализа ХП точек круговой траектории.

3. Если имеет место Утверждение 1, но круговая траектория не содержит повторяемости бифуркационных процессов и не является орбитально устойчивой, то имеет место хаотический аттрактор. Неповторяемость бифуркационных процессов связана с неоднородностью поля системы в вариациях.

4. Для двух идентичных генераторов строится характеристическое уравнение системы в вариациях с учетом вида связи между генераторами.

В данной работе рассмотрен бифуркационный процесс на основе изучения векторного поля системы в вариациях. Размерность поля определяется характеристическим уравнением системы в вариациях. В рамках Утверждения 1 (Предположение 2) это двумерное поле. В процессе решения задач вычисляются ХП в точках определенной области и на кривой.

## 2. Теорема о существовании регулярного аттрактора.

Рассмотрим случай существования трех особых точек.

**Предположение 3.** Система (1) имеет три особые точки: точка  $O(0, 0, 0)$  – седлофокус с седловой величиной  $\sigma_O = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 \geq 0$ ;  $|\text{Re}\lambda_{1,2}| < 1$ ;  $\lambda_3 > 0$ ; седлофокусные  $A(\sqrt{a/b}, 0, -\sqrt{a/b})$ ,  $B(-\sqrt{a/b}, 0, \sqrt{a/b})$ ;  $\sigma_{A,B} = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$ ;  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$ ;  $\lambda_3 < 0$  (здесь  $a, b$  – положительные параметры). Система (1) имеет управляющие параметры  $(\alpha, \beta)$ , которыми можно регулировать топологическую характеристику особых точек. Характеристическое уравнение системы в вариациях удовлетворяет условию (2). Симметричное поле точек характеристического уравнения трехмерной системы в вариациях, которое зависит от одной переменной  $x_1$ , обладает симметрией относительно частного решения  $\bar{x}_1$ .

**Предположение 4.** На одной из координатных плоскостей система (1) имеет круговую диссипативную кривую (траекторию с периодической составляющей и диссипацией). На двух других плоскостях имеют место особые устойчивые ненулевые точки.

**Предположение 5.** Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям кососимметрии (3) в трех координатных плоскостях:  $Ox_1x_2$ ,  $Ox_1x_3$ ,  $Ox_2x_3$ .

**Теорема.** Пусть для дифференциальной системы (1) справедливы Предположения 3 – 5. Тогда в окрестности особых трех точек  $O, A, B$  существует замкнутая интегральная кривая, имеющая кососимметрию в проекциях на три координатные плоскости.

**Доказательство.** Для возникновения предельного цикла круговая траектория должна уходить от окрестности нуля. Это происходит при наличии устойчивых особых точек на координатных плоскостях (Предположение 4). Выполнение условий (3) для двумерных систем в трех координатных плоскостях вызывают не только кососимметрию проекций, но и замыкание трехмерной траектории (Предположение 5). При определенных значениях параметров в системе (1) существует замкнутая траектория относительно трех особых точек. Особые седлоузловые точки имеют определенные ХП, указанные в Предположении 3. Таким образом, устанавливается существование регулярного аттрактора. Попадание траектории на аттрактор происходит при определенных начальных условиях.

Управляющие параметры, которые входят в уравнения движения системы (1), влияют на орбитальную устойчивость траектории относительно особых точек  $A, B$ . Доказательство существования аттракторов относительно точек  $A$  и  $B$  приведено ниже. Поскольку речь идет о мультистабильности системы, укажем некоторые варианты режимов движения, вызванных определенными значениями управляющих параметров. В рамках Предположений 3 – 5 особые точки  $A$  и  $B$  могут порождать:

1) два регулярных аттрактора (две замкнутые несимметричные траектории относительно точек  $A$  и  $B$ );

2) хаотические траектории без перехода из области относительно одной особой точки в область относительно другой особой точки;

3) хаотические траектории с переходом из области в область.

Отметим один случай, который не охватывается этой Теоремой. А именно, если особая точка  $O(0,0,0)$  – седлофокус с седловой величиной  $\sigma_O = 2Re\lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$ ;  $|Re\lambda_{1,2}| < 1$ ;  $\lambda_3 > 0$ , то Предположение 3 не выполняется и Теорема не имеет места.

### 3. Бифуркации на траектории генератора с экспоненциальной инерционной нелинейностью.

Рассмотрим процесс бифуркации в задаче динамики одиночного генератора периодических колебаний (см. также [9 – 11]). Модель генератора с экспоненциальной инерционной нелинейностью приведена в [1]:

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - e^x + 1). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение малое отклонение в окрестности решений системы (4)  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):  $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Рассмотрим  $\delta x_i$  в качестве новых координат. Система (4) в координатах  $\delta x_i$  приобретает вид

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x).$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m + e^{\bar{x}}\bar{x}) + 1) + b = 0 \quad (5)$$

имеет корни в особой точке  $O(0, 0, 0)$ ;  $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ . Для значений параметров  $0 < m < 2$ ,  $b = 0,2$  корни  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексные.

Обратимся к Утверждению 1 о существовании аттрактора. Рассмотрим плоскость  $xu$ . На плоскости существует круговая траектория, определяемая колебательным контуром  $\ddot{x} - m\dot{x} + x = 0$  с характеристическими показателями  $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{m/2 - 1}$ .

На плоскости  $uz$  переменные не связаны между собой.

На плоскости  $xz$  имеют место уравнения  $\dot{x} = mx - xz$ ,  $\dot{z} = -b(z - e^x + 1)$ , которые имеют особую точку  $A$  с координатами  $x = x_0$ ,  $z = m$ , где  $x_0$  определяется из выражения  $e^{x_0} = m + 1$ .

Свяжем с точкой  $A$  систему координат  $A\chi\zeta$  и составим уравнения в вариациях:  $\delta\dot{\chi} = -x_0\delta\zeta - \bar{\chi}\delta\zeta - \bar{\zeta}\delta\chi$ ,  $\delta\dot{\zeta} = -b(\delta\zeta - e^{\bar{x}}\delta\chi)$ . Корни этого характеристического уравнения имеют вид  $\lambda_{1,2} = -\frac{b + \bar{\zeta}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b + \bar{\zeta})^2 - 4be^{\bar{x}}(x_0 + \bar{\chi})}$ . Колебательный контур генератора порождает круговую траекторию, которая попадает либо в плоскость  $xu$ , либо в плоскость  $xz$ . В первом случае движение не ограничивается сверху. Во втором случае в окрестности точки  $A$  имеет место притяжение. Если величина  $b + \bar{\zeta}$  при  $\bar{\zeta} > 0$  удовлетворяет неравенству  $\bar{\zeta} > m/2$ , тогда можно утверждать, что диссипативная составляющая на плоскости  $xz$  не позволит уходить траектории на бесконечность. Таким образом, решения системы (4), согласно Утверждению 1, ограничены сверху и траектория не уходит на  $\infty$ .

Качественный анализ ХП точек на плоскости  $xz$  показывает, что аттрактор не имеет симметрии. Область, в которой ХП точек имеют периодическую составляющую, увеличивается с увеличением параметра  $m$ . Эта область сильно несимметрична относительно оси  $Oz$ . В работе [10] доказано существование в системе (4) регуляр-

ного аттрактора. При  $m < 1$  существует один предельный цикл. Система (4) при параметрах  $(m, b) = (0,7; 0,2)$  имеет аттрактор, согласно Утверждению 1. На плоскости  $xz$  (рис. 1, а) приведены аттрактор и сепаратрисы. Выбор плоскости  $xz$  связан с тем, что в характеристическом уравнении (5) содержатся частные решения  $\bar{x}, \bar{z}$ . Плоскость  $xz$  содержит область точек с периодической составляющей в окрестности особой точки  $O$ . Пунктирной линией показаны границы этой области в окрестности особой точки  $(0, 0, 0)$ .

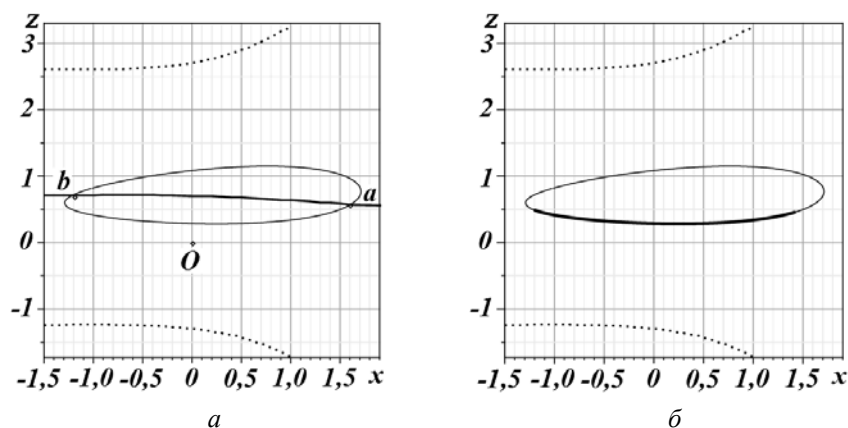


Рис. 1

За пределами границы точки имеют действительные корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Плоскость  $xz$  разделена жирной линией. Ниже жирной линии –  $Re\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ . Выше жирной сплошной линии –  $Re\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 < 0$ . На жирной сплошной линии  $Re\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 < 0$ . На рис. 2, б жирной линией на траектории аттрактора обозначены точки, в которых седловые величины  $\sigma_j = Re\lambda_{1j} + Re\lambda_{2j} + \lambda_{3j} > 0$ . Для рассматриваемой траектории имеет место Утверждение 1, которое устанавливает существование аттрактора.

С увеличением параметра  $m$  увеличивается область, в которой ХП точек имеют периодическую составляющую. Увеличиваются также амплитуда колебаний. При значениях параметров  $(m, b) = (1; 0,2)$  сосуществуют предельный цикл и странный аттрактор [10]. На рис. 2, а тонкими линиями нанесена граница области, в которой ХП точек имеют периодическую составляющую при параметрах  $(m, b) = (1; 0,2)$ . При несимметричной области в окрестности нуля образуется странный аттрактор. При определенных начальных условиях траектория может попасть в область, которая содержит узловые точки ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ).

Рассмотрим процесс появления удвоения периода, которое переходит в хаос. Траектория попадает в область с узловыми точками ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ). В колебательной системе период выступает как элемент самоорганизации. Изображающая точка замедляет движение из-за области узловых точек. Вначале появляется удвоение периода. Развитие процесса связано с уменьшением периодической составляющей движения. Дальнейшее уменьшение периодической составляющей приводит к кратному увеличению периода. Заканчивается процесс хаосом, который можно рассматривать как нерегулярность бифуркационных процессов на траектории колебательного движения.

При дальнейшем увеличении параметра  $m$  происходит исчезновение мультистабильности и остается лишь один предельный цикл. Исчезновение мультистабильности наблюдается, например, при  $(m, b) = (1,4; 0,2)$ . На рис. 2, а граница области, в которой ХП имеют периодическую составляющую, нанесена пунктиром. Видно увели-

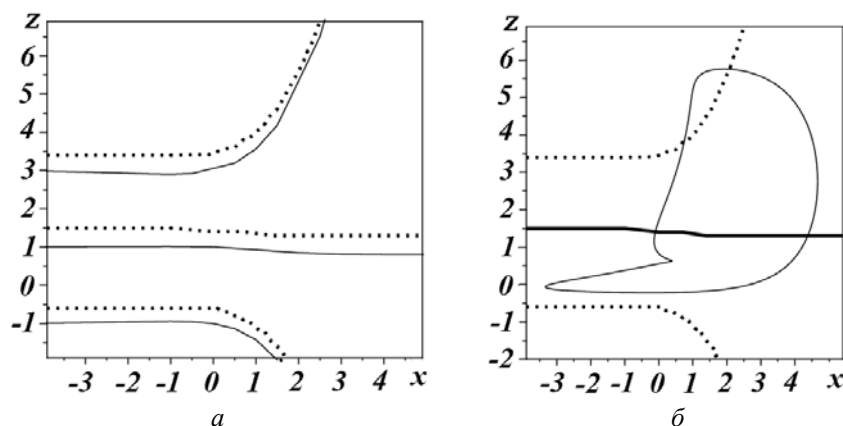


Рис. 2

чение в окрестности особой точки  $(0, 0, 0)$  области с точками, в которых  $Re\lambda_{1,2} < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  ( $(m, b) = (1, 4; 0, 2)$ ), которое исключает мультистабильность.

На рис. 2, б приведено сечение единственного предельного цикла и граница области, которая содержит точки, имеющие периодическую составляющую. На жирной кривой происходит смена знака действительных значений комплексно-сопряженных ХП точек области. На пунктирной линии  $-Re\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 < 0$ .

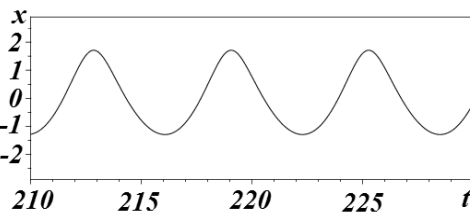
Заметим, что в случае выхода траектории из области точек, которые имеют периодическую составляющую, изображающая точка теряет скорость перемещения в трехмерном пространстве. Скорость теряется вблизи границы области точек с периодической составляющей и узловых точек, где  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$  (рис. 2, б). Это вызывает увеличение периода колебаний. Рассмотрим сравнительный анализ увеличения периода в данном генераторе. На рис. 3, а, б, в приведены временные реализации при значениях параметров а –  $m = 0,7$ ; б –  $m = 1,4$ . Например, увеличение периода (рис. 3, б) вызвано попаданием траектории в область неперiodических движений (рис. 2, б).

#### 4. Динамика генератора Чуа.

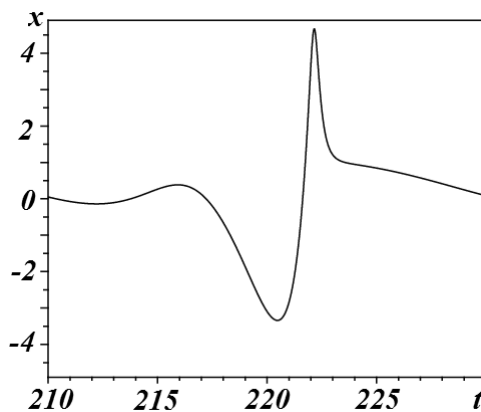
Динамика цепи Чуа нашла отражение во многих работах [2, 3, 5 – 7, 13, 14]. Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений Чуа

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z; \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y, \quad (6)$$

где  $\alpha, \beta$  – положительные управляющие параметры;  $a, b$  принимают значения  $a = 1/6, b = 1/16$ . Остановимся на мультистабильности и кратном увеличении периода предельного цикла системы (6). Система (6) имеет три состояния равновесия: особая



а



б

Рис. 3

точка  $O(0, 0, 0)$ , особые точки  $A(x_A = \sqrt{a/b}, y_A = 0, z_A = -\sqrt{a/b})$ ,  $B(x_B = -\sqrt{a/b}, y_B = 0, z_B = \sqrt{a/b})$ . Введем малые отклонения  $\delta x, \delta y, \delta z$  от частных решений  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  системы (6) и составим уравнения в вариациях в соответствии с уравнениями (6)

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y); \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y + \delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y.$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) = 0. \quad (7)$$

Бифуркационный процесс в системе (6) связан с изменением координаты  $x$ , т.к. характеристическое уравнение (7) зависит лишь от частного решения  $\bar{x}$ . Характеристические показатели точки  $O$  определяются на основе уравнения  $\lambda^3 + \lambda^2(1 - \alpha a) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a)) - \alpha\beta a = 0$ .

Рассмотрим движение относительно особой точки  $O$ . Для определенности зададим такие значения управляющих параметров:

$$\alpha = 6 + \delta; \quad \beta = 9, \quad (8)$$

где  $\delta \geq 0$ ; если  $\delta \neq 0$ , то  $|\delta| < 1$ . При заданных значениях параметров точка  $O$  – седло-фокус с седловой величиной  $\sigma_O = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 \geq 0$ ;  $|\text{Re}\lambda_{1,2}| < 1$ . Пространственная кривая системы (6) имеет на плоскости  $xu$  кривую, заданную уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad (9)$$

Особые точки системы (9) следующие:  $O_1(0, 0)$ ,  $E(\sqrt{(a+1)/b}, \sqrt{(a+1)/b})$ ,  $F(-\sqrt{(a+1)/b}, -\sqrt{(a+1)/b})$ . Запишем систему (9) в вариациях

$$d\delta x / dt = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y); \quad d\delta y / dt = \delta x - \delta y,$$

которой соответствует характеристическое уравнение

$$(\lambda + 1)(\lambda - \alpha(a - 3b\bar{x}^2)) - \alpha = 0. \quad (10)$$

Характеристические показатели особой точки  $O_1$  вычисляются согласно выражения

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 + \alpha a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 + \alpha a}{2}\right)^2 + \alpha(a + 1)}.$$

Точка  $O_1$  является седлом. Подставим в характеристическое уравнение (10) координату  $x$  точек  $E$ ,  $F$ . Характеристические показатели точек  $E$ ,  $F$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(1 + \alpha(2a + 3))}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + \alpha(2a + 3))^2}{4} - 2\alpha(a + 1)}.$$

Для параметров (8)  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . На плоскости  $yz$  изображающая точка движется согласно уравнениям

$$\frac{dy}{dt} = -y + z; \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (11)$$

Система (11) описывает линейный диссипативный осциллятор  $\ddot{z} + \dot{z} + \beta z = 0$ . Круговая траектория системы (11) стремится к нулю, имея тенденцию к косоугольной симметрии, т.к.

уравнения (11) удовлетворяют условиям (3). Особая точка  $O_2$  системы (11) – устойчивый фокус. На плоскости  $xz$  изображающая точка движется согласно уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3); \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad (12)$$

Особая точка системы (12)  $O_3(0,0)$  имеет характеристические показатели  $\lambda_1 = \alpha a$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Особые точки  $G, H$  ( $x = \pm\sqrt{a/b}, z = 0$ ) имеют характеристические показатели  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Уравнения удовлетворяют условиям (3).

Начальные возмущения порождают замкнутую кривую относительно точки  $O$  в системе (6), если начальные условия выбрать согласно оценок:

$$|x(0)| > |x_A|; |y(0)| \geq 0; |z(0)| > |z_A|. \quad (13)$$

Такой выбор исключает влияние особых точек  $A, B$ , которые так же, как и особая точка  $O$ , организуют определенное движение системы (6). Поиск замкнутой траектории относительно точки  $O$  связан с условиями, которые наложены на управляющие параметры  $\alpha, \beta$ .

Таким образом, в системе (6), имеет место круговое движение в плоскости  $yz$ . Траектория обладает тенденцией к кососимметрии в плоскостях  $xu, uz, xz$ ; притягивается к кососимметрично расположенным точкам  $E, F$  на плоскости  $xu$ , притягивается к точкам  $G, H$ , которые расположены симметрично в плоскости  $xz$ , отталкивается от двумерных точек  $O_1, O_3$ . Траектория замыкается в силу Теоремы, если исключено влияние особых точек  $A, B$  системы (6). На рис. 4, а, б, в при значениях параметров (8) ( $\delta = 0,1$ ) приведены портреты трехмерной кривой на плоскостях  $xz, xu, yz$ .

Так как особые точки  $A, B$  кососимметричны, то векторное поле на плоскости  $xz$  имеет ось симметрии, которая проходит по оси  $Oz$ . Векторное поле не может быть кососимметричным, так как изменяется лишь в зависимости от одной координаты –  $x$ . С помощью уравнения (7) можно определить ХП особых точек  $A, B$ . При значениях (8) управляющих параметров седлофокусные точки  $A, B$  имеют  $Re\lambda_{1,2} > 0$ ;  $\lambda_3 < 0$ ;  $\sigma_{A,B} = 2Re\lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$ .

Введем в точке  $A$  систему координат  $Auvw$  и составим уравнения движения в новых координатах

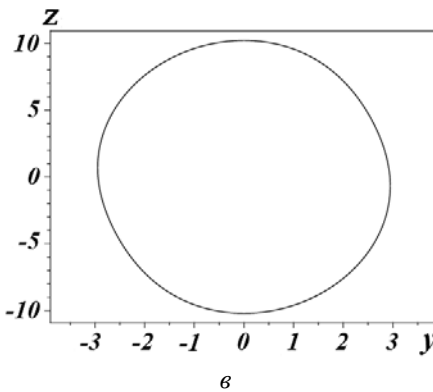
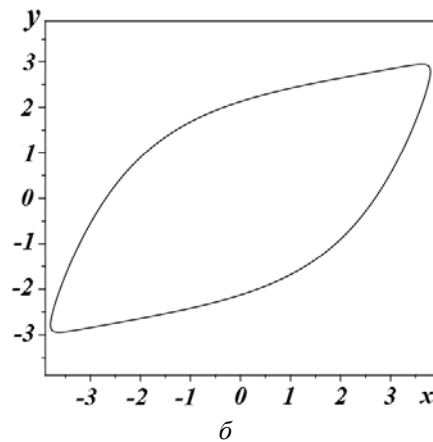
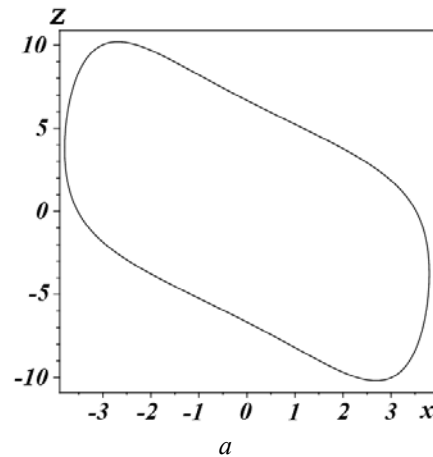


Рис. 4



$$\frac{dv}{dt} = \alpha(-2av - bv^2(3\sqrt{a/b} + v) + y); \quad \frac{dy}{dt} = v - y + w; \quad \frac{dw}{dt} = -\beta y, \quad (14)$$

где  $v = x - \sqrt{a/b}, w = z + \sqrt{a/b}$ . Введем в точке  $B$  систему координат  $Bsyu$  и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{ds}{dt} = \alpha(-2as - bs^2(-3\sqrt{a/b} + s) + y); \quad \frac{dy}{dt} = s - y + u; \quad \frac{du}{dt} = -\beta y, \quad (15)$$

где  $s = x + \sqrt{a/b}, u = z - \sqrt{a/b}$ .

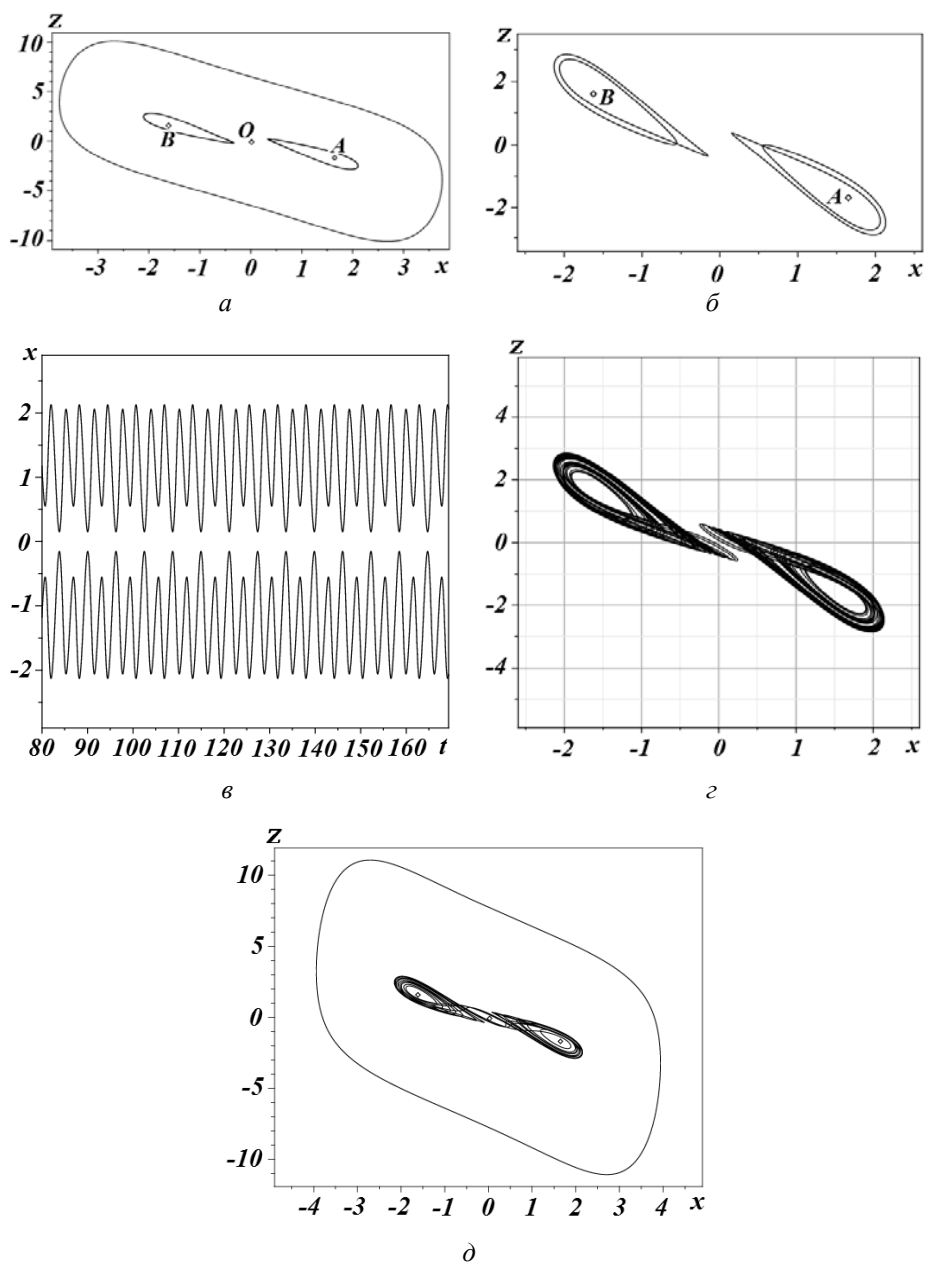


Рис. 5

Точки  $A, B$  могут организовывать замкнутые кривые, исключая точку  $O$ . Изменением значений параметров  $\alpha, \beta$  можно добиться, чтобы траектории, замкнутые относительно  $A$  и  $B$ , не переходили из области в область.

Введем малые отклонения  $\delta v, \delta y, \delta w$  от частных решений  $\bar{v}, \bar{y}, \bar{w}$ , системы (14) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta v}{dt} = \alpha(-2a\delta v - 6b\sqrt{a/b\bar{v}}\delta v - 3b\bar{v}^2\delta v + \delta y); \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta v - \delta y + \delta w; \quad \frac{d\delta w}{dt} = -\beta\delta y.$$

Такую же процедуру проведем в системе (15). Характеристические уравнения, соответствующие системам в вариациях, имеют вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2)) + \lambda(\alpha(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2 - 1) + \beta) + \alpha\beta(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2) = 0; \quad (16)$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2)) + \lambda(\alpha(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2 - 1) + \beta) + \alpha\beta(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2) = 0.$$

Особые точки  $A, B$  имеют ХП согласно характеристическому уравнению, полученному из уравнений (16).

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + 2a\alpha) + \lambda(\alpha(2a - 1) + \beta) + 2a\alpha\beta = 0.$$

При начальных возмущениях

$$\begin{aligned} |v(0)| < \sqrt{a/b}; \quad |y(0)| \geq 0; \quad |w_o(0)| < \sqrt{a/b}; \\ |s(0)| < \sqrt{a/b}; \quad |y(0)| \geq 0; \quad |u_o(0)| < \sqrt{a/b} \end{aligned} \quad (17)$$

в системе доминирует движение под влиянием особой точки  $A$  либо  $B$ . Введем начальные возмущения вида (17), которые включают влияние особых точек  $A, B$ . При значениях управляющих параметров:  $\alpha = 6,1$ ;  $\alpha = 6,2$ ;  $\beta = 9,2$  траектория замыкается относительно точек  $A$  либо  $B$  (рис. 5,  $a, \bar{b}, \bar{v}$ ). Увеличение периода связано с попаданием изображающей точки в область, где скорость перемещения близка к нулю. При  $\alpha = 6,1$ ;  $\beta = 8,6$  изображающая точка не пересекает границу между областями влияния точек  $A, B$ , но образует аттрактор с орбитно неустойчивой траекторией (рис. 5,  $\bar{z}$ ). На рис. 5,  $\bar{d}$  приведена хаотическая траектория с переходом из области в область ( $(\alpha, \beta) = (6,5; 9)$ ).

### 5. О замыкании несимметричных аттракторов Чуа.

Рассмотрим несимметричные аттракторы Чуа. Пусть выполняются условия на начальные возмущения вида (17). Система Чуа образует замкнутые интегральные кривые относительно особых точек  $A, B$  (рис. 6). Вертикальная полоса, выделенная штриховыми линиями, содержит узлофокусные точки ( $Re\lambda_{1,2} < 0$ ;  $\lambda_3 < 0$ ;  $(\alpha, \beta) = (6,1; 9,2)$ ). Остальные точки замкнутой траектории (интервалы точек траектории (2 – 3; 4 – 1) содержат седлофокусные точки ( $Re\lambda_{1,2} > 0$ ;  $\lambda_3 < 0$ ;  $\sigma = Re\lambda_1 +$

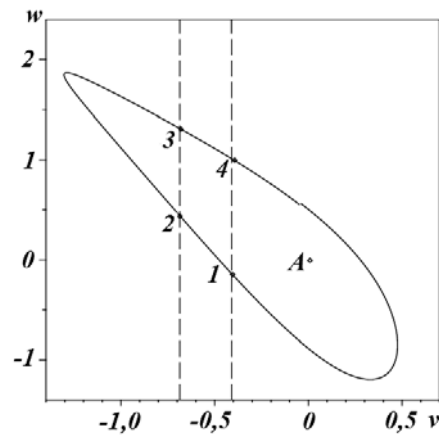


Рис. 6

$+Re\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ ). Заметим, что в интервале точек  $4 - 1$  имеет место  $|Re\lambda_{1,2}| \ll 1$ . Замыкание траектории несимметричных аттракторов Чуа можно установить следующим образом. ХП точек траектории на плоскости  $yu$  (согласно уравнений в вариациях системы (14)) зависят от переменной  $v$  и имеют комплексно-сопряженные корни, действительная часть которых принимает вид  $Re\lambda_{1,2}(v) \leq 0$ . На плоскости  $uw$  имеет место линейная диссипативная система с  $Re\lambda_{1,2} < 0$ . Плоскость  $vw$  не содержит связанных между собой дифференциальных уравнений. Можно установить замыкание траектории на основе анализа на каждой координатной плоскости. Аналогичное заключение можно привести для уравнений в вариациях (15).

### 6. Синхронизация двух идентичных генераторов с симметричной связью.

Рассмотрим систему двух генераторов с экспоненциальной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы шестого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= mx_1 - x_1z_1 + y_1 + \varepsilon(x_2 - x_1); & \frac{dy_1}{dt} &= -x_1; & \frac{dz_1}{dt} &= -b(z_1 - e^{x_1} + 1); \\ \frac{dx_2}{dt} &= mx_2 - x_2z_2 + y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2); & \frac{dy_2}{dt} &= -x_2; & \frac{dz_2}{dt} &= -b(z_2 - e^{x_2} + 1), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\varepsilon > 0$  – параметр связи двух генераторов.

Запишем систему в вариациях для системы (18):

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= m\delta x_1 - \bar{z}_1\delta x_1 + \delta y_1 - \bar{x}_1\delta z_1 + \varepsilon(\delta x_2 - \delta x_1); & \delta\dot{y}_1 &= -\delta x_1; & \delta\dot{z}_1 &= -b(\delta z_1 - e^{\bar{x}_1}\delta x_1); \\ \delta\dot{x}_2 &= m\delta x_2 - \bar{z}_2\delta x_2 + \delta y_2 - \bar{x}_2\delta z_2 + \varepsilon(\delta x_1 - \delta x_2); & \delta\dot{y}_2 &= -\delta x_2; & \delta\dot{z}_2 &= -b(\delta z_2 - e^{\bar{x}_2}\delta x_2). \end{aligned}$$

Если один генератор образует аттрактор, то за счет симметрии связи  $\varepsilon(\delta x_j - \delta x_k)$  система (18) образует два одинаковых аттрактора, т.к.

$$x_1 = x_2 = x; \quad y_1 = y_2 = y; \quad z_1 = z_2 = z. \quad (19)$$

Уравнения в вариациях системы (18) с учетом (19) принимают вид

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m + \varepsilon - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x). \quad (20)$$

Характеристическое уравнение системы (20) имеет вид уравнения (5), т.е.

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m + be^{\bar{x}}\bar{x}) + 1) + b = 0.$$

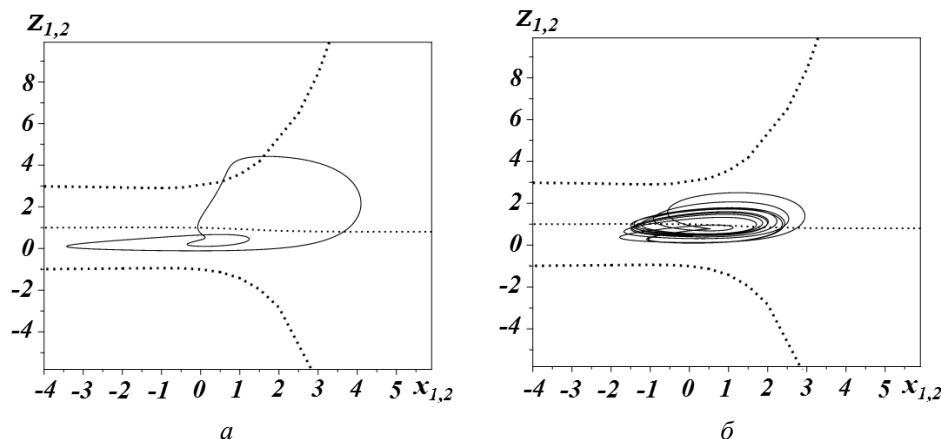


Рис. 7

Одиночный генератор при  $m=1$  порождает хаотический аттрактор при начальном условии  $x(0)=-0,5$ . На рис. 7, а, б приведены регулярный и хаотический аттракторы, которые возникают в системе (4) и системе (18) при различных начальных условиях. Пунктиром обозначена граница области в окрестности нуля с периодической составляющей движения.

Два генератора при начальных условиях  $x_1(0)=-0,5$ ,  $x_2(0)=-0,5$  при  $\varepsilon=0,1; 0,2; 0,3$  генерируют два одинаковых хаотических аттрактора. При данных значениях параметров связанные генераторы не синхронизируют. Остальные результаты по синхронизации хаоса приведем в виде таблицы.

$\varepsilon$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	Режим движения
0,4	-0,5	-0,5	Хаотический аттрактор
0,4	-0,5	0	Предельный цикл
0,5	-0,5	-0,5	Хаотический аттрактор
0,5	-0,5	0	Предельный цикл
0,4	2,5	2,5	Хаотический аттрактор
0,4	2,5	0	Предельный цикл

Из таблицы следует, что синхронизация требует увеличения коэффициента связи и ослабления начального возмущения на один из генераторов. В режиме синхронизации ( $m=1$ ) два связанных генератора имеют портреты на плоскостях  $x_1z_1$ ,  $x_2z_2$ , идентичные одному генератору (рис. 7, а). Система (4) является динамической системой с 1,5 степенью свободы, которая допускает форму записи в виде [1]

$$\ddot{x} - (m-z)\dot{x} + (b(z-e^x-1)+1)x = 0; \quad \dot{z} + b(z-e^x-1) = 0. \quad (21)$$

Система (21) и связка двух генераторов имеют характеристическое уравнение вида (5), в которое входят переменные  $x, z$ . Уравнение (5) определяет бифуркационный процесс на плоскости  $xz$  как для системы (21), так и для системы (18). Синхронизация не меняет этот процесс. Новые движения в системе (18) не появляются. Отсутствие новых движений, которые не порождаются одиночным генератором, обусловлено тем, что уравнение (5) включает переменные  $x, z$  и определяет бифуркационный процесс на плоскости  $xz$ .

В генераторе Чуа процесс бифуркации связан лишь с переменной  $x$ . Рассмотрим систему двух генераторов в цепи Чуа:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha(ax_1 - bx_1^3 + y_1); \quad \frac{dy_1}{dt} = x_1 - y_1 + z_1 + \gamma((x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)); \quad \frac{dz_1}{dt} = -\beta y_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha(ax_2 - bx_2^3 + y_2); \quad \frac{dy_2}{dt} = x_2 - y_2 + z_2 + \gamma((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)); \quad \frac{dz_2}{dt} = -\beta y_2.$$

Учитывая симметрию связи между генераторами, и т.к.  $x_1 = x_2 = x; y_1 = y_2 = y; z_1 = z_2 = z$ , характеристическое уравнение системы в вариациях двух генераторов имеет вид (7).

Процесс бифуркаций связан с переменной  $x$ . Синхронизация требует определенного значения коэффициента связи  $\gamma$  и ослабления начального возмущения одного из генераторов. При  $x_1(0)=0,2$ ,  $x_2(0)=0$ ,  $\gamma=0,3$  (управляющие параметры  $(\alpha, \beta) = (6,5; 9)$ ) хаос синхронизирован в предельный цикл (рис. 8). Реализуется возможность получить новые движения при синхронизации. Например, на плоскости  $xz$  ре-

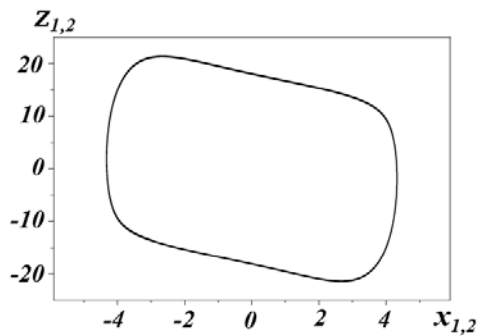


Рис. 8

лизуется новое движение, которое имеет сильное отклонение по переменной  $z$  так как  $z$ , не входит в уравнение (7). Этот режим не порождается одиночным генератором. Сравним рис. 5,  $\delta$  предельного цикла одиночного генератора с рис. 8. По оси  $z$  синхронизированная система делает значительно большие отклонения. Это явление обусловлено тем, что уравнение (7) содержит лишь переменную  $x$ . Остальные переменные не включены в уравнение (7).

### Заключение.

Мультистабильность генератора с экспоненциальной инерциальной нелинейностью возникает в результате сильно несимметричной области периодической составляющей решения. При определенных значениях начальных возмущений (параметр  $m = 1$ ) траектория образует странный аттрактор в окрестности нуля. Изменение начальных условий приводит к появлению на траектории узловых тречек ( $\lambda_1 < 0$ ;  $\lambda_2 < 0$ ;  $\lambda_3 < 0$ ) [10]. Интервал узловых точек способствует орбитальной устойчивости траектории (рис. 7,  $a$ ). Дальнейшее увеличение параметра  $m$  связано с расширением области, где имеет место периодическая составляющая решения. Тогда исчезает странный аттрактор. Существование аттрактора (инвариантного замкнутого множества траекторий) в системе устанавливается Утверждением 1.

Мультистабильность в системе Чуа с несколькими особыми точками объясняется влиянием определенной особой точки на поведение траектории в силу разных начальных условий, определяемых оценками (13), (17). На образование хаотического аттрактора влияют управляющие параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  при фиксированных параметрах  $a$ ,  $b$ . Бифуркационный переход двух генераторов экспериментальным и численным методом рассмотрен в работе [5].

В данной работе, а также в работах [3, 4, 9, 10], изучается бифуркационный процесс одного генератора в силу характеристического уравнения системы в вариациях. На плоскости, которая полностью отображает бифуркационный процесс, устанавливаются границы областей, имеющих периодическую и непериодическую составляющую ХП точек. Попадание траектории аттрактора в области непериодических составляющих вызывает увеличение периода (вследствие замедления движения изображающей точки). Существование притягивающего характера траектории несимметричного цикла обеспечивает замыкание траектории. Для одного симметричного случая приведена Теорема.

Закономерности бифуркационного процесса описываются характеристическим уравнением (уравнения (5), (7)) как для одного генератора, так и для двух. Причина появления в результате синхронизации новых колебательных режимов состоит в том, что отклонения по осям связаны с частными решениями, которые показаны в характеристическом уравнении системы в вариациях. Так, в характеристическом уравнении (7) генератора Чуа имеет место лишь одно частное решение  $\bar{x}$ . По переменным  $y$ ,  $z$ , которые не входят в уравнение (7), отклонения иные, нежели в одиночном генераторе.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто генератори, які мають властивість мультистабільності: генератор з експоненційною інерціальною нелінійністю і генератор Чуа. За допомогою характеристичного рівняння системи у варіаціях встановлюється можливість виникнення нових коливальних режимів при синхронізації.

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.:Наука, 1990. – 312 с.
2. Астахов В.В., Шабунин А.И., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Анищенко В.С. Нелинейная динамика двух связанных через емкость генераторов Чуа // Радиотехника и электроника. – 1997. – **42**, № 3. – С. 320 – 327.
3. Мартинюк А.А., Никитина Н.В. О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання – 2014. – **17**, № 2 – С. 268 – 280.
4. Никитина Н.В. О характеристических показателях Ляпунова // Доп. НАН України. – 2015. – № 8. – С. 64 – 71.
5. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, N 6. – P. 1677 – 1699.
6. Khibnik A.I., Roose D., Chua L. // Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos. – Singapur: World Scientific, 1993. – 145 p.
7. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // Int. J. Bifurcations und Chaos. – 2001. – **1**, N 1. – P. 139 – 182.
8. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: University Press., 2008. – 160 p.
9. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Stability and Bifurcation in a Model the of Earth Magnetic Field of Earth // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 721 – 731.
10. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcations and Multi-Stability of the Oscillations of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 232.
11. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Of Periodical Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
12. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
13. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 p.
14. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 04.11.2015

Утверждена в печать 29.11.2016