

Я. Я. Рушицкий, В. Н. Юрчук

К ЭВОЛЮЦИИ SV-ВОЛНЫ С КОЛОКОЛООБРАЗНЫМ
НАЧАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua reolog@inmech.kiev.ua

Abstract. An evolution of the plane transverse vertically polarized wave (SV-wave) is analyzed, when the wave propagate in the nonlinear elastic medium. A deformation process is described by the Murnaghan model, where the cubic nonlinearity is taken into account. Two approximate approaches are used and the solution of corresponding nonlinear wave equation is found for the first two approximations. The numerical examples are shown and commented.

Key words: SV-wave, cubically nonlinear elasticity, bells-shaped initial wave profile, wave evolution.

1. Введение.

Предметом настоящей статьи является плоская поперечная вертикально поляризованная волна (SV-волна), распространяющаяся в нелинейно упругом материале, деформирование которого описывается моделью Мурнагана [1 – 4]. Движение этой волны задается нелинейным волновым уравнением, в котором учтены квадратичная и кубическая нелинейности [8, 10, 11]

$$\begin{aligned} \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} &= N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}) + N_4 u_{3,11}(u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11}(u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11}(u_{2,1})^2; \\ N_2 &= \lambda + 2\mu + (1/2)A + B; \quad N_4 = \lambda + 2\mu + (1/2)(5A + 14B + 4C); \\ N_5 &= (3/2)(\lambda + 2\mu + A + 2B); \quad N_6 = 3A + 10B + 4C. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение (1) исследовано достаточно подробно для случая гармонической волны. Рассмотрены случаи как квадратичной (уравнение (2)), так и кубической (уравнение (3)) нелинейностей

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}); \quad (2)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11}(u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11}(u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11}(u_{2,1})^2. \quad (3)$$

Если изначально в материале возбуждается лишь SV-волна (т. е. P-волна и SH-волна изначально не возбуждаются), то уравнения (2),(3) упрощаются, принимая вид:

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = 0; \quad (4)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11}(u_{3,1})^2. \quad (5)$$

В итоге, уравнение (4) становится линейным, тогда как уравнение (5) все еще нелинейное. Обычно это комментируется как факт, что в рамках квадратичной нелинейности SV-волна не генерирует саму себя (несамовозбуждается) и эволюция начального профиля волны не может быть описана, тогда как в рамках кубической нелинейности возможно описание самовозбуждения волны и эволюции ее начального профиля.

Случаи отличных от гармонического профилей рассмотрены только для P-волны [2 – 5, 9 – 12].

2. SV-волна с колоколообразным профилем.

Пусть изначально возбуждается только SV-волна. Тогда ее движение описывается кубически нелинейным волновым уравнением (5). Зададим начальный профиль в виде колоколообразной функции

$$u_3(x_1, 0) = u_3^o e^{-(x_1^2/2)} \quad (6)$$

(функция $e^{-(x^2/2)}$ также является функцией Чебышева – Эрмита нулевого индекса $\psi_0(x)$).

Предположим, что начальный непериодический профиль (6) формирует одиночную (непериодическую) волну в виде

$$u_3(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)}, \quad (7)$$

где через $\sigma = \sigma^o(x_1 - c_3 t)$ обозначена фазовая переменная волны и $c_3 = \sqrt{\mu/\rho}$ является постоянной фазовой скоростью SV-волны. Параметр σ в одиночной волне соответствует волновому числу k в гармонической волне: изменение волнового числа имеет следствием изменение длины волны, тогда как изменение параметра σ^o имеет следствием изменение подошвы одиночной волны.

Очевидно, что волна (7) представляет собой конкретное представление простой волны Д’Алямбера [1, 2, 4 – 6, 9 – 12] и удовлетворяет линейное уравнение (4), которое также является линейной частью уравнения (5).

Рассмотрим далее два метода приближенного решения нелинейного волнового уравнения. *Метод 1* являет собой классический в нелинейной акустике метод последовательных приближений решения нелинейных волновых уравнений типа (1) [1, 2, 9]. *Метод 2* основан на приближенном разложении переменной скорости волны [1, 2, 12].

Метод 1. Примем решение линейного уравнения (4) за первое приближение решения нелинейного уравнения (5)

$$u_3^{(1)}(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)}. \quad (8)$$

Второе приближение $u_3^{(2)}(x, t)$ определим как решение неоднородного уравнения

$$\rho u_{3,\mu}^{(2)} - \mu u_{3,11}^{(2)} = N_4 u_{3,11}^{(1)} (u_{3,1}^{(1)})^2 \rightarrow \quad (9)$$

$$\rho u_{3,\mu}^{(2)} - \mu u_{3,11}^{(2)} = N_4 (-u_3^o (1 - \sigma^2) e^{-(\sigma^2/2)}) (-u_3^o \sigma e^{-(\sigma^2/2)})^2 \rightarrow$$

$$u_{3,\mu}^{(2)} - c_3^2 u_{3,11}^{(2)} = -(N_4/\rho) (u_3^o)^3 \sigma^2 (1 - \sigma^2) e^{-3(\sigma^2/2)}. \quad (10)$$

Поскольку третья «гармоника» $e^{-3(\sigma^2/2)}$ является решением уравнения (4), то решение уравнения (10) будет резонансного типа:

$$u_3(x_1, t) = u_3^{(1)}(x_1, t) + u_3^{(2)}(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)} + x_1 (N_4/\rho) (u_3^o)^3 \frac{\sigma^2 (1 - \sigma^2)}{3(1 + \sigma - 3\sigma^2)} e^{-3(\sigma^2/2)}; \quad (11)$$

$$u_3(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2} + x_1 \alpha_3 (c_3)^2 (u_3^o)^3 \frac{(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 [1 - (\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2]}{3(1 + \sigma^o (x_1 - c_3 t) - 3(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2)} e^{-3(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2}.$$

Комментарий решения (11). Это решение существенно зависит от фазы σ : в разных точках профиля его изменение происходит по-разному. При $\sigma = 0$ (вершина колокола) изменение отсутствует, т.е. максимальная амплитуда профиля неизменна. Также изменение отсутствует в точке $\sigma = 1$, в которой нелинейная прибавка изменяет знак с положительного на отрицательный. Это можно комментировать таким образом: центральная часть профиля ($\sigma \in [-1; 1]$) расширяется («полнеет»), тогда как хвостовая часть профиля сжимается («худеет»). При этом, «хвост худеет» слева и справа по-разному.

Комментарий 2 решения (11). Оно состоит из двух слагаемых, одно из которых соответствует классической одиночной колоколообразной волне (условно, «первой гармонике волны») с постоянными параметрами, а второе соответствует условно

«третьей гармонике волны» с переменной амплитудой. Эта амплитуда заслуживает особого внимания: она линейно зависит от расстояния, пройденного волной, и свойств материала. Эта зависимость является характерной для принятого подхода и наблюдалась ранее для других типов волн. Именно она ответственна за эволюцию начального профиля при движении волны.

Метод 2. Представим уравнение (5) в виде

$$u_{3,t} - u_{3,11} \left\{ c_3^2 \left[1 + (N_4/\mu)(u_{3,1})^2 \right] \equiv v_3^2 \right\} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (10) при более общем, чем (6), начальном условии $u_3(x, 0) = F_3(x_1)$ ищем в виде произвольной волны Д'Алямбера

$$u_3(x, t) = F_3(x_1 - v_3 t) \quad (13)$$

с неизвестной скоростью $v_3 = c_3 \sqrt{1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2}$; $\alpha_3 = (N_4/\mu)$. Примем ограничение

$$|\alpha_3 (u_{3,1})^2| \ll 1, \quad (14)$$

которое позволяет представить приближенно решение (13) таким образом:

$$u_3(x_1, t) \cong F_3 \left[x_1 - c_3 t - (1/2) \alpha_3 c_3 (u_{3,1})^2 t \right]. \quad (15)$$

Точность приближения (15) зависит от точности выполнения условия (14), которое включает ограничения на два параметра: параметр $\alpha_3 = (\lambda + 2\mu) / \mu + (5A + 14B + 4C) / 2\mu$ и квадрат градиента перемещения $(u_{3,1})^2$.

Введем далее дополнительный параметр $\delta = -(1/2) \alpha_3 c_3 (u_{3,1})^2 t$ и представим решение (15) в виде ряда Тейлора

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma + \delta) \approx F_3(\sigma) + F_3'(\sigma) \delta + (1/2) F_3''(\sigma) \delta^2 + L; \quad \sigma = \sigma^o (x_1 - c_3 t). \quad (16)$$

Ограничим анализ первыми двумя членами в разложении (16), предположив $|\delta| \ll 1$. Поскольку малость $|\alpha_3 (u_{3,1})^2|$ уже предположена в (14), то это фактически условие на $c_3 t$ – пройденное волной расстояние. Тогда имеем

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma) + F_3'(\sigma) \left[\delta = -(1/2) \alpha_3 c_3 (u_{3,1})^2 t \right] = F_3(\sigma) - (1/2) \alpha_3 c_3 t \left[F_3'(\sigma) \right]^3. \quad (17)$$

Представление решения (17) имеет общий характер и для разных, конкретно выбранных профилей $F_3(x_1)$, будет описывать нелинейный волновой эффект, состоящий в возникновении «третьей гармоники» или подобных ей новых составляющих и в конечном счете – в эволюции начального профиля волны.

Предположим теперь, что профиль волны колоколообразный: волна задается формулой (7). Тогда формула (17) принимает более конкретный вид

$$u_3(x_1, t) \approx u_3^o e^{-(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2} + (1/2) t \alpha_3 c_3 (\sigma^o)^3 (x_1 - c_3 t)^3 (u_3^o)^3 e^{-3(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2}. \quad (18)$$

Комментарий решения (18). Это решение существенно зависит от фазы σ : в разных точках профиля его изменение происходит по-разному, но нелинейная добавка всегда антисимметрична. При $\sigma = 0$ (вершина колокола) изменение отсутствует, т.е. максимальная амплитуда профиля неизменна. Однако в других, симметричных относительно вершины точках профиля, профиль изменяется несимметрично: правая часть профиля расширяется («полнеет»), тогда как левая часть профиля сужается («худеет»).

Сравнение формул (11) и (18) показывает, что они описывают кубическую нелинейность и, в результате, эволюцию волны по-разному, и получены при различающихся ограничениях.

По формулам (11) и (18) построены двумерные графики с координатами «смещение u_3 – пройденное волной расстояние x_1 », соответствующие таким значениям параметров: материал алюминий, $L = 30$, $\sigma^o = 60$, $u_3^o = 1 \cdot 10^{-3}$ – (для (11), рис. 1 – 3) и $L = 30$, $\sigma^o = 400$, $u_3^o = 1 \cdot 10^{-3}$ – (для (18), рис. 4 – 6).

Из рис. 1 – 3 следует, что показанный на нем начальный этап эволюции профиля волны таков, что изменение симметричного профиля происходит несимметрично. При этом максимальное значение амплитуды на заднем фронте медленно увеличивается. Проявляется тенденция превращения одного горба в три (центральный горб сохраняется и возникают горбы на заднем и переднем фронтах). Подошва остается практически неизменной.

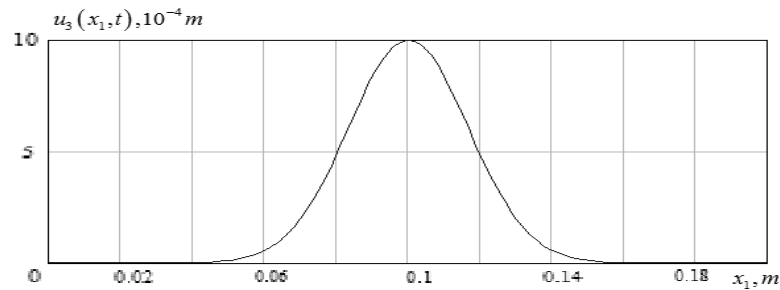


Рис. 1

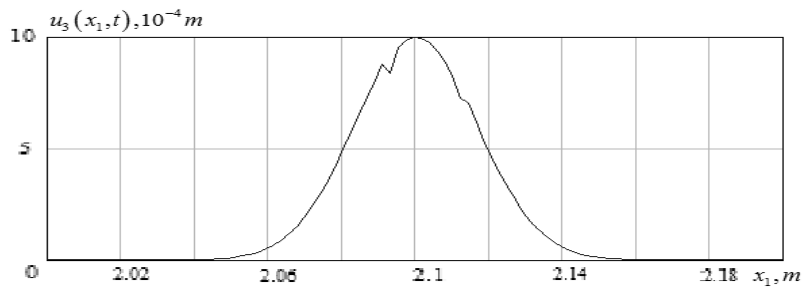


Рис. 2

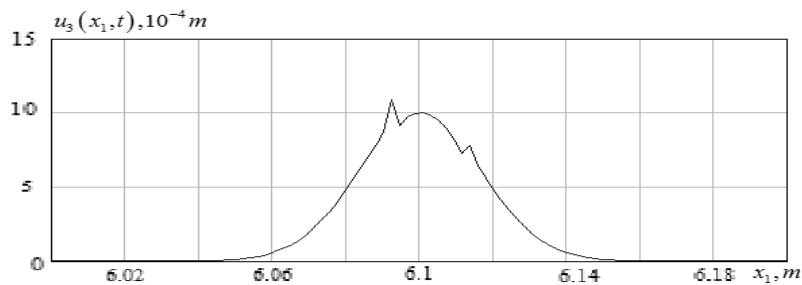


Рис. 3

Из рис. 4 – 6 следует, что начальный этап эволюции профиля волны описывается медленнее – изменение профиля происходит медленнее. Все заметные на рис. 1 – 3 изменения проявляются и на рис. 4 – 6 (неизменность подошвы, образование трех горбов, несимметрия заднего и переднего фронтов), однако на больших расстояниях. Отличие можно объяснить коротким временем наблюдения эволюции.

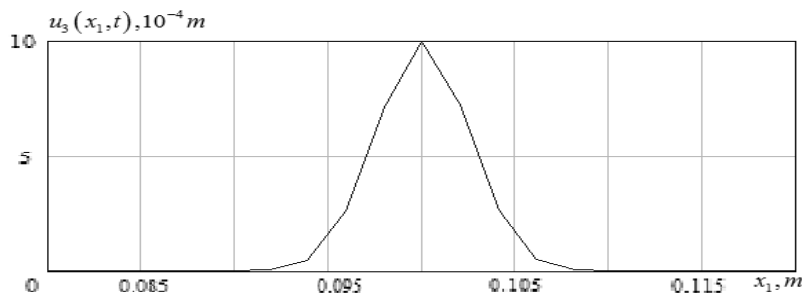


Рис. 4

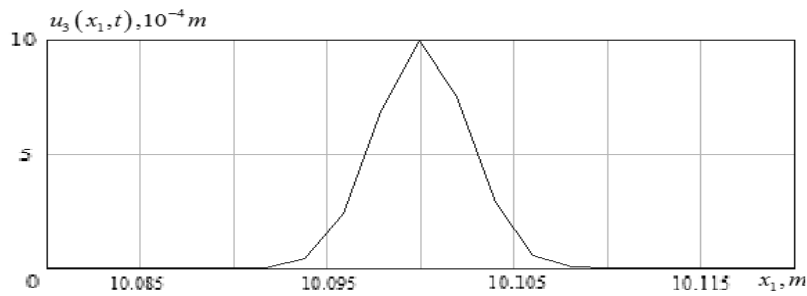


Рис. 5

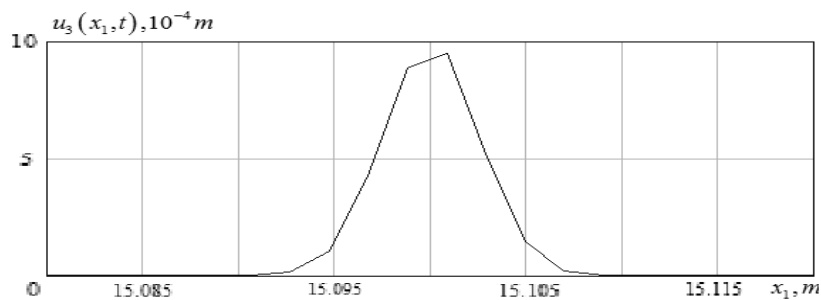


Рис. 6

3. Заключение.

Итак, изменение подошвы волны существенно влияет на эволюцию профиля волны. Отмечено также различие эволюции в центральной и хвостовой частях профиля.

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано еволюцію плоскої поперечної вертикально поляризованої хвилі (SV-хвилі), коли хвиля поширюється в нелінійно пружному середовищі. Процес деформування описано моделлю Мернагана, де враховано кубічну нелінійність. Використано два наближені підходи і отримано розв'язки відповідних нелінійних хвильових рівнянь в рамках двох перших наближень. Показано і прокоментовано результати числових прикладів.

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
2. Руцицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інст. механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
3. Cattani C., Rushchitsky J.J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructures. – Singapore – London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 466 p.
4. Guz I.A., Rushchitsky J.J. Theoretical Description of a Delamination Mechanism in Fibrous Micro- and Nanocomposites // Int. App. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1129 – 1136.
5. Janno J., Seletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equation by measuring solitary waves // Wave Motion. – 2015. – **52**. – P. 15 – 25.
6. Narahara K. Asymmetric solitary waves in coupled nonlinear transmissions lines // Wave Motion. – 2015. – **58**. – P. 13 – 21.
7. Rushchitsky J.J. Nonlinear elastic waves in materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 440 p.
8. Rushchitsky J.J. Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **9**, N 12. – P. 600 – 643.
9. Rushchitsky J.J., Cattani C. Cubically Nonlinear versus Quadratically Nonlinear Elastic Waves // Int. App. Mech. – 2003. – **39**, N 12. – P. 1361 – 1399.
10. Rushchitsky J.J., Cattani C., Terletska E.V. Wavelet Analysis of the Evolution of a Solitary Wave in a Composite Material // Int. App. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 311 – 318.
11. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 289.
12. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.

Поступила 06.05.2016

Утверждена в печать 14.03.2017