

Е. А. Сторожук<sup>1</sup>, А. В. Яцура<sup>2</sup>

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ  
ДЛЯ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>stevan@ukr.net, <sup>2</sup>andriy.yatsura.88@gmail.com*

**Abstract.** A statement is given and an analytical-numerical technique is developed for solving the boundary problems for the transversally isotropic infinite long non-circular cylindrical shells of variable thickness under action of statical loads. The system of basic equations is written basing on the relationships of the refined theory of non-shallow shells with the low shear stiffness. The expressions are given for the internal force factors and generalized displacements of the closed and open cylindrical shells of the arbitrary cross-section that are loaded by the surface and linear loads. The integrals in these expressions are evaluated numerically with using the trapezium rule. The numerical results are represented in the form of table and plots and then analyzed for the closed shell of elliptic cross-section under action of the uniform internal pressure.

**Key words:** long cylindrical shell, non-circular cross section, analytical and numerical solution, variable thickness, deformation of transverse shear, static load.

**Введение.**

Некруговые цилиндрические оболочки, используемые в различных областях техники, промышленном и гражданском строительстве, в ряде случаев оказываются более прочными, устойчивыми и легкими по сравнению с оболочками кругового поперечного сечения.

В связи с переменностью радиуса кривизны поперечных сечений решение краевых задач для некруговых оболочек сопряжено со значительными математическими трудностями. Точные аналитические решения данных задач получены лишь для бесконечно длинной цилиндрической оболочки с овальным поперечным сечением [12] и поперечным сечением, кривизна которого изменяется по квадратичному закону [4]. Поэтому при расчете некруговых оболочек широко используются численные, приближенные аналитические и экспериментальные методы, с помощью которых исследованы напряженно-деформированное состояние (НДС), устойчивость и колебания овальных и эллиптических цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины [1 – 3, 7, 10, 11, 13 – 18].

При решении численными методами краевых задач для бесконечно длинных замкнутых цилиндрических оболочек с некруговыми поперечными сечениями имеет место так называемое запирание. Вычислительное явление мембранного запирания при решении рассматриваемых задач вариационно-разностным методом продемонстрировано в работе [2] и методом конечных элементов – в работе [7]. С точки зрения явления запирания двумерное деформирование некруговой цилиндрической оболочки с закрепленными торцами является более простой задачей за счет уменьшения изгибов вследствие подкрепляющего действия торцов.

Ниже дана постановка задач статики для бесконечно длинной некруговой цилиндрической оболочки переменной толщины с учетом деформаций поперечного сдвига, разработана аналитически-численная методика решения данного класса задач, свободная от мембранного и сдвигового запирания, и получены конкретные числовые результаты для замкнутой эллиптической оболочки при действии равномерного нормального давления.

### §1. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую оболочку произвольного поперечного сечения, изготовленную из трансверсально-изотропного материала и нагруженную поверхностными, а также погонными силами. Предполагаем, что направляющая поперечного сечения оболочки изменяется плавно, а толщина оболочки  $h$  постоянная вдоль образующей и изменяется непрерывно по направляющей. Нагрузка, действующая на оболочку, распределена вдоль образующей равномерно. Из изложенного выше следует, что перемещения, деформации и напряжения в каждом поперечном сечении оболочки будут одинаковыми, а все искомые величины будут изменяться только вдоль направляющей.

Отнесем оболочку к криволинейной ортогональной системе координат  $(s, \varphi, \zeta)$ , сопряженной с линиями главных кривизн оболочки (рис. 1). Здесь  $s, \zeta$  – длины образующей и нормали к координатной поверхности ( $\zeta = 0$ ),  $\varphi$  – угол между нормалью к координатной поверхности и вертикальной осью.

Геометрию координатной поверхности оболочки представим в глобальной декартовой системе координат  $(X, Y, Z)$ , ось  $OX$  которой параллельна образующей (рис. 1). Плоскость поперечного сечения оболочки отнесем к системе координат  $(Y, Z)$ , а его уравнения запишем в параметрической форме:  $Y = Y(\varphi)$ ;  $Z = Z(\varphi)$ ;  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ .

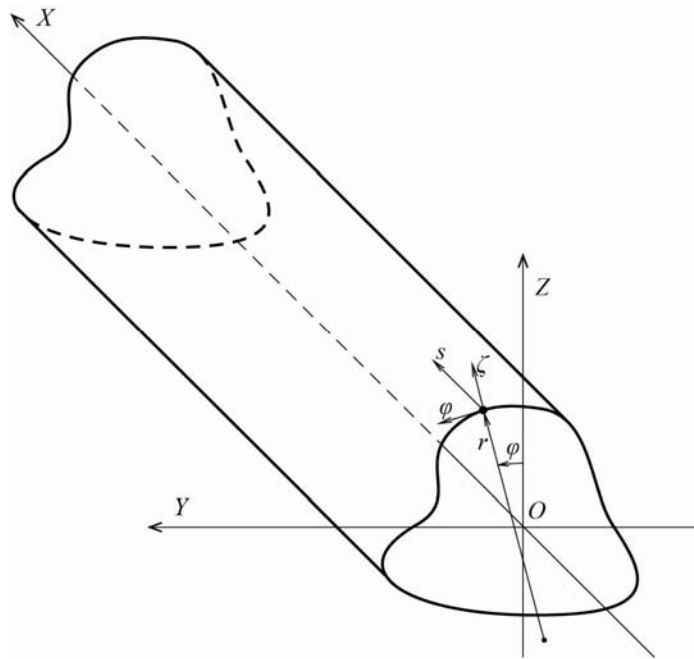


Рис. 1

Исходными при исследовании НДС длинных нетонких цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением являются уравнения уточненной теории оболочек, которая базируется на гипотезе прямой линии (учитываются деформации поперечного сдвига). В этом случае для геометрических соотношений имеем выражения [1]:

$$\varepsilon = \frac{du}{rd\varphi} + \frac{w}{r}; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{rd\varphi} - \frac{1}{r}u; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{rd\varphi}, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon, \gamma, \mu$  – компоненты деформации оболочки;  $u, w$  – тангенциальное перемещение и прогиб точек срединной поверхности оболочки;  $\vartheta$  – угол поворота нормали;  $r$  – радиус кривизны поперечного сечения.

Связь внутренних усилий и момента с компонентами деформации оболочки представим согласно закона Гука в виде

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad Q = D_Q \gamma; \quad D_Q = k G_{\varphi\zeta} h;$$

$$M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12. \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.2) обозначено:  $N, Q$  – тангенциальное и перерезывающее усилия;  $M$  – изгибающий момент;  $D_N, D_M, D_Q$  – жесткостные характеристики оболочки;  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки в плоскости изотропии;  $G_{\varphi\zeta}$  – модуль сдвига в плоскости поперечного сечения;  $k$  – коэффициент, который зависит от характера распределения сдвига по толщине и способа определения среднего значения сдвига.

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\frac{dN}{rd\varphi} + \frac{1}{r}Q + q_\varphi = 0; \quad \frac{dQ}{rd\varphi} - \frac{1}{r}N + q_\zeta = 0; \quad \frac{dM}{rd\varphi} - Q = 0, \quad (1.3)$$

где  $q_\varphi, q_\zeta$  – компоненты поверхностной нагрузки.

## §2. Построение общего решения для некруговой цилиндрической оболочки переменной толщины.

Из первых двух уравнений равновесия (1.3) получим следующее уравнение для определения поперечного усилия:

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + Q = -rq_\varphi - \frac{d(rq_\zeta)}{d\varphi}. \quad (2.1)$$

Характеристическое уравнение  $k^2 + 1 = 0$  соответствующего однородного уравнения имеет корни  $k_{1,2} = \pm i$ , поэтому общим решением однородного уравнения будет функция  $Q^* = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$ . Частное решение  $Q^{**}$  неоднородного уравнения (2.1) определим согласно методу вариации произвольных постоянных. Тогда общее решение уравнения (2.1) будет иметь вид

$$Q = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \sin \varphi \int_0^\varphi q_2 dx + (rq_\zeta)|_0 \sin \varphi, \quad (2.2)$$

где приняты обозначения:  $q_1 = r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x)$ ;  $q_2 = r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x)$ .

Для тангенциального усилия из второго уравнения равновесия с использованием соотношений (2.2) получим выражение

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} + rq_\zeta = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \cos \varphi \int_0^\varphi q_2 dx + (rq_\zeta)|_0 \cos \varphi. \quad (2.3)$$

Далее из третьего уравнения равновесия (1.3) определяем момент

$$M = \int_0^\varphi rQ dx + C_3 = M^* + C_3; \quad M^* = \int_0^\varphi rQ dx. \quad (2.4)$$

Используя геометрическое соотношение для изгибной деформации (1.1), значение которой ( $\mu = M / D_M$ ) вычислено с помощью закона Гука (1.2), получим формулу для угла поворота нормали

$$\vartheta = \int_0^\varphi r\mu dx + C_4 = \int_0^\varphi \frac{rM dx}{D_M} + C_4 = \int_0^\varphi \frac{rM^* dx}{D_M} + C_3 \int_0^\varphi \frac{r dx}{D_M} + C_4. \quad (2.5)$$

Исходным для определения тангенциального перемещения является линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, т. е.

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{d}{d\varphi}(r\varepsilon) + r(\vartheta - \gamma), \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon = N / D_N$ ;  $\gamma = Q / D_Q$ .

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$u = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi f_1 dx + \sin \varphi \int_0^\varphi f_2 dx - r\varepsilon|_0 \sin \varphi. \quad (2.7)$$

В формуле (2.7) введены обозначения

$$f_1 = r[\varepsilon \cos x - (\vartheta - \gamma) \sin x]; \quad f_2 = r[\varepsilon \sin x + (\vartheta - \gamma) \cos x]. \quad (2.8)$$

Далее с помощью соотношения  $w = rN / D_N - u'_\varphi$  представим выражение для прогиба в развернутом виде, т. е.

$$w = C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi + \sin \varphi \int_0^\varphi f_1 dx - \cos \varphi \int_0^\varphi f_2 dx + r\varepsilon|_0 \cos \varphi. \quad (2.9)$$

При решении конкретных задач постоянные интегрирования ( $C_1, C_2, \dots, C_6$ ) определяем из соответствующих граничных условий.

### §3. Замкнутая бесконечно длинная цилиндрическая оболочка некругового поперечного сечения.

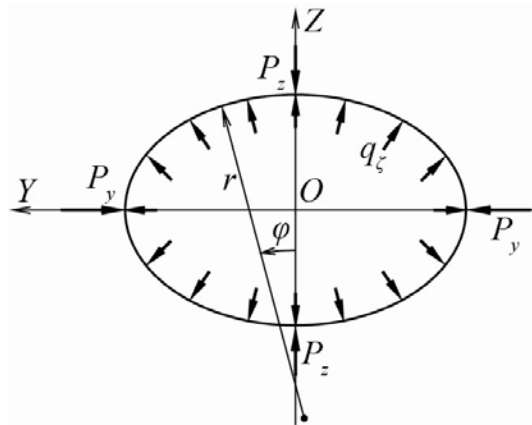


Рис. 2

Примем, что поперечное сечение длинной замкнутой по направляющей ( $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ) цилиндрической оболочки имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии  $OY$  и  $OZ$ . Оболочка находится под действием комбинированного нагружения: равномерно распределенных вдоль образующих двух пар диаметрально противоположных поперечных усилий  $P_y = \text{const}$  и  $P_z = \text{const}$ , а также нормальных поверхностных сил  $q_z = q_z(\varphi)$ , которые приложены симметрично относительно плоскостей  $XOY$  и  $XOZ$  (рис. 2).

Учитывая геометрическую и силовую симметрии, за расчетную схему примем четвертую часть оболочки ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) и зададим такие краевые условия в точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ :

$$u(0) = \vartheta(0) = 0; \quad Q(0) = \frac{P_z}{2}; \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P_y}{2}. \quad (3.1)$$

Напряженно-деформированное состояние данной оболочки описывается системой уравнений (1.1) – (1.3), общее решение которой представлено выше (§2). С помощью краевых условий (3.1) определим постоянные интегрирования.

Сначала из краевых условий для поперечных усилий  $Q(0) = P_z / 2$  и  $Q(\pi/2) = -P_y / 2$  вычислим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{P_z}{2}; \quad C_2 = \int_0^{\pi/2} r q_\zeta \sin x dx - (r q_\zeta)|_0 - \frac{P_y}{2}. \quad (3.2)$$

Для внутренних усилий, которые удовлетворяют заданным краевым условиям (3.1), имеем такие равенства:

$$Q = \frac{P_z}{2} \cos \varphi - \frac{P_y}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \int_0^\varphi r q_\zeta \cos x dx + \sin \varphi \int_\varphi^{\pi/2} r q_\zeta \sin x dx;$$

$$N = -\frac{P_z}{2} \sin \varphi - \frac{P_y}{2} \cos \varphi + \sin \varphi \int_0^\varphi r q_\zeta \cos x dx + \cos \varphi \int_\varphi^{\pi/2} r q_\zeta \sin x dx. \quad (3.3)$$

Далее, используя краевые условия  $\mathcal{G}(0) = 0$  и  $\mathcal{G}(\pi/2) = 0$ , вычисляем постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$ :

$$C_3 = -\frac{1}{L} \int_0^{\pi/2} \frac{rM^*}{D_M} dx; \quad L = \int_0^{\pi/2} \frac{rdx}{D_M}; \quad C_4 = 0. \quad (3.4)$$

Теперь с помощью формул (2.4) и (2.5) определяем момент и угол поворота нормали

$$M = M^* - \frac{1}{L} \int_0^{\pi/2} \frac{rM^*}{D_M} dx; \quad \mathcal{G} = \int_0^\varphi \frac{rM}{D_M} dx. \quad (3.5)$$

Из краевых условий для тангенциального перемещения  $u(0) = 0$  и  $u(\pi/2) = 0$  получим значения оставшихся постоянных интегрирования  $C_5$  и  $C_6$ :

$$C_5 = 0; \quad C_6 = \frac{rN}{D_N} \Big|_0 - \int_0^{\pi/2} f_2 dx. \quad (3.6)$$

В результате подстановки в соотношения (2.7), (2.9) полученных выражений для постоянных интегрирования  $C_5$  и  $C_6$ , а также выполнения ряда преобразований формулы для тангенциального перемещения и прогиба оболочки будут иметь следующий вид:

$$u = \cos \varphi \int_0^\varphi f_1 dx - \sin \varphi \int_\varphi^{\pi/2} f_2 dx; \quad w = \sin \varphi \int_0^\varphi f_1 dx + \cos \varphi \int_\varphi^{\pi/2} f_2 dx. \quad (3.7)$$

#### §4. Открытая длинная цилиндрическая оболочка некругового сечения с шарнирно закрепленными продольными краями.

Исследуем деформирование открытой по направляющей ( $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ) бесконечно длинной цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения, продольные края ( $\varphi = \pm \alpha$ ) которой шарнирно закреплены на неподвижных опорах. Оболочка нагружена нормальными  $q_\zeta = q_\zeta(\varphi)$  и тангенциальными  $q_\varphi = q_\varphi(\varphi)$  поверхностными силами, а также равномерно распределенной вдоль образующей поперечной силой  $P = \text{const}$ , приложенной в вершине (рис. 3).

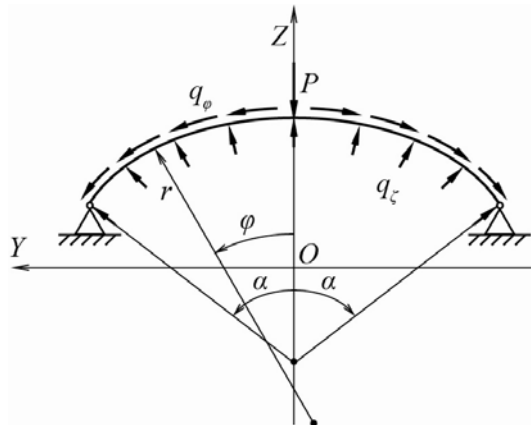


Рис. 3

Для поперечного сечения и нагрузки имеет место симметрия относительно вертикальной плоскости  $XOZ$ . Поэтому расчеты будем выполнять для половины оболочки ( $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ). На крае  $\varphi = \alpha$  зададим условия шарнирно неподвижного опирания ( $u = w = M = 0$ ), а на крае  $\varphi = 0$  – такие граничные условия:  $u = \mathcal{G} = 0$  и  $Q = P/2$ .

Определив из граничного условия  $Q(0) = P/2$  постоянную интегрирования  $C_1 = P/2$ , представим внутренние усилия (2.2) и (2.3) в следующем виде:

$$Q = C_2 \sin \varphi + Q_1; \quad N = C_2 \cos \varphi + N_1, \quad (4.1)$$

где  $C_2$  – неизвестная постоянная интегрирования;

$$Q_1 = \frac{P}{2} \cos \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \sin \varphi \int_0^\varphi q_2 dx + (rq_\varepsilon)|_0 \sin \varphi; \quad (4.2)$$

$$N_1 = -\frac{P}{2} \sin \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \cos \varphi \int_0^\varphi q_2 dx + (rq_\varepsilon)|_0 \cos \varphi.$$

Подставив в выражение для момента (2.4) соотношение для поперечного усилия (4.1), получим такую формулу:

$$M = C_2 l_0 + M_0 + C_3. \quad (4.3)$$

Здесь обозначено:

$$l_0 = \int_0^\varphi r \sin x dx; \quad M_0 = \int_0^\varphi r Q_1 dx. \quad (4.4)$$

Постоянную интегрирования  $C_3$  в равенстве (4.3) с использованием граничного условия  $M(\alpha) = 0$  выразим через постоянную  $C_2$

$$C_3 = -C_2 l_0(\alpha) - M_0(\alpha). \quad (4.5)$$

Тогда выражение для момента будет иметь такой вид:

$$M = C_2 l_1 + M_1, \quad (4.6)$$

где принято:

$$M_1 = M_0 - M_0(\alpha); \quad l_1 = l_0 - l_0(\alpha). \quad (4.7)$$

В формуле для угла поворота нормали (2.5) согласно краевому условию  $\mathcal{G}(0) = 0$  постоянная  $C_4$  равняется нулю.

С помощью формулы (2.5) и соотношения для момента (4.6) получим следующее выражение для угла поворота нормали:

$$\mathcal{G} = C_2 l_2 + \mathcal{G}_1, \quad (4.8)$$

где введены такие обозначения:

$$\mathcal{G}_1 = \int_0^\varphi \frac{r M_1}{D_M} dx; \quad l_2 = \int_0^\varphi \frac{r l_1}{D_M} dx. \quad (4.9)$$

Краевое условие для тангенциального перемещения в вершине оболочки ( $u(0) = 0$ ) выполняется при значении постоянной интегрирования  $C_5$ , равном нулю.

Удовлетворив граничным условиям для перемещений на продольном крае  $\varphi = \alpha$  ( $u(\alpha) = 0$  и  $w(\alpha) = 0$ ), приходим к системе уравнений относительно оставшихся постоянных интегрирования  $C_2$  и  $C_6$ :

$$\begin{cases} C_6 \sin \alpha + \cos \alpha \int_0^\alpha f_1 dx + \sin \alpha \int_0^\alpha f_2 dx - \frac{rN}{D_N} \Big|_0 \sin \alpha = 0; \\ -C_6 \cos \alpha + \sin \alpha \int_0^\alpha f_1 dx - \cos \alpha \int_0^\alpha f_2 dx + \frac{rN}{D_N} \Big|_0 \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Решив приведенную систему, получим такие равенства:

$$C_6 = \frac{rN}{D_N} \Big|_0 - \int_0^\alpha f_2 dx; \quad \int_0^\alpha f_1 dx = 0. \quad (4.11)$$

Сначала из уравнения  $\int_0^\alpha f_1 dx = 0$  определяем постоянную интегрирования  $C_2$ :

$$C_2 = - \frac{\int_0^\alpha r \left[ \frac{N_1 \cos x}{D_N} - \left( \mathcal{G}_1 - \frac{Q_1}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}{\int_0^\alpha r \left[ \frac{\cos^2 x}{D_N} - \left( l_2 - \frac{\sin x}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}. \quad (4.12)$$

Далее по формулам (4.1), (4.6), (4.8) и (4.11) вычисляем  $N, Q, M, \mathcal{G}$  и  $C_6$ .

Используя полученные значения постоянных интегрирования, преобразуем выражения (2.7) и (2.9) для перемещений открытой длинной цилиндрической оболочки некругового сечения с шарнирно закрепленными продольными краями к такому виду:

$$u = \cos \varphi \int_0^\varphi f_1 dx - \sin \varphi \int_0^\alpha f_2 dx; \quad w = \sin \varphi \int_0^\varphi f_1 dx + \cos \varphi \int_0^\alpha f_2 dx. \quad (4.13)$$

### §5. Открытая длинная некруговая цилиндрическая оболочка с жестко закрепленными продольными краями.

Кратко остановимся на особенностях определения компонент НДС открытой по направляющей бесконечно длинной цилиндрической оболочки некругового поперечного сечения, продольные края которой жестко защемлены. Примем, что оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала и находится под действием комбинированной нагрузки: поверхностных  $q_\zeta = q_\zeta(\varphi)$  и  $q_\varphi = q_\varphi(\varphi)$ , а также погонных  $P = \text{const}$  сил (рис. 4).

Учитывая геометрическую и силовую симметрии относительно вертикальной плоскости  $XOZ$ , расчеты достаточно выполнить для половины оболочки ( $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ). На крае  $\varphi = \alpha$  зададим условия жесткого защемления ( $u = w = \mathcal{G} = 0$ ), а на крае  $\varphi = 0$  – смешанные граничные условия:  $u = \mathcal{G} = 0$  и  $Q = P/2$ .

Отметим, что исходные уравнения (уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения) в данном случае такие же, как и в предыдущей задаче. Поэтому при вычислении внутренних усилий ( $N, Q$ ), момента ( $M$ ), угла поворота нормали ( $\mathcal{G}$ ) и перемещений ( $u, w$ ) данной оболочки можно вос-

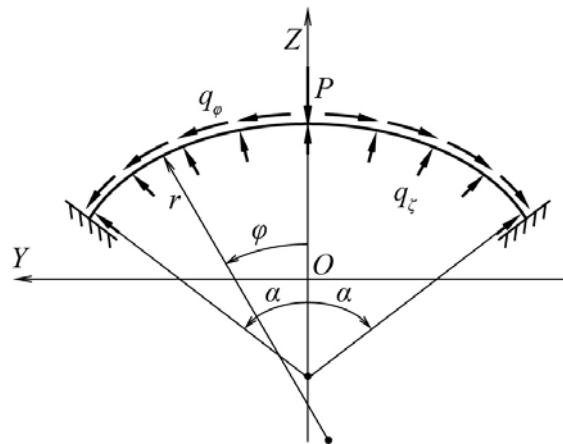


Рис. 4

пользоваться соответствующими формулами, полученными в §4. Отличия имеют место только при определении постоянной интегрирования  $C_3$  (4.5) и составляющих  $M_1$ ,  $l_1$  выражения для момента (4.7), которые для длинной некруговой цилиндрической оболочки с жестко закрепленными продольными краями определяются следующим образом.

1. Подставив выражение (4.3) для момента в формулу (2.5) для угла поворота нормали, получим

$$\mathcal{G} = C_2 \int_0^\alpha \frac{rl_0}{D_M} dx + \int_0^\alpha \frac{rM_0}{D_M} dx + C_3 \int_0^\alpha \frac{rdx}{D_M} + C_4. \quad (5.1)$$

2. Из граничного условия  $\mathcal{G}(0) = 0$  определяем постоянную интегрирования  $C_4 = 0$ , а из условия  $\mathcal{G}(\alpha) = 0$  – постоянную  $C_3$ :

$$C_3 = -\frac{C_2}{L} \int_0^\alpha \frac{rl_0}{D_M} dx - \frac{1}{L} \int_0^\alpha \frac{rM_0}{D_M} dx; \quad L = \int_0^\alpha \frac{rdx}{D_M}. \quad (5.2)$$

3. С помощью полученного соотношения для постоянной интегрирования  $C_3$  составляющие момента в формуле (4.6) представим в таком виде:

$$M_1 = M_0 - \frac{1}{L} \int_0^\alpha \frac{rM_0}{D_M} dx; \quad l_1 = l_0 - \frac{1}{L} \int_0^\alpha \frac{rl_0}{D_M} dx. \quad (5.3)$$

#### §6. Длинная цилиндрическая панель некругового сечения, один из продольных краев которой жестко закреплен.

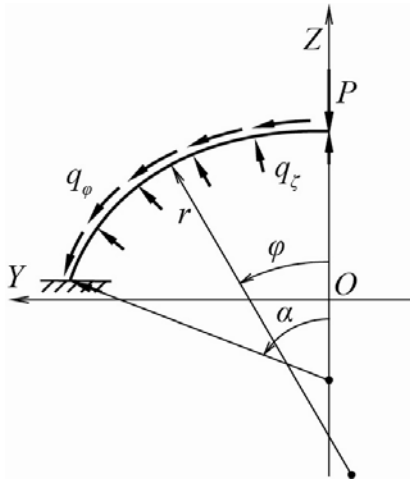


Рис. 5

Рассмотрим краевую задачу о НДС бесконечно длинной открытой цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения, продольный край  $\varphi = \alpha$  которой жестко закреплен, а на крае  $\varphi = 0$  действует перерезывающая сила  $P = \text{const}$ . Кроме того, панель также нагружена нормальными  $q_z = q_z(\varphi)$  и тангенциальными  $q_\varphi = q_\varphi(\varphi)$  поверхностными силами (рис. 5).

Общее решение данной задачи описывается равенствами (2.2) – (2.5), (2.7), (2.9).

Постоянные интегрирования определим, используя граничные условия:

$$\begin{aligned} Q(0) = P; \quad N(0) = M(0) = 0; \\ u(\alpha) = w(\alpha) = \mathcal{G}(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Подставляя решения (2.2) – (2.5), (2.7), (2.9) в граничные условия (6.1), приходим к системе шести уравнений такого вида:

$$\begin{cases} C_1 - P = 0; \\ C_2 + (rq_z)|_0 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_4 + \int_0^\alpha \frac{rM}{D_M} dx = 0; \\ C_5 \cos \alpha + C_6 \sin \alpha + \cos \alpha \int_0^\alpha f_1 dx + \sin \alpha \int_0^\alpha f_2 dx - \frac{rN}{D_N} \Big|_0 \sin \alpha = 0; \\ C_5 \sin \alpha - C_6 \cos \alpha + \sin \alpha \int_0^\alpha f_1 dx - \cos \alpha \int_0^\alpha f_2 dx + \frac{rN}{D_N} \Big|_0 \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$



Согласно (6.2) определим постоянные  $C_1 - C_6$ :

$$C_1 = P; \quad C_2 = -(rq_\zeta)|_0; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = -\int_0^\alpha \frac{rM}{D_M} dx; \quad C_5 = -\int_0^\alpha f_1 dx; \quad C_6 = \frac{rN}{D_N} \Big|_0 - \int_0^\alpha f_2 dx. \quad (6.3)$$

В итоге после некоторых преобразований получаем следующие выражения для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений некруговой панели:

$$\begin{aligned} Q &= P \cos \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \sin \varphi \int_0^\varphi q_2 dx; \quad N = -P \sin \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi q_1 dx - \cos \varphi \int_0^\varphi q_2 dx; \\ M &= \int_0^\varphi rQ dx; \quad \mathcal{G} = -\int_0^\alpha \frac{rM}{D_M} dx; \\ u &= -\cos \varphi \int_0^\alpha f_1 dx - \sin \varphi \int_0^\alpha f_2 dx; \quad w = -\sin \varphi \int_0^\alpha f_1 dx + \cos \varphi \int_0^\alpha f_2 dx. \end{aligned} \quad (6.4)$$

### §7. Вычисление интегралов в выражениях для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений.

Поскольку подинтегральные функции в формулах для определения внутренних усилий, изгибающего момента, угла поворота нормали, тангенциального перемещения и прогиба оболочки непрерывны, то интегралы в этих формулах существуют, но для большинства поперечных сечений цилиндрической оболочки первообразные подинтегральных функций не выражаются через элементарные функции. Поэтому в разработанной методике отмеченные интегралы вычисляются численно с использованием формулы трапеций

$$\int_a^b g(x) dx \approx \Delta x \left[ \frac{g(a) + g(b)}{2} + g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) \right]. \quad (7.1)$$

Здесь  $x_i = a + i\Delta x$  – узлы интегрирования, которые разбивают отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей длиной  $\Delta x = (b - a) / n$ .

Отметим, что подинтегральная функция в формуле трапеций может быть задана аналитически или представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах интегрирования.

### §8. Апробация аналитически-численного подхода.

Эффективность разработанной методики показана на примере решения тестовых задач и сравнения полученных результатов с данными точного решения. В качестве тестового примера рассмотрена краевая задача о НДС замкнутой бесконечно длинной цилиндрической оболочки овального поперечного сечения, на которую действует равномерное внутреннее давление интенсивности  $q = \text{const}$ .

Примем, что поперечное сечение оболочки имеет две оси симметрии и задано параметрическими уравнениями такого вида:

$$\begin{aligned} Y &= r_0 \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right]; \quad Z = r_0 \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \varphi + \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right]; \\ r_0 &= \frac{a+b}{2}; \quad \xi = 3 \frac{a-b}{a+b}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где  $a, b$  – большая и малая полуоси поперечного сечения.

В этом случае радиус кривизны овала вычисляем согласно такой формулы:

$$r = r_0 (1 + \xi \cos 2\varphi). \quad (8.2)$$

Расчеты выполнены для оболочки постоянной толщины  $h$  с параметрами:

$$r_0/h = 10; \quad a/b = 1,5; \quad E = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi\zeta} = 0,2 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,1933; \quad k = 5/6.$$

В табл. 1 приведены значения безразмерных прогибов  $\tilde{w} = wE_0/hq$  ( $E_0 = 10$  МПа) и безразмерных напряжений  $\tilde{\sigma} = \sigma/q$  ( $\sigma = N/h + M\zeta/h^3$ ) на внешней ( $\tilde{\zeta} = \zeta/h = 0,5$ ) и внутренней ( $\tilde{\zeta} = -0,5$ ) поверхностях оболочки в двух точках контура поперечного сечения (в концах малой и большой полуосей). Данные получены с использованием разработанной методики (аналитически-численного решения) для нескольких значений количества частей  $n$ , на которые разбивается отрезок интегрирования  $[0, \pi/2]$ . Там же представлены результаты аналитического (точного) решения, приведенные в работе [12].

Таблица 1

НДС	$\varphi$	$\tilde{\zeta}$	Аналитически-численное решение					Точное решение
			$n=10$	$n=25$	$n=50$	$n=100$	$n=200$	
$\tilde{\sigma}$	0	0,5	108,056	109,689	109,922	109,981	109,995	110
		-0,5	-92,122	-93,699	-93,925	-93,981	-93,995	-94
	$\pi/2$	0,5	-124,470	-125,388	-125,939	-125,985	-125,996	-126
		-0,5	148,453	149,354	149,938	149,984	149,996	150
$\tilde{w}$	0	0	3,99900	4,09961	4,11413	4,11776	4,11867	4,11898
	$\pi/2$	0	-2,84891	-2,87974	-2,89762	-2,89915	-2,89954	-2,89966
$\Delta_{\max}, \%$			2,00	0,69	0,12	0,03	0,008	0

Анализ данных, представленных в табл. 1, свидетельствует о том, что при разбиении отрезка интегрирования на 10, 25, 50, 100 и 200 частей наибольшее отличие ( $\Delta_{\max}$ ) результатов аналитически-численного решения данной задачи от ее точного решения не превышает, соответственно, 2,00; 0,69; 0,12; 0,03; 0,008(%).

Таким образом, разработанная аналитически-численная методика решения краевых задач для бесконечно длинных некруговых цилиндрических оболочек полностью исключает отрицательное влияние запирающего на сходимость результатов, что значительно повышает точность решения данных задач.

## §9. Числовые результаты и их анализ.

**9.1. Некруговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины.** Вначале представим результаты исследования НДС бесконечно длинной замкнутой цилиндрической оболочкой с эллиптическим поперечным сечением постоянной толщины под действием равномерного внутреннего давления интенсивности  $q$ .

Поперечное сечение координатной поверхности оболочки параметрически задано в виде

$$Y = \frac{a^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}; \quad Z = \frac{b^2 \cos \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}},$$

где  $a, b$  – полуоси эллипса.

Радиус кривизны эллипса вычисляем согласно формуле

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

При решении задачи для параметров оболочки приняты следующие значения:

$$r_0/h = 10; \quad E = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi\zeta} = 0,005E; \quad \nu = 0,3; \quad k = 5/6.$$

В табл. 2 приведены значения безразмерных прогибов  $\tilde{w} = wE/10^4 hq$  и безразмерных напряжений  $\tilde{\sigma} = \sigma/q$  на внешней ( $\tilde{\zeta} = 0,5$ ) и внутренней ( $\tilde{\zeta} = -0,5$ ) поверхностях оболочки в концах малой и большой полуосей ( $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ ). Данные получены для ряда значений отношения полуосей сечения ( $a/b = 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$ ) и двух вариантов расчета:  $K = 1$  (модель Тимошенко);  $K = 2$  (модель Кирхгофа – Лява).

Таблица 2

К	НДС	$\varphi$	$\tilde{\zeta}$	$a/b$					
				1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
1; 2	$\tilde{\sigma}$	0	0,5	10	61	100	130	155	175
			-0,5	10	-43	-83	-115	-141	-161
		$\pi/2$	0,5	10	-46	-97	-142	-182	-219
			-0,5	10	68	120	166	208	245
1	$\tilde{w}$	0	0,0	0,0091	0,6831	1,3210	1,9103	2,4485	2,9380
		$\pi/2$	0,0	0,0091	-0,5568	-0,9409	-1,2018	-1,3783	-1,4960
2	$\tilde{w}$	0	0,0	0,0091	0,3716	0,7201	1,0448	1,3432	1,6157
		$\pi/2$	0,0	0,0091	-0,2876	-0,4820	-0,6084	-0,6893	-0,7395

Из анализа полученных результатов следует, что в случае замкнутых оболочек эллиптического сечения, нагруженных равномерным внутренним давлением, максимальные прогибы имеют место в конце малой полуоси (в точке  $\varphi = 0$ ). Учет деформаций поперечного сдвига ( $K = 1$ ) при расчете оболочек данного вида приводит к увеличению максимальных значений прогибов по сравнению с результатами, полученными для модели Кирхгофа – Лява ( $K = 2$ ). При значениях отношения полуосей сечения  $a/b = 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$  увеличение максимальных прогибов, соответственно, составляет 0; 84; 83; 83; 82; 82(%).

Под действием внутреннего давления оболочка эллиптического поперечного сечения при указанных в табл. 2 значениях отношения полуосей стремится к круговой форме, что вызывает в точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  замкнутого эллипса прогибы разных знаков.

Наибольшие напряжения в замкнутых оболочках действуют в конце большой полуоси на внутренней поверхности оболочки. Результаты решения краевых задач свидетельствуют о том, что напряжения, полученные с привлечением обеих моделей ( $K = 1; 2$ ), для замкнутых оболочек совпадают.

С отклонением формы поперечного сечения от круговой (увеличением отношения  $a/b$ ) максимальные значения всех компонент НДС оболочек существенно возрастают. Так, при расчете оболочки с учетом деформаций поперечного сдвига в случае  $a/b = 2,0$  максимальное напряжение увеличивается в 24,5 раза, а максимальный прогиб – в 323 раза.

**9.2. Некруговая цилиндрическая оболочка переменной толщины.** Далее рассмотрим краевую задачу о НДС замкнутой эллиптической цилиндрической оболочки переменной по направляющей толщины под действием равномерного нормального давления  $q = \text{const}$ . Толщина оболочки изменяется по направляющей согласно закона  $h = h_0(1 + \beta \cos 2\varphi)$ , так что с изменением параметра  $\beta$  вес оболочки остается неизменным [1].

Исследуем влияние изменения толщины оболочки при сохранении веса на распределение прогиба и напряжений вдоль направляющей для оболочки с параметрами:

$$r_0/h_0 = 15; \quad a/b = 2; \quad E = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi c} = 0,005E; \quad \nu = 0,3; \quad k = 5/6;$$

$$\beta = 0; \pm 0,187; \pm 0,3; \pm 0,5.$$

На рис. 6 – 8 показано распределение безразмерных прогибов  $\tilde{w} = wE/10^4 h_0 q$  и напряжений на внешней ( $\tilde{\sigma}^+$ ) и внутренней ( $\tilde{\sigma}^-$ ) поверхностях оболочки вдоль направляющей ( $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 1$ ;  $\tilde{\varphi} = 2\varphi/\pi$ ) в зависимости от изменения толщины ( $\beta = 0; \pm 0,187; \pm 0,5$ ).

В табл. 3 приведены значения максимальных относительных напряжений  $\tilde{\sigma}_{\max}$  и прогибов  $\tilde{w}_{\max}$  для ряда значений коэффициента  $\beta$ .

Таблица 3

НДС	$\beta$						
	-0,5	-0,3	-0,187	0	0,187	0,3	0,5
$\tilde{\sigma}_{\max}$	721	513	450	542	648	713	807
$\tilde{w}_{\max}$	21,623	15,001	13,059	11,137	10,074	9,638	8,967

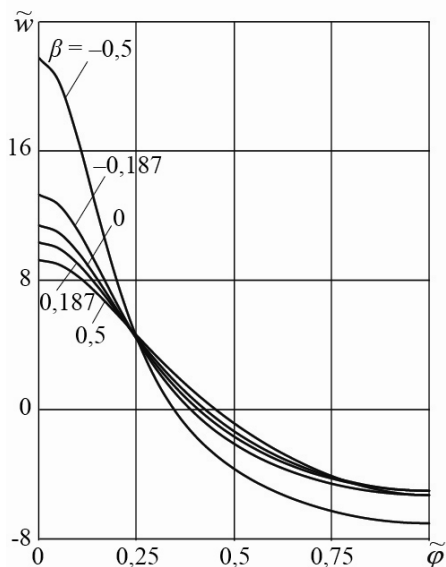


Рис. 6

Из представленных на рис. 6 и в табл. 3 данных следует, что для всех значений  $\beta$  максимальные прогибы оболочки имеют место в конце малой полуоси (в точке  $\varphi = 0$ ). С уменьшением  $\beta$ , т.е. уменьшением толщины в области вершины малой полуоси эллипса, значение максимального прогиба увеличивается и при  $\beta = -0,5$  превышает его значение для оболочки постоянной толщины ( $\beta = 0$ ) в 1,94 раза. Увеличение толщины в этой области ( $\beta = 0,187; 0,3; 0,5$ ) приводит к незначительному уменьшению максимального прогиба.

Полученные результаты (рис. 7, 8 и табл. 3) свидетельствуют о том, что при  $\beta = 0; 0,187; 0,3; 0,5$  напряжения достигают максимальных значений на внутренней поверхности оболочки в сечении  $\varphi = \pi/2$ , при  $\beta = -0,3; -0,5$  – на внешней поверхности в сечении  $\varphi = 0$ , а при  $\beta = -0,187$  – как на внутренней поверхности

оболочки в сечении  $\varphi = \pi/2$ , так и на внешней поверхности в сечении  $\varphi = 0$ , т.е.  $\tilde{\sigma}_{\max} = \tilde{\sigma}^-(\pi/2) = \tilde{\sigma}^+(0) = 450$ . Следовательно, при  $\beta = 0,187; \pm 0,3; \pm 0,5$  максимальные напряжения имеют место в тех сечениях, где толщина оболочки наименьшая.

Применив к данным, приведенным в табл. 3, критерий минимакса [9], который приводит к минимизации максимального напряжения, получаем, что закон изменения толщины (9.3) при  $\beta = -0,187$  является оптимальным.

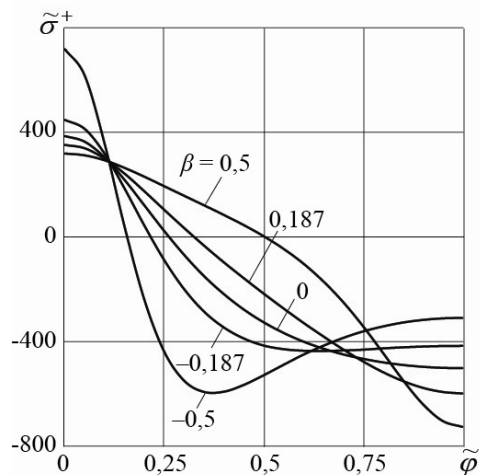


Рис. 7

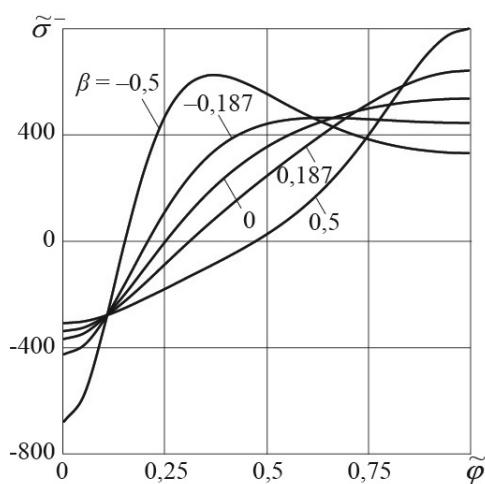


Рис. 8

Если принять за точку отсчета толщину оболочки при  $\beta = -0,187$ , то с уменьшением толщины в области большой полуоси ( $\beta = 0; 0,187; 0,3; 0,5$ ) или в области малой полуоси ( $\beta = -0,3; -0,5$ ) максимальное напряжение увеличивается и превышает значение соответствующего напряжения для оболочки оптимальной толщины на 60% при  $\beta = -0,5$  и на 79% при  $\beta = 0,5$ .

Таким образом, за счет изменения толщины оболочки можно влиять на распределение компонент НДС вдоль направляющей при сохранении веса.

#### Заключение.

В работе разработана аналитически-численная методика решения линейно-упругих задач статики трансверсально-изотропных длинных цилиндрических оболочек некругового сечения с учетом деформаций поперечного сдвига, которая базируется на аналитическом и численном интегрировании, свободная от запирающих и обеспечивает высокую точность результатов. На основе предложенной методики изучено влияние отношения полуосей поперечного сечения, учета деформаций поперечного сдвига и изменения толщины на напряженно-деформированное состояние замкнутой эллиптической цилиндрической оболочки при действии равномерного нормального давления.

В дальнейшем представляет интерес исследование деформирования некруговых цилиндрических оболочек дискретно-переменной толщины или подкрепленных ребрами жесткости с учетом нелинейных свойств материала и особенностей их деформирования [5, 6, 8, 9].

РЕЗЮМЕ. Дано постановку і розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання крайових задач для трансверсально-ізотропних нескінченно довгих некругових циліндричних оболонок змінної товщини при дії статичних навантажень. Систему рівнянь записано на основі співвідношень уточненої теорії непологих оболонок з низькою зсувною жорсткістю. Наведено вирази для внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень замкнутої і відкритої циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу, навантажених поверхневими і погонними силами. Інтеграли у вказаних виразах обчислено з використанням формули трапецій. Представлено числові результати (таблиці, графіки) для замкнутої оболонки еліптичного перерізу при дії рівномірного внутрішнього тиску та дано їх аналіз.

1. Григоренко Я.М., Будає В.Д., Григоренко О.Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. – Миколаїв: Ліон, 2010. – 294 с.
2. Abrosov Yu.Yu., Maksimyyuk V.A., Chernyshenko I.S. Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 5. – P. 529 – 534.
3. Chen Y.N., Kempner J. Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending // AIAA J. – 1976. – 14, N 9. – P. 1235 – 1240.
4. Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V. Deformation of Flexible Noncircular Cylindrical Shells under Concurrent Loads of Two Types // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 7. – P. 754 – 760.
5. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 12. – P. 1269 – 1300.
6. Karpov V., Semenov A. Strength and stability of orthotropic shells // World Appl. Sci. J. – 2014. – 30, N 5. – P. 617 – 623.
7. Kiseleva T. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2015. – 55, N 3. – P. 422 – 431.
8. Lutskaaya I.V., Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Elastic Deformation of Thin Composite Shells of Discretely Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 616 – 623.
9. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 425 – 433.
10. Romano F., Ramlet D. Noncircular rings under shear load // J. Frank. Instit. – 1967. – 284, N 5. – P. 283 – 299.
11. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237–274.
12. Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 386 – 397.
13. Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression // AIAA J. – 1971. – 9, N 2. – P. 250 – 255.
14. Timoshenko S. Strength of materials. Part II: Advanced theory and problems. – 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
15. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin Walled Struct. – 2015. – 97. – P. 114 – 129.
16. Yamada G., Irie T., Tagawa Y. Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // J. Sound and Vibr. – 1984. – 95, N 1. – P. 117 – 126.
17. Young W.C., Budynas R.G. Roark's Formulas for Stress and Strain. – 7th ed. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 852 p.
18. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under pure bending and internal pressure // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2006. – 47, N 3. – P. 406 – 411.

Поступила 28.02.2016

Утверждена в печать 14.03.2017