

С. А. Калоеров, А. А. Кошкин

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ
ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ**

*Донецкий национальный университет;
ул. 600-летия, 21, 83055, Винница, Украина;
koshkin.andrey.aleksandrovich@gmail.com*

Abstract. An approximate method is proposed for solving the problem of linear viscoelasticity for the thin anisotropic plates under transverse bending. By use of the method of small parameter, the initial problem is reduced to a sequence of boundary problems of the applied theory of bending of plates that are solved using the complex potentials. The general form of complex potentials in approximations and the boundary conditions for determination of them are obtained. As an example, the solutions of problems for the plate with elliptic elastic inclusions are given. The results of numerical studies for the plate with one, two elliptical (circular) or linear inclusions are analyzed.

Key words: viscoelasticity, an anisotropic plate, complex potentials of the theory of bending plates, the method of small parameter, generalized least squares method, elastic inclusion, linear inclusion, the moment intensity factors.

Введение.

Несмотря на большую практическую важность решения задач по определению напряженно-деформированного состояния тонких плит, находящихся в условиях поперечного изгиба, до сих пор многие важные задачи инженерной практики остаются нерешенными. Это связано с наличием значительных математических и вычислительных трудностей, которые до сегодняшнего дня трудно было преодолеть.

Значительные результаты в разработке методов решения задач теории изгиба анизотропных плит были получены С.Г.Лехницким [8] еще в середине 30-х годов XX века. Были введены комплексные потенциалы, решены простейшие задачи для односвязных областей. Несколько позже были разработаны методы решения задач для многосвязных сред [7]. Однако неточности, допущенные в общих представлениях комплексных потенциалов, использование метода рядов при удовлетворении граничным условиям в таких сложных задачах и ограниченности вычислительной техники тех времен не позволили решать многие актуальные задачи теории изгиба плит. Разработаны и различные, использующие формализм Стро методы [17] решения задач, численные методы [20].

Возникающие под различными внешними воздействиями напряжения в вязкоупругом теле со временем изменяются, что необходимо учитывать при расчете элементов конструкций на прочность и долговечность, особенно в случаях, когда при эксплуатации конструкций в этих элементах наблюдается высокая концентрация напряжений. Но, несмотря на важность проблемы, исследований в этом направлении выполнено весьма мало. Теоретические основы вязкоупругости разработаны сравнительно давно [9, 10, 12, 21], до сих пор мало решений прикладных задач. До недавнего времени такие исследования были известны лишь для односвязных изотропных [10] и анизотропных [6] пластин, находящихся в условиях обобщенного плоского напря-

женного состояния. В работе [5] предложен метод решения плоских задач вязкоупругости для анизотропных пластин с отверстиями и включениями произвольного количества, сочетания и конфигурации. Он основан на сведении методом малого параметра исходной задачи к решению последовательности задач теории упругости и разработке подхода определения значений всех величин с использованием расшифровок степеней малого параметра операторами Работнова. На этой основе решен ряд плоских задач теории упругости и термоупругости. Что же касается задач теории изгиба тонких вязкоупругих анизотропных плит, до сих пор такие исследования не выполнены.

В данной статье метод малого параметра для решения плоской задачи вязкоупругости распространен на изгиб анизотропных плит. При этом, как частный случай, рассматриваются и изотропные плиты. Даны решения задач для анизотропной плиты с эллиптическими и линейными упругими включениями с численными исследованиями изменений значений моментов в зависимости от времени приложения нагрузки, геометрических и упругих характеристик рассматриваемых плит.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим анизотропную плиту-матрицу, занимающую конечную многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). В частном случае, когда L_0 уходит в бесконечность полностью, будем иметь бесконечную плиту с отверстиями. В некоторые из отверстий без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других материалов с областями $S^{(l)}$, которые находятся с плитой в условиях идеального механического контакта. Плита находится под действием распределенных поперечных усилий на неподкрепленных контурах и моментов на бесконечности, где заданы моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$.

Решение задачи без учета вязкоупругих свойств материала при использовании комплексных потенциалов теории изгиба плит [8] сводится к определению производных комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ для плиты-матрицы и $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ для включений из соответствующих граничных условий.

Производные комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) для плиты-матрицы являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1.1)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (1.2)$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ – жесткости материала плиты, в которых

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta; \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta; \quad b_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta; \\ b_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta; \quad b_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta; \quad b_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \quad (1.3)$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала; $D_0 = 2h^3/3$; h – полутолщина плиты. Эти функции определены в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (1.1), и в данном случае имеют вид [2, 8]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{0k}(z_k), \quad (1.4)$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty; \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty; \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0; \\ C_{11} &= (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta_1; \quad C_{21} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1; \\ C_{31} &= (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22})/\Delta_1; \quad C_{12} = (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta_1; \\ C_{22} &= (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26})/\Delta_1; \quad C_{32} = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/\Delta_1; \\ C_{13} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1; \quad C_{23} = (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta_1; \\ C_{33} &= (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta_1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

A_{kl}, B_{kl} – постоянные, определяемые из решения систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right); \quad (1.6)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{4\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{4\pi D_{11}} \right); \quad (1.7)$$

P_l и M_{xl}, M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних поперечных сил, приложенных к контурам отверстий L_l ; $W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k .

Если функции $W'_k(z_k)$ (1.4) определены, то изгибающие моменты и поперечные силы в точках плиты вычисляются по формулам [2, 7, 8]

$$(M_x, M_y, H_{xy}, N_x, N_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k, \mu_k s_k, -s_k) W_k''(z_k), \quad (1.8)$$

в которых

$$\begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2; \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2; \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2; \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Производные комплексных потенциалов $W_k^{(l)}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) для включений являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (1.10)$$

где $\mu_k^{(l)}$ – корни характеристических уравнений вида (1.2), в которых коэффициенты D_{ij} заменены на постоянные $D_{ij}^{(l)}$ для включений. Эти функции голоморфны в областях $S_k^{(l)}$, получаемых из областей $S^{(l)}$ аффинными преобразованиями (1.10), т.е.

$$W_k^{(l)}(z_k) = W_{0k}^{(l)}(z_k),$$

где $W_{0k}^{(l)}(z_k^{(l)})$ – функции, голоморфные в конечных односвязных областях $S_k^{(l)}$.

Производные комплексных потенциалов должны удовлетворять граничным условиям на внешнем контуре L_0 и на контурах отверстий и включений L_l . В случае включений эти условия имеют вид [2, 8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (g_{kl} W_k'(z_k) - g_{li}^{(l)} W_k^{(l)}(z_k)) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (1.11)$$

в котором

$$\begin{aligned} g_{kl1} &= p_k / \mu_k; \quad g_{k1}^{(l)} = p_k^{(l)} / \mu_k^{(l)}; \quad g_{kl2} = q_k; \quad g_{k2}^{(l)} = q_k^{(l)}; \\ g_{kl3} &= 1; \quad g_{k3}^{(l)} = 1; \quad g_{kl4} = \mu_k; \quad g_{k4}^{(l)} = \mu_k^{(l)}; \\ f_{l1} &= -c_l x + c_{1l}; \quad f_{l2} = c_l y + c_{2l}; \quad f_{l3} = f_{l4} = 0; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$p_k^{(l)}$, $q_k^{(l)}$ – постоянные, вычисляемые по формулам вида (1.9) для включений; c_l – вещественные, а c_{1l} , c_{2l} – комплексные постоянные. В случае отверстия в (1.11) следует опускать $W_k^{(l)}(z_k)$ и принять условия при $i = 1, 2$ (для неподкрепленного контура отверстия) или при $i = 3, 4$ (для подкрепленного контура отверстия).

§2. Решение задачи вязкоупругости.

Если плита обладает вязкоупругими свойствами, то для определения значений исследуемых величин во времени можно воспользоваться принципом Вольтерра [21], т.е. заменить упругие постоянные временными операторами и определить действие этих операторов во времени. Но такое возможно в простейших задачах, когда полученные выражения этих величин по упругому решению представляются произведениями рациональных функций упругих постоянных на функции координат. Для многосвязных областей такие решения задач теории упругости получать невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтера к анализу напряженно-деформированного состояния многосвязных тел невозможно. В связи с этим возникает необходимость и для многосвязных сред получать такие решения, которые явным образом содержали бы упругие постоянные. Это возможно, если выделить из упругих постоянных такую, которая по модулю меньше единицы, и разложить все решение задачи в ряд по ней, как по малому параметру.

Для ортотропного материала коэффициенты деформаций через технические постоянные выражаются так:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_3},$$

где E_i , G_3 , ν_{ji} – соответствующие модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона. Для многих анизотропных материалов из технических постоянных мень-

шими единицы являются только коэффициенты Пуассона ν_{ij} . Поэтому в качестве малого параметра, по которому следует разлагать решение задачи, можно принять любой из коэффициентов, например, ν_{12} . Однако сходимость получаемых решений ускорится, если в качестве малого параметра брать не коэффициент ν_{12} , а его изменение λ с течением времени, т.е. представить ν_{12} в виде

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \quad (2.1)$$

в котором ν_{12}^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента ν_{12} .

Учитывая равенство (2.1), получаем

$$a_{12} = a_{12}^0 - \lambda a_{11}, \quad (2.2)$$

где $a_{12}^0 = -\nu_{12}^0 a_{11}$. Подставив (2.2) в формулу для Δ из (1.3), получим

$$\Delta = -a_{66} a_{11}^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{12}^0 \mp \sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}}. \quad (2.3)$$

Рассматривая обратную к Δ_1 величину и разложив полученную дробь на простейшие дроби, получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{-a_{66} a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right).$$

Подставляя эти значения в формулы (1.3), будем иметь

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}; & b_{22} &= -\frac{a_{11}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}; \\ b_{12} &= -\frac{a_{11} \lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}; & b_{66} &= \frac{1}{a_{66}}; & b_{16} &= b_{26} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Разложив правые части этих выражений на простейшие дроби, находим

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right); & b_{22} &= -\frac{a_{11}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right); \\ b_{12} &= -\frac{a_{11} \lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для реальных материалов $|\lambda / \lambda_1| < 1$, $|\lambda / \lambda_2| < 1$. Тогда приведенные выше дроби, как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, можно представить рядами. В результате получим выражения

$$b_{11} = b_{11}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j1} \lambda^j; \quad b_{22} = b_{22}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j1} \lambda^j; \quad b_{12} = b_{12}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j2} \lambda^j; \quad b_{66} = \frac{1}{a_{66}}; \quad b_{16} = b_{26} = 0, \quad (2.6)$$

в которых

$$\begin{aligned} b_{11}^0 &= \frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}; & b_{22}^0 &= \frac{1}{a_{11} (\lambda_2 - \lambda_1)}; & b_{12}^0 &= \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}; \\ d_{j1} &= (\lambda_2^{-j-1} - \lambda_1^{-j-1}); & d_{j2} &= (\lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1}). \end{aligned}$$

При выводе формулы для b_{12}^0 учтено, что

$$b_{12} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)} \sum_{j=0} (\lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1}) \lambda^j.$$

Учитывая выражения (2.6), формулы (1.9), (1.12) перепишем в виде

$$\begin{aligned} p_k &= \sum_{j=0} p_{jk} \lambda^j; \quad q_k = \sum_{j=0} q_{jk} \lambda^j; \quad s_k = \sum_{j=0} s_{jk} \lambda^j; \quad r_k = 2D_0 b_{66} \mu_k \\ \left[\begin{aligned} p_{jk} &= D_0 (b_{11}^0 d_{j1} + b_{12}^0 \mu_k^2 d_{j2}); \quad q_{jk} = D_0 (b_{12}^0 d_{j2} + b_{22}^0 \mu_k^2 d_{j1}); \\ s_{jk} &= -D_0 ((b_{12}^0 \mu_k d_{j2} + b_{22}^0 \mu_k^3 d_{j1}) + 2b_{66} \mu_k \delta_j^0); \\ p_{jk}^{(l)} &= D_0 (b_{11}^{0l} d_{j1}^{(l)} + b_{12}^{0l} (\mu_k^{(l)})^2 d_{j2}^{(l)}); \quad q_{jk}^{(l)} = D_0 (b_{12}^{0l} d_{j2}^{(l)} + b_{22}^{0l} (\mu_k^{(l)})^2 d_{j1}^{(l)}) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В ряды по малому параметру λ разложим также входящие в выражения для производных комплексных потенциалов (1.4) постоянные Γ_k , A_{kl} , B_{kl} :

$$\Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}; \quad A_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkl}; \quad B_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j B_{jkl}. \quad (2.8)$$

Постоянные Γ_{jk} , A_{jkl} , B_{jkl} определим на основе равенств (1.5) – (1.7) подстановкой в их правые части выражений (2.8). Выполнив эту подстановку и сравнив в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , получим следующие последовательности систем 4-х уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \left(-\frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{66} H_{xy}^\infty}{2D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{22} M_y^\infty}{D_0}, 0 \right); \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \left(\frac{a_{11} M_y^\infty}{D_0}, 0, \frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0}, 0 \right); \quad \Gamma_{jk} = 0 \quad (j \geq 2); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{0kl} &= \left(0, 0, 0, -\frac{a_{11}^2 \lambda_1 \lambda_2 P_l}{2\pi a_{22} D_0} \right); \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{1kl} &= \left(0, 0, 0, \frac{a_{11}^2 P_l (\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi a_{22} D_0} \right); \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{2kl} = \left(0, 0, 0, -\frac{a_{11}^2 P_l}{2\pi a_{22} D_0} \right); \quad A_{jkl} = 0 \quad (j \geq 3);$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{0kl} = \left(0, 0, -\frac{a_{11} \lambda_1 \lambda_2 M_{xl}}{4\pi D_0}, -\frac{a_{11}^2 \lambda_1 \lambda_2 M_{yl}}{4\pi a_{22} D_0} \right); \quad (2.11)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{1kl} = \left(0, 0, \frac{a_{11} M_{xl} (\lambda_1 + \lambda_2)}{4\pi D_0}, \frac{a_{11}^2 M_{yl} (\lambda_1 + \lambda_2)}{4\pi a_{22} D_0} \right);$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{2kl} = \left(0, 0, -\frac{a_{11} M_{xl}}{4\pi D_0}, -\frac{a_{11}^2 M_{yl}}{4\pi a_{22} D_0} \right), \quad B_{jkl} = 0 \quad (j \geq 3).$$

Учитывая приведенные разложения, функции (1.4) представим в виде

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (2.12)$$

где

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\infty} (A_{jkl} z_k + B_{jkl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{j0k}(z_k); \quad (2.13)$$

$W'_{j0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими L_l области S при аффинных преобразованиях (1.1).

Аналогичным образом производные потенциалов для включений представим в виде

$$W_k^{(l)}(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j W_{jk}^{(l)}(z_k). \quad (2.14)$$

Здесь $W_{jk}^{(l)}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях $S_k^{(l)}$.

Производные комплексных потенциалов приближений $W'_{jk}(z_k)$, $W_{jk}^{(l)}(z_k)$ ($k=1, 2$) должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставив (2.12) и (2.14) в граничные условия (1.11) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , получим следующую рекуррентную последовательность граничных условий для определения этих приближений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [g_{0kl} W'_{jk}(z_k) - g_{0kl}^{(l)} W_{jk}^{(l)}(z_k)] = f_{jli}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (2.15)$$

где

$$g_{0k1} = p_{0k} / \mu_k; \quad g_{0k1}^{(l)} = p_{0k}^{(l)} / \mu_k^{(l)}; \quad g_{0kl2} = q_{0k}; \quad g_{0k2}^{(l)} = q_{0k}^{(l)};$$

$$g_{0kl3} = 1; \quad g_{0k3}^{(l)} = 1; \quad g_{0kl4} = \mu_k; \quad g_{0k4}^{(l)} = \mu_k^{(l)};$$

$$f_{j11} = -\delta_j^0 (c_{1x} - c_{1l}) - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[\frac{p_{j-i,k}}{\mu_k} W'_{ik}(z_k) - \frac{p_{j-i,k}^{(l)}}{\mu_k^{(l)}} W_{ik}^{(l)}(z_k) \right];$$

$$f_{j12} = \delta_j^0 (c_{1y} + c_{2l}) - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} [q_{j-i,k} W'_{ik}(z_k) - q_{j-i,k}^{(l)} W_{ik}^{(l)}(z_k)];$$

$$f_{j13} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} [W'_{ik}(z_k) - W_{ik}^{(l)}(z_k)];$$

$$f_{j14} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} [\mu_k W'_{ik}(z_k) - \mu_k^{(l)} W_{ik}^{(l)}(z_k)].$$

После удовлетворения граничным условиям функции приближений $W'_{jk}(z_k)$, $W_{jk}^{(l)}(z_k)$ становятся известными и, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно определить производные комплексных потенциалов для плиты в любой момент времени, а по ним на основе (1.8) и моменты

$$M_x = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \sum_{i=0}^j p_{j-ik} W''_{ik}; \quad M_y = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \sum_{i=0}^j q_{j-ik} W''_{ik};$$

$$H_{xy} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J r_k W_{jk}'' \lambda^j, \quad (2.16)$$

где J – количество оставляемых приближений. При этом, чтобы для плиты получить степени малого параметра λ , следует учитывать, что на основании (2.1) $\lambda = \nu_{12}^* - \nu_{12}^0$, т.е.

$$\nu_{12}^* = \nu_{12}^0 + \lambda. \quad (2.17)$$

Заменив в (2.17) ν_{12}^* его временным оператором, получим [5]

$$\lambda = D_1 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_2^*) \quad (2.18)$$

$$\left(D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right]; \quad D_2 = \frac{\delta_2^* E_1^0}{4 E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} \right); \quad (2.19)$$

E_i^0 – мгновенно упругие значения модулей Юнга E_i ; δ_i^* , β_i^* – реологические постоянные материала плиты, связанные с изменением E_i во времени [9]. Возведя λ по формуле (2.18) в степень j , получим [5]

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{E}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*) \cdot \mathcal{E}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathcal{E}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) - \mathcal{E}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Вычислив λ^j по формуле (2.20) и подставив его в выражения (2.12), определим функции $W'_k(z_k)$ и их производные, следовательно, и исследуемые величины в любой момент времени.

Аналогичные соотношения получаем для вычисления моментов в упругих включениях.

Рассмотрим решения конкретных задач.

§3. Решение задачи для плиты с эллиптическими включениями.

Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту-матрицу с эллиптическими отверстиями L_l ($l=1, \mathcal{L}$) с полуосями a_l , b_l (рис. 1). В отверстия без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других вязкоупругих материалов.

Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана, для производных комплексных потенциалов (2.13) получим выражения [4]

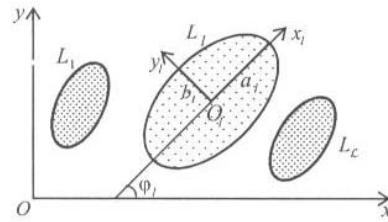


Рис. 1

$$W'_{j0k}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkl n}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (3.1)$$

где ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (3.2)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}; \quad R_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2;$$

$$m_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2R_{kl}; \quad (3.3)$$

x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса L_l и осью $O_l x_l$ вдоль полуоси a_l ; φ_l – угол между направлениями осей координат Ox и $O_l x_l$ основной системы и локальной системы координат, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки; a_{kln} – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты.

Для включений производные комплексных потенциалов приближений будут такими [4]:

$$W'_{jk}{}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)} \left[\varphi_{kn}^{(l)} = \left(\frac{z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)}}{R_{kl}^{(l)}} \right)^n \right]. \quad (3.4)$$

Для определения неизвестных постоянных $a_{jkn}^{(l)}$, $a_{jkn}^{(l)}$ функций (3.1) и (3.4) удовлетворим граничным условиям (2.15). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[g_{0kli} \frac{dW'_{jk}(z_k)}{ds} - g_{0ki}^{(l)} \frac{dW'_{jk}{}^{(l)}(z_k)}{ds} \right] = \frac{df_{jli}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (3.5)$$

Граничным условиям (3.5) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [14]. Для этого на контурах контакта плиты с включениями выберем набор точек $t_m(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и, удовлетворив в них условиям (3.5), получим уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_{0kli} \delta_k \varphi'_{kn}(t_{klm}) a_{jkn} - g_{0ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)}(t_{klm}) a_{jkn}^{(l)} \right] =$$

$$= \frac{df_{jli}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0kli} \delta_k \Gamma_{jk} \quad (i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M_l}; l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (3.6)$$

в которых

$$\delta_k = dz_k / ds; \quad \delta_k^{(l)} = dz_k^{(l)} / ds; \quad \varphi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad \varphi_{kn}^{(l)} = \frac{n(z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)})^{n-1}}{(R_{kl}^{(l)})^n};$$

$$t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}; \quad t_{km} = x_{lm} + \mu_k^{(l)} y_{lm}.$$

Если включение $S^{(l)}$ переходит в прямолинейную упругую линию (соответствующее отверстие – в разрез), то можно вычислить и коэффициент интенсивности моментов (КИМ) k_{1M}^{\pm} (для моментов $M_y^{(l)}$ в локальной системе координат $O_l x_l y_l$) и k_{2M}^{\pm} (для моментов $H_{xy}^{(l)}$ в этой же системе координат), где знаки «–» и «+» вверху относятся к левому и правому концам включения. По аналогии с определением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для концов разрезов в плоской задаче [3] получим формулы

$$k_{1M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - r_k \sin 2\varphi_l \right] G_k;$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{2} (q_k - p_k) \sin 2\varphi_l + r_k \cos 2\varphi_l \right] G_k, \quad (3.7)$$

в которых

$$G_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_l} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln};$$

верхние знаки соответствуют правому и левому концам линейного включения.

Заметим, что в случае плиты с одним эллиптическим включением методом рядов можно получить и точное аналитическое решение задачи в упругой постановке вида

$$\begin{aligned} W'_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}; \quad W'_k(z_k) = a_{k1}^{(1)} \frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}}; \\ (M_x, M_y, H_{xy}) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left[\Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} \right]; \\ (k_{1M}^{\pm}, k_{2M}^{\pm}) &= \frac{1}{\sqrt{a_1}} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (q_k, r_k) a_{k11}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

в котором a_{k11} , $a_{k1}^{(1)}$ – постоянные, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений 4-го порядка

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 (a_{k11} - m_k^{(1)} a_{k1}^{(1)} - \bar{a}_{k1}^{(1)}) &= -\sum_{k=1}^2 [\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1}]; \\ \sum_{k=1}^2 (\mu_k a_{k11} - \mu_k^{(1)} m_k^{(1)} a_{k1}^{(1)} - \bar{\mu}_k^{(1)} \bar{a}_{k1}^{(1)}) &= -\sum_{k=1}^2 [\mu_k \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1}]; \\ \sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k}{\mu_k} a_{k11} - \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} m_k^{(1)} a_{k1}^{(1)} - \frac{\bar{p}_k^{(1)}}{\bar{\mu}_k^{(1)}} \bar{a}_{k1}^{(1)} \right) &= -\sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1} \right]; \\ \sum_{k=1}^2 (q_k a_{k11} - q_k^{(1)} m_k^{(1)} a_{k1}^{(1)} - \bar{q}_k^{(1)} \bar{a}_{k1}^{(1)}) &= -\sum_{k=1}^2 [q_k \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \bar{q}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1}]. \end{aligned}$$

§4. Результаты численных исследований.

Численные исследования проведены для плиты из алюминия (материал М1) [10] и оксида (М2) [6]. Коэффициенты деформаций и реологические постоянные для этих материалов приведены в табл. 1. Для изотропной плиты (материал М1), которая также рассматривалась как анизотропная, коэффициент деформации a_{22} вместо истинного $0,1408 \cdot 10^{-4}$ был принят равным $0,1458 \cdot 10^{-4}$, т. е. незначительно отличным от истинного. В противном случае из-за равенства $a_{11} = a_{22}$ при решении задачи возникнет ситуация деления на ноль, т. к. корни характеристического уравнения (1.2) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$. Как показывают расчеты, проведенные для изотропных плит в упругой постановке с использованием комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, при указанных заменах результаты совпадают с получаемыми для анизотропных плит.

Таблица 1

Постоянные материала	Материал	
	M1	M2
$a_{11} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	0,1408	0,4347
$a_{22} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	0,1458	0,6250
$a_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	-0,0352	-0,0478
$a_{66} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	0,3521	3,2467
α^* , с ^{-0.5}	0,5000	0,8460
$\beta_1^* \cdot 10^3$, с ^{-0.5}	0,00050	0,1570
$\beta_2^* \cdot 10^3$, с ^{-0.5}	0,00049	0,2745
$\delta_1^* \cdot 10^3$, с ^{-0.5}	0,00615	0,0323
$\delta_2^* \cdot 10^3$, с ^{-0.5}	0,00614	0,1295

Аналогичные допущения по изотропному материалу сделаны относительно реологических постоянных β_1^* , β_2^* , δ_1^* и δ_2^* . Для постоянных материалов включений принято, что $a_{ij}^{(l)} = \lambda^{(l)} a_{ij}$, где $\lambda^{(l)}$ – коэффициент относительной жесткости включений $S^{(l)}$.

При проведении численных исследований количество членов N в рядах (3.1), (3.4) и «коллокационных точек» M_l на контурах отверстий L_l увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. В описываемых ниже расчетах для такого удовлетворения граничным условиям в зависимости от расстояний между отверстиями и их количества в рядах для каждого из отверстий оставлялось от 5 до 20 членов и на каждом контуре выбиралось от 100 до 200 «коллокационных точек». Количество приближений J по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения изгибающих моментов в предыдущем приближении более, чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 6 до 10. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для плиты, когда на бесконечности $M_y^\infty = m$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Все результаты приведены с точностью до m/D_0 как множителя.

В табл. 2 для плиты с одним круговым включением радиуса a_1 (рис. 2) в зависимости от его относительной жесткости $\lambda^{(1)}$ и времени приложения нагрузки t для наиболее характерных точек плиты $A(-a_1; 0)$ (или $C(a_1; 0)$) и $B(0; a_1)$ приведены

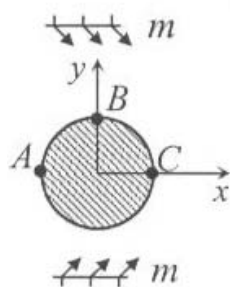


Рис. 2

значения изгибающих моментов M_s , соответствующих напряжениям σ_s на площадках, перпендикулярных контуру включения. Значения для $\lambda^{(1)} = 0$ соответствуют плите с абсолютно жестким включением, а для $\lambda^{(1)} = \infty$ – плите с абсолютно мягким включением (отверстием).

Как видно из табл. 2, с течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом большие изменения происходят лишь в первые 50 часов после приложения нагрузки, а через 200 часов они практически не изменяются, т.е. в плите устанавливается стационарное состояние. Такие же закономерности изменения моментов наблюдаются и в других точках плиты и

включения. В связи с этим в дальнейшем результаты расчетов будем приводить для двух случаев: когда $t = 0$ (в начальный момент времени) и $t = 500$, когда уже установилось стационарное состояние.

Таблица 2

Материал	Точка	$\lambda^{(1)}$	t , час								
			0	50	100	200	300	400	500	600	
M1	C(A)	0	-0,467	-1,243	-1,366	-1,456	-1,490	-1,506	-1,515	-1,520	
		10^{-2}	-0,402	-1,121	-1,234	-1,316	-1,346	-1,361	-1,369	-1,373	
		10^{-1}	0,013	-0,389	-0,448	-0,490	-0,504	-0,511	-0,514	-0,516	
		0,5	0,700	0,631	0,619	0,611	0,608	0,607	0,607	0,606	
		2	1,257	1,294	1,295	1,296	1,296	1,296	1,296	1,296	
		10	1,623	1,685	1,689	1,692	1,692	1,693	1,693	1,693	
		10^2	1,753	1,824	1,829	1,832	1,833	1,833	1,833	1,833	
		∞	1,769	1,841	1,847	1,850	1,851	1,851	1,851	1,851	
	B	0	0,867	1,869	2,007	2,103	2,139	2,156	2,165	2,170	
		0,5	0,069	0,276	0,297	0,310	0,313	0,315	0,316	0,316	
		2	0,016	0,029	0,031	0,032	0,033	0,033	0,033	0,033	
		∞	0,231	0,159	0,153	0,150	0,149	0,149	0,149	0,149	
	M2	C(A)	0	-0,114	-0,340	-0,355	-0,371	-0,380	-0,386	-0,390	-0,394
			10^{-2}	-0,079	-0,295	-0,310	-0,325	-0,333	-0,339	-0,344	-0,348
10^{-1}			0,171	0,022	0,011	0,001	-0,006	-0,010	-0,013	-0,016	
0,5			0,707	0,683	0,680	0,677	0,676	0,674	0,673	0,672	
2			1,283	1,354	1,357	1,360	1,362	1,363	1,363	1,364	
10			1,736	1,856	1,863	1,869	1,872	1,875	1,876	1,878	
10^2			1,911	2,048	2,056	2,063	2,067	2,070	2,072	2,073	
∞			1,934	2,073	2,081	2,088	2,092	2,095	2,097	2,099	
B		0	0,325	0,779	0,803	0,826	0,838	0,847	0,854	0,859	
		0,5	-0,037	0,174	0,185	0,196	0,202	0,206	0,209	0,211	
		2	0,131	0,244	0,251	0,258	0,262	0,264	0,266	0,268	
		∞	0,687	0,770	0,776	0,782	0,786	0,788	0,790	0,792	

На рис. 3 для двух предельных случаев $\lambda^{(1)}$ ($\lambda^{(1)} = 0$ и $\lambda^{(1)} = \infty$) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, изображены графики распределения в плите моментов M_s в начальном и стационарном состояниях. Сплошные и пунктирные линии здесь соответствуют начальному и стационарному состояниям. Кривые 1, 3 относятся к плите из материала M2, а 2, 4 – к плите из материала M1, кривые 1, 2 относятся к плите с абсолютно мягким включением ($\lambda^{(1)} = \infty$), кривые 3, 4 – к плите с абсолютно жестким включением ($\lambda^{(1)} = 0$).

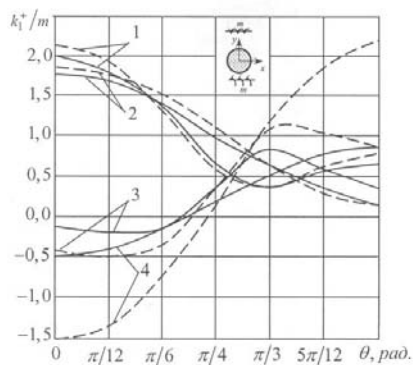


Рис. 3

Как следует из данных табл. 2, рис. 3 и других полученных результатов, при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи контура включения претерпевают значительные изменения, причем наибольшие изменения претерпевают значения моментов в точках C (или A) и B , соответствующих углам $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Наиболее высокая концентрация моментов наблюдается в точке C плиты с абсолютно мягким включением (отверстием) и абсолютно жестким включением. С увеличением жесткости включения моменты вначале убывают (при $\lambda^{(1)} > 1$), а затем растут (при $\lambda^{(1)} < 1$). Наибольшие изменения моментов во времени наблюдаются для абсолютно жесткого включения (более 3 раз при переходе в стационарное состояние), наименьшие изменения – в случае отверстия (около 3,5%). При $\lambda^{(1)} > 10^3$ включение можно принять абсолютно мягким, при $\lambda^{(1)} < 10^{-3}$ – абсолютно жестким. В изотропной плите уровень концентрации моментов больше, чем в рассмотренной анизотропной плите.

Как показывают исследования, на значения моментов вблизи включения существенно влияет отношение полуосей эллиптического включения b_1/a_1 . С уменьшением этого отношения значения моментов вблизи концов большой полуоси включения растут, стремясь к бесконечности, а при $b_1/a_1 < 10^{-3}$ включение можно считать линейным и для него вычислять КИМ.

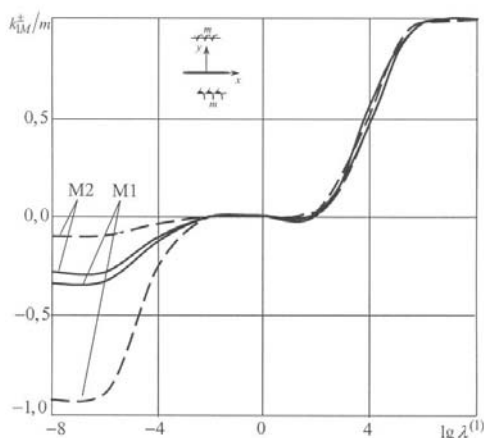


Рис. 4

На рис. 4 изображены графики изменения КИМ (k_{IM}^{\pm}) в зависимости от жесткости материала включения (параметра $\lambda^{(1)}$) в начальном и стационарном состоянии. Видно, что для линейного включения влияние параметра $\lambda^{(1)}$ такое же, как и для кругового включения: $\lambda^{(1)} < 10^{-3}$ – линейное включение можно считать абсолютно жестким, при $\lambda^{(1)} > 10^3$ – абсолютно мягким (трещиной). При $10^{-3} < \lambda^{(1)} < 10^3$ значения КИМ весьма малы и ими можно пренебречь. Поэтому учитывать КИМ для линейных упругих включений, когда жесткость их материалов отличается от жесткости материала плиты менее, чем в 10^3 раз, нет смысла, хотя при использовании других моделей и методов авторы приходят к другим результатам [1, 11]. Для абсолютно мягких линейных включений (трещин) будут контактировать их берега, что следует учитывать при решении задач. Подходы такого учета предложены в работах [13, 15, 16, 18, 19]. Заметим, что для плиты с одним включением использовано и точное решение (3.8). Результаты, получаемые по приближенному решению ОМНК, оказались совпадающими с результатами по точному решению.

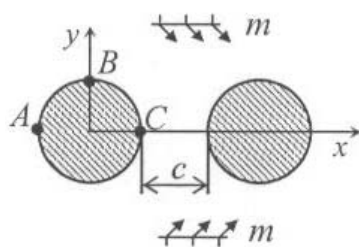


Рис. 5

В табл. 3 для плиты с двумя одинаковыми однотипными (из одного материала) круговыми включениями (рис. 5) радиуса a_1 в зависимости от параметра относительной жесткости включений $\lambda^{(1)}$ и центрального угла θ для различных значений c/a_1 , где c – расстояние между отверстиями, даны значения M_s в точках плиты около левого включения для начального ($t = 0$) и стационарного ($t = 500$) состояний.

Из табл. 3 и других полученных результатов следует, что для случая двух включений сохраняются все описанные ранее для плиты с одним включением закономерности влияния времени и относительной жесткости материала включений. На значения моментов существенное влияние оказывает и расстояние между включениями. При уменьшении расстояния между включениями значения моментов около включений и в точках перемены растут уже в упругой постановке, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают еще большие изменения. Так, если для плиты с одним абсолютно жестким включением (при $c/a_1 = \infty$) в точке C при переходе в стационарное состояние моменты изменяются \approx в 3 раза, то в плите с двумя включениями при $c/a_1 = 0,1$ моменты изменяются почти в 4 раза. Если расстояние между включениями больше диаметра ($c/a_1 > 2$), то влияние одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

Таблица 3

Материал	$\lambda^{(1)}$	Точка	t , час.	c/a_1				
				∞	2	1	0.5	0.1
M1	0	A	0	-0,467	-0,447	-0,449	-0,457	-0,479
			500	-1,515	-1,478	-1,495	-1,530	-1,613
		B	0	0,867	0,779	0,758	0,751	0,756
			500	2,165	1,944	1,896	1,883	1,906
		C	0	-0,467	-0,364	-0,318	-0,368	-0,824
			500	-1,515	-1,278	-1,206	-1,432	-3,126
	∞	A	0	1,769	1,846	1,896	1,946	2,024
			500	1,851	1,932	1,984	2,039	2,127
		B	0	0,231	0,219	0,219	0,223	0,239
			500	0,149	0,141	0,141	0,144	0,154
		C	0	1,769	2,002	2,340	2,945	5,560
			500	1,851	2,089	2,436	3,059	5,821
M2	0	A	0	-0,114	-0,106	-0,106	-0,107	-0,110
			500	-0,387	-0,371	-0,373	-0,380	-0,396
		B	0	0,325	0,294	0,286	0,283	0,286
			500	0,840	0,760	0,739	0,734	0,743
		C	0	-0,114	-0,080	-0,059	-0,065	-0,165
			500	-0,387	-0,304	-0,262	-0,314	-0,723
	∞	A	0	1,934	2,002	2,058	2,121	2,220
			500	2,093	2,160	2,222	2,293	2,412
		B	0	0,687	0,635	0,637	0,656	0,714
			500	0,788	0,721	0,724	0,747	0,816
		C	0	1,934	2,083	2,378	3,037	6,014
			500	2,093	2,216	2,498	3,187	6,443

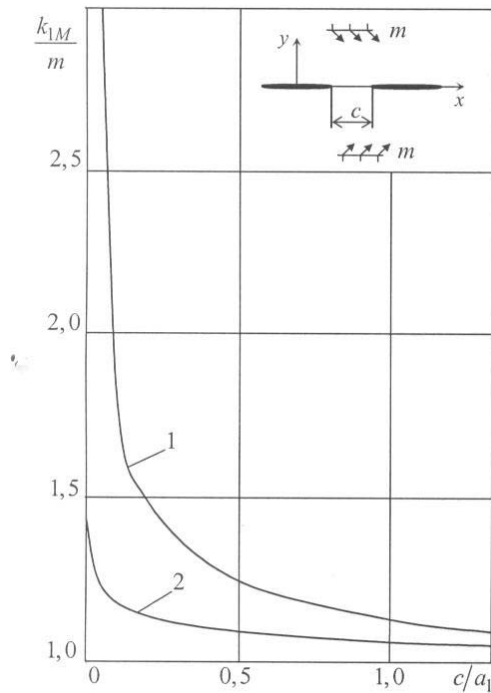


Рис. 6

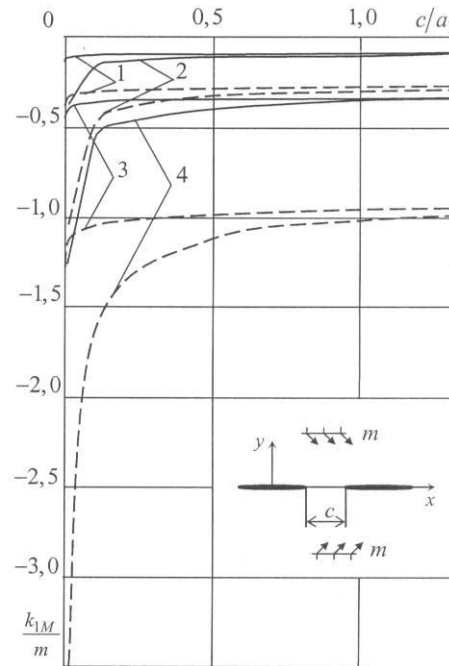


Рис. 7

На рис. 6 для плиты с двумя абсолютно мягкими линейными включениями (трещинами), расположенными вдоль одной прямой, в зависимости от c/a_1 для левого включения приведены значения КИМ k_{1M}^- (для левого конца) и k_{1M}^+ (для правого конца).

Эти коэффициенты не зависят от анизотропии материала и незначительно изменяются во времени, поэтому они приведены для начального состояния. На рис. 7 для плиты с двумя абсолютно жесткими линейными включениями в зависимости от c/a_1 для левого включения изображены графики изменения k_{1M}^- и k_{1M}^+ в начальном (сплошные линии) и стационарном (пунктирные линии) состояниях. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям k_{1M}^- и k_{1M}^+ для материала М2, кривые 3 и 4 – значениям k_{1M}^- и k_{1M}^+ для материала М1. Из рис. 6 и рис. 7 видно, что с уменьшением расстояния между включениями значения КИМ для их вершин в перемычке (внутренних) по модулю резко растут как в начальном, так и в стационарном состояниях. Для внешних вершин КИМ также растут, стремясь к $\sqrt{2}k_{1M}^-$, где k_{1M}^- – значение КИМ для плиты с одним включением, т. е. к КИМ для случая включения двойной длины, вычисляемой по формуле (3.7), где вместо a_1 следует принять $2a_1$.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано наближений метод розв'язання задач лінійної в'язкопружності для тонких анізотропних плит, які знаходяться в умовах поперечного згину. Методом малого параметра початкова задача зведена до послідовності крайових задач прикладної теорії вигину плит, що вирішуються з використанням комплексних потенціалів. Отримано загальний вигляд комплексних потенціалів наближень, крайові умови для їх визначення. Як приклад наведено розв'язання задач для плити з еліптичними пружними включениями. Дано аналіз чисельних досліджень для плити з одним та двома еліптичними (круговими) отворами, а також з лінійними включениями.

1. Бережницький Л.Т., Денисюк И.Т. Оценка локального напряжено-деформированного состояния вблизи остроконечных упругих включений в анизотропной пластинке // Докл. АН УССР. – 1983. – Сер. А, вып. 3. – С. 28 – 32.

2. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 4 (50). – С. 115 – 136.
3. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 6. – С. 56 – 62.
4. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10 – 26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
5. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 51 – 70.
6. Каминский А.А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 159 с.
7. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К., Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
10. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
11. Стацук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 358 с.
12. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An introduction. – New York: Academic Press, 1971. – 245 p.
13. Dempsey J.P., Shekman I.I., Slepyan L.L. Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids and Struct. – 1998. – **35**. – P. 4077 – 4089.
14. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. – New York: Prentice Hall, 1977. – 270 p.
15. Joseph P.F., Erdogan F. Bending of thin Reissner plate with a through crack // J. Appl. Mech. – 1991. – **58**. – P. 842 – 846.
16. Heming F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Int J. Fracture. – 1980. – **16**, N 4. – P. 289 – 304.
17. Hsieh M.C., Hwu C. Anisotropic elastic plates with holes/cracks/inclusions subjected to out-of-plane bending moments // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**, N 19. – P. 4905 – 4925.
18. Kwon Y.W. Finite element analysis of crack closure in plate bending // Comput. Struct. – 1989. – **32**, N 6. – P. 1439 – 1445.
19. Murthy M., Raju K., Viswanath S. On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory // Int J. Fracture. – 1981. – **17**. – P. 537 – 552.
20. Szilard R. Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods. – New Jersey: John Wiley and Sons., 2004. – 1056 p.
21. Volterra V. Lecons sur the les fonctions de lignes. – Paris: Qauthier Villaed, 1913. – 230 p.

Поступила 21.07.2016

Утверждена в печать 30.05.2017