

М. Ф. Селиванов

О МЕДЛЕННОМ РОСТЕ ТРЕЩИНЫ С КОНТАКТИРУЮЩИМИ  
БЕРЕГАМИ В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmtech.kiev.ua*

**Abstract.** An algorithm of solving the problem on slow growth of mode I crack propagation with a partial zone of the crack faces contact is proposed. This algorithm is based on the cohesive crack model, the iterative method of constructing the solution elastic for elastic opening displacement, and the correspondence principle that allows to write the depending on time opening displacement in the Boltzmann-Volterra form. As a fracture criterion, the deformation criterion with constant values of critical opening displacement and the cohesive strength during the quasi-static crack growth is used. This algorithm is illustrated by a numerical example for the problem with tensile loading at infinity and the pair of symmetrically applied point forces that cause the crack faces contact. When the crack being propagated, then the zone of crack faces contact is vanished what is accompanied by the fast transition to the dynamic fracture.

**Key words:** cohesive crack, viscoelastic solids, slow crack growth, contact of crack faces.

**Введение.**

Анализируя напряженное состояние тела с трещиной при сложной геометрии и схеме нагружения, заранее неизвестно – полностью раскрыта трещина или ее берега полностью или частично контактируют. В задачах теории упругости для трещин общепризнанным является требование [3] неотрицательности раскрытия. С целью выполнения этого требования необходимо проведение полного исследования, включающего определение перемещений берегов трещины и, в случае их перекрытия, введение в рассмотрение контактных напряжений, исключающих взаимное проникновение берегов.

Если материал тела с трещиной обладает наследственными свойствами, то при распространении трещины конфигурация взаимодействия берегов может меняться со временем, что может привести к увеличению скорости ее подрастания. Ниже рассмотрена классическая задача механики разрушения для иллюстрации этого явления. Основные концепции моделирования распространения трещин в вязкоупругих материалах освещены в [4, 7, 8, 10]. Используя модель длительного разрушения [4], полагаем, что параметры трещиностойкости не зависят от времени при докритическом распространении трещины.

Объектом исследования данной работы является кинетика роста сквозной трещины нормального отрыва в бесконечной пластине, материал которой обладает наследственными свойствами. Исследуем квазистатический устойчивый рост имеющейся к моменту приложения нагрузки трещины. Распространение трещины происходит в изотермических условиях при постоянном докритическом уровне внешней нагрузки вследствие вязкоупругих свойств материала пластины.

В основу исследования медленного роста трещины положена модель трещины с зоной сцепления [4, 5, 9]. В момент приложения нагрузки  $t = 0$  трещина находится в докритическом состоянии – раскрытие в вершине трещины полудлины  $\lambda$  не превы-

шает предельного уровня:  $\Delta(0, \lambda(0)) < \Delta_{\max}$ . Вследствие ползучести раскрытие  $\Delta(t, \lambda(0))$  со временем достигает критического значения  $\Delta_{\max}$ , завершая инкубационный период и иницируя начало роста длины трещины  $\lambda(t)$ .

Нормальное раскрытие трещины в линейно вязкоупругом теле будем искать в виде интеграла Больцмана – Вольтерра [4]

$$\Delta(t, x) = \int_{-\infty}^t l(t-\tau) \frac{\partial \tilde{\Delta}(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

где величины  $\Delta(t, x)$  и  $\tilde{\Delta}(t, x)$  имеют размерность длины, функция ползучести  $l(\mathcal{G})$  – безразмерная (отнесена к своему мгновенному значению). Величина  $\tilde{\Delta}(t, x)$  является значением упругого раскрытия на линии трещины на расстоянии  $x - \lambda(t)$  от ее вершины; тильда над  $\Delta$  указывает, что эта величина не является интегральной характеристикой, в ее выражении содержатся только мгновенные упругие постоянные (что дает ей физический смысл лишь в начальный момент времени). В числовом примере функция ползучести получена при помощи обратного преобразования Лапласа на основе характеристики релаксации, записанной в форме экспоненты дробного порядка. Такой подход может быть применен и в более сложном случае ортотропии вязкоупругих свойств [6].

### 1. Упругое решение задачи.

Решение граничной задачи теории трещин представим сингулярным интегральным уравнением [1]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} = p(x), \quad x \in (-a, a), \quad (2)$$

справедливым для прямолинейной трещины с самоуравновешенным напряжением  $p(x)$  на ее берегах. В этом уравнении величина  $g(x)$  является плотностью распределения раскрытия (эту величину следует определить в ходе решения задачи).

Решение (2) должно также удовлетворять условию

$$\int_{-a}^a g(t) dt = 0, \quad (3)$$

которое обеспечивает однозначность перемещений. В случае четности функции  $p(x)$  функция  $g(x)$  является нечетной и условие (3) удовлетворяется автоматически.

Скачок перемещений связан с плотностью их распределения следующим соотношением:

$$\Delta(x) = L \int_{-a}^x g(t) dt, \quad L = 4/E, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости.

Будем искать  $g(x)$  в виде линейной функции формы

$$g(x) = g_k(x), \quad x \in (b_k, b_{k-1}), \quad 0 < k \leq 2n; \quad (5)$$

$$g_k(x) = g_k A_k(x) + g_{k-1} [1 - A_k(x)], \quad A_k(x) = (b_{k-1} - x)/h,$$

где  $b_k$  являются квадратурными точками, которые разбивают на  $2n$  частей равной длины  $h$  отрезок  $[-a, a]$  ( $b_0 = a$ ,  $b_n = 0$ ). Для такой  $g(x)$  интеграл в (2) примет вид

$$\sum_{k=1}^{2n} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{g_k(t) dt}{t-x} = \sum_{k=0}^{2n} g_k J_k(x), \quad (6)$$

где

$$J_0(x) = \xi_1(x), J_n(x) = \zeta_n(x); J_k(x) = \xi_{k+1}(x) + \zeta_k(x) \quad (k=1, \dots, 2n-1);$$

$$\xi_k(x) = C_k(x) - \zeta_k(x); \zeta_k(x) = C_k(x)A_k(x) + 1; C_k(x) = \ln \left| \frac{1 - A_k(x)}{A_k(x)} \right|.$$

Зафиксируем вершину трещины в одной из квадратурных точек и удовлетворим уравнение (2) в точках коллокации  $\eta_m = b_m + h/2$ ,  $m = 1, \dots, 2n$ .

Учитывая симметрию ( $g_{2n-k} = -g_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $g_n = 0$ ), сведем (2) и (6) к системе для определения  $g_k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), т.е.

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} [J_{mk} + J_{(2n+1-m)k}] g_k = p(\eta_m) \quad (m=1, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$J_{mk} = J_k(\eta_m), J_{m0} = T'_{m1} - K_{m0}; J_{mk} = T'_{m(k+1)} - T'_{mk} \quad (k=1, \dots, n-1);$$

$$T'_{mk} = (T_{mk} - T_{m(k-1)})/h; T_{mk} = b_k + (\eta_m - b_k)K_{mk}; K_{mk} = \ln |b_k - \eta_m|.$$

Раскрытие в точках коллокации, согласно (4) и (5), примут вид

$$\Delta(\eta_m) = -Lh \sum_{k=0}^{n-1} W_{mk} g_k \quad (m=1, \dots, n), \quad (8)$$

где

$$W_{10} = 3/8; W_{m(m-1)} = 7/8 \quad (m > 1); W_{mm} = 1/8;$$

$$W_{m0} = 1/2 \quad (m > 1); W_{mk} = 1 \quad (0 < k < m-1); W_{mk} = 0 \quad (k > m).$$

Обозначим через  $\Delta(b_k)$  вектор, состоящий из величин раскрытия в точках коллокации  $\eta_m$ , полученных для трещины с вершиной в точке  $b_k$  согласно (8). Тогда для произвольного положения вершины трещины  $\lambda \in (b_{k+1}, b_k)$  можно приближенно определить раскрытия в узлах коллокации в следующем виде:

$$\Delta(\lambda) = \Delta(b_k) - \frac{b_k - \lambda}{h} [\Delta(b_k) - \Delta(b_{k+1})]. \quad (9)$$

## 2. Медленный рост трещины.

Соотношение для раскрытия трещины в вязкоупругом теле получим при помощи решения соответствующей задачи теории упругости путем применения принципа упруго-вязкоупругой аналогии [9].

Пусть внешнее нагружение приложено в момент времени  $t = 0$ . Заменяя в (1) функцию  $\tilde{\Delta}(\tau, x)$  на  $H(\tau)\tilde{\Delta}(\tau, x)$  ( $H$  – функция Хевисайда), запишем выражение для раскрытия в точке  $x$  в момент времени  $t$

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}(0, x) + \int_0^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}(\tau, x)d\tau. \quad (10)$$

Учитывая то, что во время инкубационного периода, который длится до момента времени  $t = t_0$ , положение вершины трещины  $\lambda$  не изменяется,  $\tilde{\Delta}(0, x) = \tilde{\Delta}(t_0, x)$ , выражение для раскрытия (10) в вершине трещины имеет вид

$$\Delta[t, \lambda(t)] = l(t)\tilde{\Delta}[t_0, \lambda(t)] + \int_{t_0}^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}[\tau, \lambda(t)]d\tau. \quad (11)$$

Определим положение  $\lambda$  в моменты времени  $t_k = k \cdot \Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Обозначая  $\lambda_k = \lambda(t_k)$  и приравнявая выражение для раскрытия (11) критическому значению, запишем уравнение для определения  $\lambda_k$ :

$$l(t_k)D_0 + \sum_{i=1}^k \Lambda_i (D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max}, \quad (12)$$

где приняты такие обозначения:

$$\Lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) d\tau; \quad D_i = \tilde{\Delta}(t_i, \lambda_k) = \tilde{\Delta}_{ij} - \frac{\eta_j - \lambda_k}{h} (\tilde{\Delta}_{ij} - \tilde{\Delta}_{i,j+1}), \quad \eta_{j+1} \leq \lambda_k \leq \eta_j, \quad (13)$$

а величина  $\tilde{\Delta}_k = \Delta(\lambda_k)$  определяется упругим решением (9). Величины  $\lambda_k$  определим численным методом; для каждой вариации этой величины следует пересчитывать величины  $\tilde{\Delta}_k$  и  $D_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ), используя полученные на предыдущих шагах значения  $\tilde{\Delta}_m$  ( $m = 0, \dots, k-1$ ). Геометрические характеристики  $D$  и  $\tilde{\Delta}$  проиллюстрированы при помощи рис. 1.

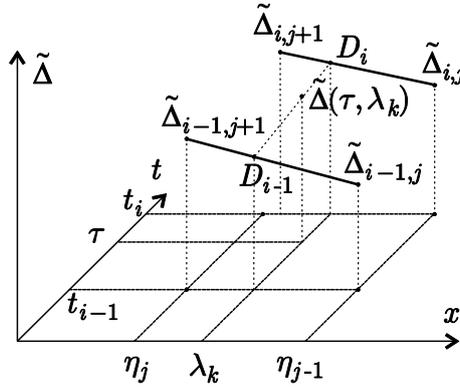


Рис. 1

Величины, характеризующие свойства ползучести материала, легко вычислим, используя следующее соотношение:

$$\Lambda_{k-i+1} = I[i\Delta t] - I[(i-1)\Delta t], \quad i = 1, \dots, k, \quad I(t) = \int_0^t l(\tau) d\tau, \quad (14)$$

которое позволяет при определении  $\lambda_k$  доопределять лишь величину  $I[k\Delta t]$ .

Таким образом, уравнение (12) позволяет последовательно определять положение вершины трещины  $\lambda_k$  в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Время инкубационного периода  $t_0$  получим из уравнения

$$l(t_0)D_0 = \Delta_{\max}, \quad (15)$$

где  $D_0 = \tilde{\Delta}(0, \lambda_0) = \tilde{\Delta}(t_0, \lambda_0)$  можно определить согласно (13).

Для исследования релаксационных свойств материала используем следующее выражение для вязкоупругого модуля:

$$E(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)E_{\delta,1}(-bt^\delta), \quad (16)$$

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)} - \text{функция Миттаг - Леффлера}; \quad (17)$$

$\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. При  $\delta=1$  и  $\gamma=1$  функция (17) превращается в экспоненту.

Для построения зависимости отрыва от времени воспользуемся принципом упруго-вязкоупругой аналогии [9]. Заменяем зависимость от времени характеристику релаксации (16) соответствующей преобразованной величиной

$$\tilde{E}(s) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) \frac{s^\delta}{s^\delta + b},$$

где  $\tilde{E}(s) = s\mathcal{L}\{E(t)\}$  – преобразование Лапласа – Карсона функции времени  $E(t)$ ;  $s$  – параметр преобразования. Здесь использовано следующее свойство функции Миттаг-Леффлера:

$$\mathcal{L}\{t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}(-bt^\delta)\} = \frac{s^{\delta-\gamma}}{s^\delta + b}. \quad (18)$$

Определим изображение Лапласа – Карсона функции  $l(t) = E_0 / E(t)$ :

$$\tilde{l}(s) = \frac{E_0}{\tilde{E}(s)} = \left( \frac{1}{\varkappa} + \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \frac{s^\delta}{s^\delta + b} \right)^{-1} = \varkappa + (1 - \varkappa) \frac{s^\delta}{s^\delta + b'}, \quad (19)$$

где  $\varkappa = E_0 / E_\infty$ ,  $b' = b / \varkappa$ . Тогда, при помощи (18), во временной области получим

$$l(t) = \varkappa + (1 - \varkappa) E_{d,1}(-b't^\delta). \quad (20)$$

### 3. Числовой пример.

Рассмотрим задачу, соответствующую параметрам модели и схеме нагружения рис. 2.

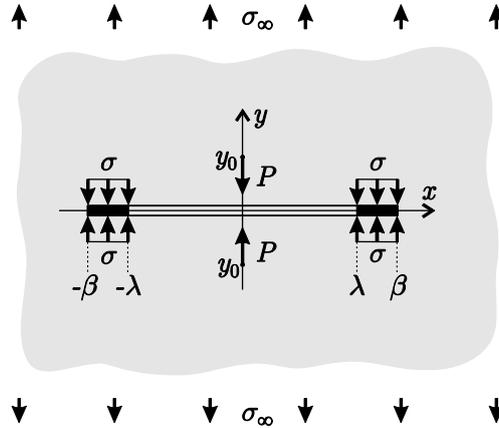


Рис. 2

Выберем интервал поиска функции плотности отрыва  $(0, a) = (b_n, b_0)$  таким образом, чтобы  $a > \beta$  и будем решать задачу (2) с контурными условиями

$$p(x) = -\sigma_\infty + \frac{Py_0}{\pi(x^2 + y_0^2)} \left[ 1 - \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \frac{x^2 - y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right] + \begin{cases} 0, & |x| < \lambda; \\ \sigma - \sigma_c(x), & |x| > \lambda, \end{cases} \quad (21)$$

где в случае плоского напряженного состояния  $\varkappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Параметр материала  $\varkappa$  принимаем независимым от времени при исследовании распространения трещины.

Напряжение  $\sigma_c(x)$  в (21) исключает перекрытие берегов трещины. Это напряжение и соответствующий отрыв можно определить при помощи следующей итеративной процедуры:

1) решаем систему уравнений  $\Delta(\lambda) = 0$  с неизвестными значениями функции плотности отрыва  $g_k$  в квадратурных точках  $b_k$  (левые части этой системы приведены в (8)); вычисляем соответствующее контактное напряжение

$$\sigma_c(\eta_m) = p(\eta_m) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} J_{mk} g_k; \quad (22)$$

2) в системе (7) уравнения с номерами, удовлетворяющими условию  $\sigma_c(\eta_m) > 0$ , меняем на уравнения  $\Delta(\eta_m) = 0$ . Решив полученную систему, определим новые значения  $g_k$  и соответствующие напряжения  $\sigma_c(\eta_m)$  согласно (22).

Повторяем последний шаг до тех пор, пока все  $\sigma_c(\eta_m)$  не станут неотрицательными. Полученные  $g_k$  определяют  $\Delta(\lambda)$  согласно (8).

Предложенный алгоритм позволяет не использовать условие конечности напряжений в явной форме для определения длины сцепления. Такой подход не дает точного значения для длины зоны сцепления, но этот параметр часто не является характеристикой трещиностойкости и может быть отнесен к внутренним параметрам задачи.

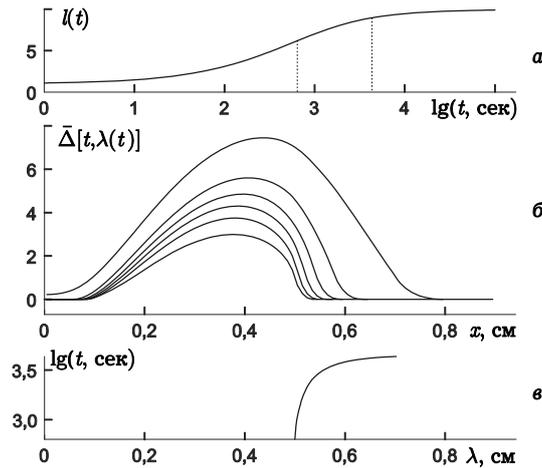


Рис. 3

На рис. 3, а приведена относительная характеристика ползучести и обозначен интервал докритического развития трещины, проиллюстрированного ниже. Так, в блоке б рисунка изображены контуры растущей трещины, а в блоке в – соответствующая кинетическая кривая. Величина  $\bar{\Delta}$  является отнесенным к  $\Delta_{\max}$  раскрытием в точках  $\eta_m$ . Контуры приведены для моментов времени  $t_0 = 634$  сек,  $t_m = t_0 + 15\Delta t$ ,  $m = 1, \dots, 5$ . Решения получены при  $E = 10^4$  МПа,  $E_\infty = 0,1$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $b = 0,1$  сек $^\alpha$ ,  $\alpha = 0,7$  (реологические параметры)  $\sigma = 35$  МПа,  $\Delta_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-3}$  см (параметры трещиностойкости),  $\sigma_\infty = 17,5$  МПа,  $P = \sigma_\infty \cdot 1$  см,  $\lambda_0 = 0,5$  см,  $y_0 = 0,3$  см (силовые и геометрические параметры),  $a = 0,9$  см,  $h = 0,01$  см,  $\Delta t = 50$  сек (параметры дискретизации).

Анализируя полученный результат, следует отметить уменьшение зоны контакта при распространении трещины. После исчезновения зоны контакта достаточно быстро завершается этап докритического роста.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про повільне поширення тріщини нормального відриву з частковою зоною контакту берегів. В основу алгоритму покладено модель тріщини з зоною зчеплення, ітеративний метод побудови розв'язку для пружного розкриття і принцип пружно-в'язкопружної аналогії, який дозволяє записати залежне від часу розкриття в формі Больцмана – Вольтерра. Як критерій поширення тріщини, використано деформаційний критерій зі сталою величиною критичного розкриття і міцності зчеплення протягом квазістатичного росту тріщини. Алгоритм проілюстровано числовим прикладом із розтягуючим на нескінченності зусиллям і симетричною відносно лінії тріщини системою двох зосереджених сил, що викликають контакт берегів. При поширенні тріщини зона контакту берегів зникає, що супроводжується швидким переходом до динамічного етапу поширення.

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Guz A.N. On Physically Incorrect Results in Fracture Mechanics // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1041 – 1051.
4. Kaminsky A.A. Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 485 – 548.
5. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of Tension Along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 130 – 148.
6. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.A. Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 293 – 302.
7. Knauss W.G. A review of fracture in viscoelastic materials // Int. J. Fract. – 2015. – **196**. – P. 99 – 146.
8. Schapery R.A. Time-Dependent Fracture: Continuum aspects of crack growth // Encyclopedia of Materials Science and Engineering (Ed. M.B.Bever.). – New York: Pergamon Press, 1986. – P. 5043 – 5053.
9. Slepyan L.I. Models and Phenomena in Fracture Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2002. – 587 p.
10. Williams J.G. Fracture Mechanics of Polymers. – New York: Wiley, 1984. – 320 p.

Поступила 06.09.2016

Утверждена в печать 30.05.2017