

И. Л. Иванов

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В МОДЕЛЯХ ИМПУЛЬСНЫХ ЭНЕРГОСИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua*

Abstract. A global complete chaos synchronization in power systems with delay under impulsive perturbations is studied. The sufficient conditions of exponential synchronization are established basing on the theory of stability of impulsive differential equations with delay. The illustrative examples are given that demonstrate the applicability and effectiveness of the obtained results.

Key words: power systems, Lyapunov stability, Lyapunov method, systems with delay and impulsive effects, chaos synchronization.

Введение.

Детерминированный хаос – явление в нелинейной динамике, привлекающее в настоящее время широкое внимание специалистов [3 – 5]. Оно установлено и хорошо изучено в ряде моделей нейронных сетей, параллельной обработки изображений, электротехники, биофизики, химии, финансовой математики, популяционной биологии, защиты информации и др. [6, 16, 27]. Хаос может наблюдаться в таких математических моделях как каскады, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с частными производными, а также дифференциальные уравнения с запаздыванием [22], которые могут содержать и импульсное воздействие [12].

Несмотря на то, что явление хаоса в нелинейной системе обычно расценивается как нежелательное ввиду сложности прогнозирования состояния системы в будущем, задача синхронизации двух хаотических систем, в ряде случаев находит успешное решение, что может показаться контринтуитивным на первый взгляд [17, 18]. Изученными в хаотических системах являются такие типы синхронизации, как фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием (lag synchronization) либо опережением (anticipating synchronization), полная синхронизация и др. [9, 17 – 20, 24].

Изучение и синхронизация хаоса в электро-энергетических системах являются актуальными задачами ввиду необходимости избежания нежелательного поведения этих систем и, в частности, спонтанных отключений. Такой синхронизации посвящены, например, работы [10, 14, 25], а в работах [13, 21] рассмотрена синхронизация моделей энергосистем с запаздыванием. Возможность кратковременных перебоев в работе энергосистем, вызванных внешними факторами, указывает на актуальность исследования моделей энергосистем, содержащих не только запаздывание, но и импульсное воздействие [7], хотя хаотическая синхронизация в таких моделях остаётся неисследованной. Системы с запаздыванием и импульсным воздействием широко изучаются в задачах механики [8]. Такие системы принадлежат к классу так называемых гибридных систем, обзор которых приведён в [15].

Данная статья посвящена проблеме полной хаотической синхронизации в двух связанных моделях электро-энергетических систем с запаздыванием и импульсным воздействием, в которых присутствуют шины постоянного напряжения. Достижение экспоненциальной синхронизации проводится на основе данных выходного сигнала в терминах эталонной и управляемой систем.

1. Постановка задачи.

Для произвольного связного множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ определим класс функций $PC^n(\Omega)$, состоящий из таких $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, что:

- (1) x непрерывны слева везде на Ω ;
- (2) x обладают не более чем счётным числом точек разрыва первого рода.

Рассмотрим модель электро-энергетической системы с запаздыванием при импульсных возмущениях в терминах угла отклонения θ в виде

$$\begin{aligned} M\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + P_{\max} \sin \theta &= P_m + P_\tau; \quad t \neq \tau_k; \quad k \in \mathbb{N}; \\ \dot{\theta}(\tau_k^+) &= I(\theta(\tau_k)); \quad \dot{\theta}(\tau_k); \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1)$$

где M – момент инерции; D – постоянная демпфирования; P_{\max} – максимальная мощность генератора; $P_m = A \sin wt$ – мощность машины; $P_\tau = r \sin(R\theta(t-\tau))$ – действие с постоянным временем запаздывания $\tau > 0$, I – линейная по своим аргументам функция, отвечающая за импульсное возмущение; A, w, r, R – постоянные. Систему (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - \beta \sin x_1 + f \sin wt + \varepsilon \sin(Rx_1(t-\tau)); \quad t \neq \tau_k; \quad k \in \mathbb{N}; \\ x_2(\tau_k^+) &= c_{k0} + c_{k1}x_1(\tau_k) + c_{k2}x_2(\tau_k); \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $c = D/M$, $\beta = P_{\max}/M$, $f = A/M$, $\varepsilon = r/M$.

Пусть $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, тогда, принимая во внимание выход y , получим систему в векторном виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) + f_\tau(x(t-\tau)); \quad t \neq \tau_k; \quad k \in \mathbb{N}; \\ x(\tau_k^+) &= C_{k0} + C_k x(\tau_k); \quad k \in \mathbb{N}; \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{bmatrix}; \quad f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \sin(x_1) + f \sin(wt) \end{bmatrix}; \\ f(x(t-\tau)) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \sin(Rx_1(t-\tau)) \end{bmatrix}; \quad C_{k0} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{k0} \end{bmatrix}; \quad C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{k1} & c_{k2} \end{bmatrix}; \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}. \end{aligned}$$

Решения этой системы рассматриваем в классе $PC^2[-\tau, \infty)$.

Как известно [21], при $c_{k1} = 0$, $c_{k2} = 1$ из системы (3) образуется непрерывная система дифференциальных уравнений, поведение которой оказывается хаотическим при некоторых значениях её параметров.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы получить условия синхронизации для двух идентичных энергосистем с запаздыванием при импульсных возмущениях при помощи регулятора обратной связи, основанного на выходных данных. Для этого рассмотрим две системы: эталонную

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= Ax_m + f(x_m) + f_\tau(x_m(t-\tau)), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}; \\ x_m(\tau_k^+) &= C_{k0} + C_k x_m(\tau_k), \quad k \in \mathbb{N}; \\ y_m &= Cx_m \end{aligned} \quad (4)$$

и управляемую

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= Ax_s + f(x_s) + f_\tau(x_s(t-\tau)) + L(y_s - y_m), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}; \\ x_s(\tau_k^+) &= C_{k0} + C_k x_s(\tau_k), \quad k \in \mathbb{N}; \\ y_s &= Cx_s, \end{aligned} \quad (5)$$

векторы состояния в которых обозначены как x_m и x_s , соответственно; $C = [c_1 \ c_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ – матрица усиления выхода, причём пара (A, C) – наблюдаема. $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ – вектор связи, построенный для достижения синхронизации между системами (4) и (5). Если определить ошибку синхронизации между системами (5) и (4) равенством $e = [e_1 \ e_2]^T = [x_{s1} - x_{m1} \ x_{s2} - x_{m2}]^T$, то её динамика будет подчиняться системе

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + f(x_s) - f(x_m) + f_\tau(x_s(t-\tau)) - f_\tau(x_m(t-\tau)) + LCe = \\ &= (A + LC + F(t))e(t) + F_\tau(t)e(t-\tau), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$e(\tau_k^+) = C_k e(\tau_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta(\sin x_{s1} - \sin x_{m1}) & 0 \\ x_{s1} - x_{m1} & 0 \end{bmatrix}; \\ F_\tau(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon(\sin(Rx_{s1}(t-\tau)) - \sin(Rx_{m1}(t-\tau))) & 0 \\ x_{s1}(t-\tau) - x_{m1}(t-\tau) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно теоремы о среднем значении имеем:

$$\begin{aligned} \sin x_{s1} - \sin x_{m1} &= \cos \eta_1 \cdot (x_{s1} - x_{m1}); \\ \eta_1 &\in [x_{s1}, x_{m1}] \text{ или } [x_{m1}, x_{s1}] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sin(Rx_{s1}(t-\tau)) - \sin(Rx_{m1}(t-\tau)) &= R \cos \eta_2 \cdot (x_{s1}(t-\tau) - x_{m1}(t-\tau)); \\ \eta_2 &\in [Rx_{s1}(t-\tau), Rx_{m1}(t-\tau)] \text{ или } [Rx_{m1}(t-\tau), Rx_{s1}(t-\tau)]. \end{aligned}$$

Функции $F(t)$ и $F_\tau(t)$ теперь можно представить в виде

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta \cos \eta_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_\tau(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon R \cos \eta_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Далее покажем, как выбором подходящего регулятора обратной связи можно достигнуть синхронизации между системами (4) и (5), которая эквивалентна выполнению условия $\|x_m(t) - x_s(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$ при любых начальных данных для этих систем.

Таким образом, достижение синхронизации при помощи регулятора обратной связи равносильно выбору такой матрицы связи L , чтобы тривиальное состояние равновесия системы (6) было асимптотически устойчивым.

2. Вспомогательный результат.

Доказательство основного результата проводится на основе следующей теоремы, устанавливающей достаточные условия устойчивости для одного общего случая систем с запаздыванием и импульсным воздействием.

Рассмотрим систему с запаздыванием и импульсным воздействием в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t); \quad t \neq \tau_k; \quad x(\tau_k^+) = I_k(x); \quad k \in \mathbb{N} \quad (9)$$

и начальные условия к ней в виде

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (10)$$

где $x \in PC^n[-\tau, \infty)$, $f: [-\tau, \infty) \times PC^n[-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна по первому аргументу и липшицева по второму, $I_k: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна, $\tau_k \rightarrow \infty$, когда $k \rightarrow \infty$. Из

сформулированных предположений следует, что начальная задача (9), (10) обладает единственным решением на $[t_0, \infty)$.

Определение 1 [11]. Функция $v(t, x)$ принадлежит классу V'_0 , если выполняются условия:

$v(t, x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $T \times \mathbb{R}^n$, где

$$T = [t_0 - \tau, \infty) / \{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}};$$

существует функция a класса Хана такая, что выполняется оценка

$$a(\|x\|) \leq v(t, x) \text{ при всех } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;$$

существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k^-} v(t, x) = v(\tau_k, x), \quad \lim_{t \rightarrow \tau_k^+} v(t, x) = v(\tau_k + 0, x)$$

при всех $k = 1, 2, \dots$.

Отличие класса V'_0 от предложенного в работе [11] класса V_0 состоит в том, что при фиксированном аргументе $x \in \mathbb{R}^n$ функция $v(t, x)$ может принимать неограниченные значения. Использование таких функций особенно удобно в случаях, если импульсное воздействие в системе может происходить через как угодно большие интервалы времени.

Теорема 1 [2]. Пусть для системы (9) существует функция $v(t, x)$ класса V_0 и монотонная функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(0) = 0$, $g(s) > 0$, $s > 0$ такие, что:

$\frac{d}{dt} v(t, x(t))|_{(9)} \leq -g(v(t, x(t)))$, если $v(t, x(t + \zeta)) \leq p(v(t, x(t)))$ для $\zeta \in [-\tau', 0]$ (условие Разумихина), где $p(s) > s$ при $s > 0$, $p(0) = 0$, $p(s)$ – непрерывна;

$$v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \leq v(\tau_k, x(\tau_k)).$$

Тогда система (9) асимптотически устойчива.

3. Основной результат.

Сформулируем основной аналитический результат данной статьи в виде теоремы.

Пусть a , b – некоторые действительные постоянные. Обозначим далее

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_{k+1} - \tau_k);$$

$$\begin{aligned} F_1 &= L_1 c_1 + a L_2 c_1; \quad F_2 = L_1 c_2 + 1 + a(L_1 c_1 + L_2 c_2 - c) + b L_2 c_1; \\ F_3 &= a(L_1 c_2 + 1) + b(L_2 c_2 - c); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= 4b^2(b - a^2)(\varepsilon R + \beta)^2 + 2|2F_3^2 - (b - a^2)(2aF_3 - bF_2)|(\varepsilon R + \beta) + \\ &+ 4b^2 F_1^2 + 4F_3^2 + 8(2a^2 - b)F_1 F_3 + 4bF_2^2 - 8abF_1 F_2 - 8aF_2 F_3; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda_1 = \frac{bL_1^2 c_1^2 + (L_1 c_2 + 1)^2 - 2aL_1 c_1(L_1 c_2 + 1)}{b - a^2}; \quad \lambda_2 = \frac{2bF_1 + 2F_3 - 2aF_2 + \sqrt{\tilde{D}}}{2(b - a^2)}. \quad (13)$$

Теорема 2. Предположим, что в системе (6) верно неравенство $2\tau < \delta$, а управляющий вектор L выбран таким, что при некоторых $a \in \mathbb{R}$, $b, \nu \in \mathbb{R}_+$ выполняются такие условия:

- 1) $b > a^2$;
- 2) $\nu + \lambda_2 + 2\varepsilon R \sqrt{b\tau\lambda_1 \frac{e^{\nu\tau} - 1}{\nu}} < 0$;
- 3) $(b - a^2)e^{2\nu\delta} + (-b(c_{k_2}^2 + 1) + 2abc_{k_1}(c_{k_2} - 1) - b^2 c_{k_1}^2 + 2a^2 c_{k_2}^2)e^{\nu\delta} + (b - a^2)c_{k_2}^2 \geq 0$;
- 4) $(1 + b)e^{\nu\delta} \geq 1 + 2ac_{k_1} + b^2 c_{k_1}^2 + bc_{k_2}^2$.

Тогда в совокупности систем (4) и (5) достигается глобальная синхронизация.

Доказательство. Положим $\delta_\mu = \delta - \mu$ где $\mu > 0$ – некоторый параметр. Рассмотрим систему (6) и вспомогательную функцию к ней $v_0(e)$ в виде $v_0(e) = e_1^2 + 2ae_1e_2 + be_2^2$.

На основе этой функции при $v \geq 0$ построим кусочно-экспоненциальную функцию $v(e)$, которая будет использоваться как функция Ляпунова:

$$v(t, e) = v_0(e)e^{v(t-\tau_k)}; \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (\tau_0 = t_0). \quad (14)$$

При выполнении условия (1) теоремы 2 функция v принадлежит классу V_0' . Будем требовать выполнение условий теоремы 1 для этой функции. Эти условия можно представить в виде

$$\left. \frac{dv(t, e(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq -\alpha v(t, e(t)), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

если

$$pv(t, e(t)) > v(t + \zeta, e(t + \zeta)), \quad \zeta \in [-\tau, 0), \quad (16)$$

где $\alpha > 0$, $p > 1$ – некоторые параметры, и

$$v(\tau_k + 0, e(\tau_k + 0)) \leq v(\tau_k, e(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Подставляя в (16) и (17) выражение (14) для функции v , получим условия на функцию v_0 при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ в виде

$$\left. \frac{dv_0(t, e(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq -(\alpha + v)v_0(t, e(t)), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

если

$$\begin{cases} pv_0(e(t)) > e^{v\zeta} v_0(e(t + \zeta)); \quad \zeta \in [-2\tau, 0) & \text{при } \tau_k - t \notin [-2\tau, 0); \\ pv_0(e(t)) > e^{v(\zeta + \chi(\tau_k - t - \zeta)\Delta\tau_{k-1})} v_0(e(t + \zeta)); \quad \zeta \in [-2\tau, 0) & \text{при } \tau_k - t \in [-2\tau, 0), \end{cases} \quad (19)$$

где $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Поскольку при любом $\beta > 0$ множество $\{\Delta\tau_k \mid \Delta\tau_k < \delta_\beta, k \in \mathbb{N}\}$ конечно, то при исследовании асимптотической устойчивости условие (19) при любом как угодно малом $\mu > 0$ может быть заменено условием

$$\begin{cases} pv_0(e(t)) > e^{v\zeta} v_0(e(t + \zeta)), \quad \zeta \in [-2\tau, 0) & \text{при } \tau_k - t \notin [-2\tau, 0); \\ pv_0(e(t)) > e^{v(\zeta + \chi(\tau_k - t - \zeta)\delta_\mu)} v_0(e(t + \zeta)), \quad \zeta \in [-2\tau, 0), & \text{при } \tau_k - t \in [-2\tau, 0), \end{cases} \quad (20)$$

с учетом того, что на ограниченном множестве $\{(\tau_{k-1}, \tau_k) \mid \Delta\tau_k < \theta_\mu, k \in \mathbb{N}\}$ функция $v_0(e(t))$ допускает экспоненциальную оценку по t .

Далее для определённости положим, что $\tau_k \in [t - \tau, t)$.

Обозначим $a_{11} = L_1c_1$; $a_{12} = L_1c_2 + 1$; $a_{21} = L_2c_1$; $a_{22} = L_2c_2 - c$, так, чтобы $A + LC = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$.

Тогда производную функции v_0 вдоль системы (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0(t, e(t)) \Big|_{(6)} &= 2(a_{11} + a(a_{21} - \beta \cos \eta_1))e_1^2 + \\ &+ 2(a_{12} + a(a_{11} + a_{22})) + b(a_{21} - \beta \cos \eta_1)e_1e_2 + 2(aa_{12} + ba_{22})e_2^2 + G_\tau, \end{aligned}$$

где

$$G_\tau = 2\varepsilon R \cos \eta_2 e_1(t - \tau)(be_2 + ae_1).$$

Согласно теореме Ньютона – Лейбница получим

$$G_\tau = 2\varepsilon R \cos \eta_2 (ae_1 + be_2)(e_1(t) - \int_{t-\tau}^t (a_{11}e_1(s) + a_{12}e_2(a))ds,$$

поэтому производную функции v_0 вдоль системы (6) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}v_0(t, e(t))|_{(6)} = I - 2RI_c \cos \eta_2,$$

где

$$\begin{aligned} I &= 2(a_{11} + a(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2))e_1^2 + 2(a_{12} + a(a_{11} + a_{22})) + \\ &+ b(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2)e_1e_2 + 2(aa_{12} + ba_{22})e_2^2; \\ I_c &= (ae_1 + be_2) \int_{t-\tau}^t (a_{11}e_1(s) + a_{12}e_2(a))ds. \end{aligned}$$

Пусть $\xi > 0$ – некоторый параметр. С помощью неравенства Гёльдера для слагаемого I_c можно получить оценку

$$2|I_c| \leq \xi(ae_1 + be_2)^2 + \frac{\tau}{\xi} \int_{t-\tau}^t (a_{11}e_1(s) + a_{12}e_2(a))^2 ds. \quad (21)$$

Можно показать выполнение соотношений между квадратичными формами

$$(a_{11}e_1 + a_{12}e_2)^2 \leq \lambda_1 v_0; \quad (ae_1 + be_2)^2 \leq b v_0,$$

где λ_1 определяется выражением (13).

Далее с учётом условия Разумихина получим

$$2|I_c| \leq \xi \lambda_1 v_0 + \frac{\tau}{\xi} \int_{t-\tau}^t b v_0(s) ds \leq \xi \lambda_1 v_0 + \frac{\tau}{\xi} \int_{t-\tau}^t e^{\nu(t-s-\theta_\mu z(\tau_k-s))} b v_0(t) ds \leq \xi \lambda_1 v_0 + \frac{\tau}{\xi} b \frac{e^{\nu\tau} - 1}{\nu} v_0. \quad (22)$$

Отметим, что после определения при $\nu = 0$ значением τ , функция $(e^{\nu\tau} - 1)/\nu$ становится целой функцией от всех своих аргументов, поэтому отдельно рассматривать случай $\nu = 0$ необходимости нет.

Значение $\xi = \tau \sqrt{\frac{p\lambda_1}{b} \frac{e^{\nu\tau} - 1}{\nu}}$ минимизирует правую часть в (22). Получим окончательную оценку для I_c в виде

$$|I_c| \leq \tau \sqrt{p\lambda_1 b \tau \frac{e^{\nu\tau} - 1}{\nu}} v_0. \quad (23)$$

В случае $\tau_k \notin [t - \tau, t)$ получим оценку лучше, чем неравенство (23), поэтому оценка (23) выполняется для общего случая.

Оценим теперь выражение I при помощи функции v_0 . Принимая во внимание константы, введённые в (10), получим характеристическое уравнение регулярного пучка форм $I - \lambda v_0$ [1] в виде

$$\begin{vmatrix} 2F_1 - 2a\beta \cos \eta_1 + 2aR\varepsilon \cos \eta_2 - \lambda & F_2 - b\beta \cos \eta_1 + bR\varepsilon \cos \eta_2 - a\lambda \\ F_2 - b\beta \cos \eta_1 + bR\varepsilon \cos \eta_2 - a\lambda & 2F_3 - b\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения определяется выражением (12). Верхняя оценка квадратичной формы определяется большим корнем данного уравнения и имеет вид

$$I \leq \lambda_2 v_0, \quad (24)$$

где λ_2 задано в (13).

С учётом полученных оценок (23), (24) можно записать неравенство

$$\frac{d}{dt} v_0(t, e(t))|_{(6)} \leq \left(\lambda_2 + 2\varepsilon R \sqrt{b\tau\lambda_1 p \frac{e^{v\tau} - 1}{v}} \right) v_0(t).$$

Условие (18) приводит к неравенству

$$\lambda_2 + 2\varepsilon R \sqrt{b\tau\lambda_1 p \frac{e^{v\tau} - 1}{v}} < -\alpha - v,$$

которое представляет собой семейство неравенств с произвольными параметрами α , p и μ . Объединяя по ним эти неравенства, получим условие (2) данной теоремы.

Рассмотрим условие (17). Выполнение данного условия при всех $k \in \mathbb{N}$, кроме принадлежащих некоторому, не более чем конечному множеству, будет достигнуто в случае выполнения условия

$$v_0(e(\tau_k + 0)) \leq e^{v\delta} v_0(e(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N},$$

которое приводит к неравенству

$$e_1^2 + 2a(c_{k1}e_1 + c_{k2}e_2)e_1 + b(c_{k1}e_1 + c_{k2}e_2)^2 \leq e^{v\delta} (e_1^2 + 2ae_1e_2 + be_2^2).$$

Объединяя по μ условия, гарантирующие выполнение данного неравенства между квадратичными формами, получаем условия (3) и (4) теоремы. Теорема доказана.

Сформулируем следствие из полученного результата, устанавливающее экспоненциальные оценки для решений системы (6).

Следствие. *Предположим, что управляющий вектор L выбран таким, что при некоторых $a, \gamma \in \mathbb{R}$, $b, v \in \mathbb{R}_+$ выполняются условия:*

- 1) $b > a^2$;
- 2) $v + \lambda_2 + 2\varepsilon R \sqrt{b\lambda_1 \tau \frac{e^{(v-2\gamma)\tau} - 1}{v-2\gamma}} < 2\gamma$;
- 3) $(b - a^2)e^{2v\delta} + (-b(c_{k2}^2 + 1) + 2abc_{k1}(c_{k2} - 1) - b^2c_{k1}^2 + 2a^2c_{k2})e^{v\delta} + (b - a^2)c_{k2}^2 \geq 0$;
- 4) $(1 + b)e^{v\delta} \geq 1 + 2ac_{k1} + b^2c_{k1}^2 + bc_{k2}^2$.

Тогда при всех $t > 0$ решения системы (6) допускают экспоненциальную оценку в виде

$$\|e(t)\| \leq Me^{\gamma t},$$

где $\|\cdot\|$ – эвклидова норма в \mathbb{R}^2 , а $M > 0$ зависит только от начальных условий.

4. Численные результаты и их обсуждение.

Полученные аналитические результаты проиллюстрированы при помощи численных методов.

На основе теоремы 2 при $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c = 3$, $\delta = 3$, $\tau = 0,1$, $c_{k1} = -0,5$, $c_{k2} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta = 1$, $\varepsilon R = 0,1$ в пространстве управляющих параметров L_1, L_2 численно получена оценка области синхронизации систем (4) и (5) (серый цвет) (рис. 1). Кроме самой оценки области синхронизации указаны также показатели экспоненциальной оценки для динамики вектора ошибки, полученные на основе следствия из теоремы 2.

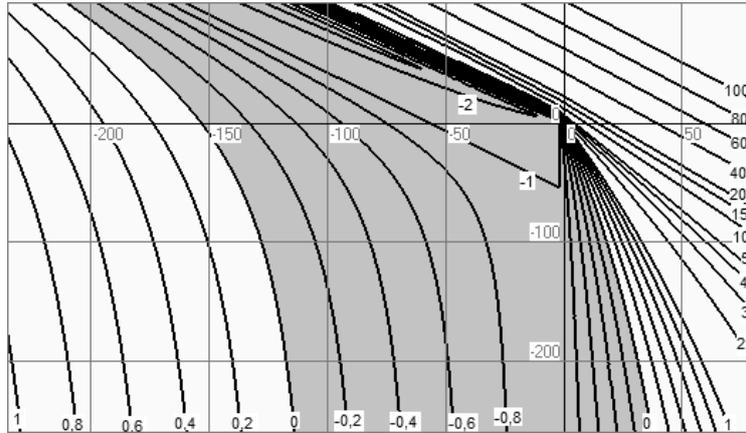


Рис. 1

Идея решения численной задачи поиска оценки показателя Ляпунова состоит в оптимизации левой части условия (2) сформулированного следствия при выполнении равенства в условии (3) этого следствия, проводимой на основе метода Флетчера – Ривза. При этом, решение задачи определения глобального минимума наталкивалось на трудности, связанные с выбором начальной точки для итерационного процесса, от выбора которой во многих случаях существенно зависел результат оптимизации. Данная проблема была решена тем, что для каждого набора параметров итерационный процесс проводился несколько десятков раз для разных начальных точек, часть из которых выбираются случайно, а другая часть являются точками минимумов, достигнутых при некоторых близких значениях параметров.

В работе [13] независимо от величины запаздывания τ получены условия синхронизации непрерывных моделей, получаемых из систем (4) и (5), в которых следует положить $c_{k0} = 0$, $c_{k1} = 0$, $c_{k2} = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку результат, полученный в теореме 2, подразумевает существенную зависимость возможности синхронизации от величины запаздывания и лучше всего применим к случаю небольшого запаздывания, то нельзя провести проверку его согласованности с результатом, полученным в [13].

Проведено сравнение оценок областей синхронизации непрерывных моделей в пространстве управляющих параметров L_1 , L_2 , построенных для непрерывной модели при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c = 3$, $\delta = 3$, $\tau = 0,1$, $c_{k1} = 0$, $c_{k2} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta = 1$, $\varepsilon R = 0,1$ (серый цвет) (рис. 2, 3). На рис. 2 представлены новые результаты (также указаны линии уровня для показателя Ляпунова), а на рис. 3 – оценка, полученная на основе [13]. Отметим, что при малых τ оценка, полученная на основе теоремы 2:

- неограничена и, в целом, почти совпадает с оценкой, полученной в [13];
- может выходить за пределы оценки, полученной в [13].

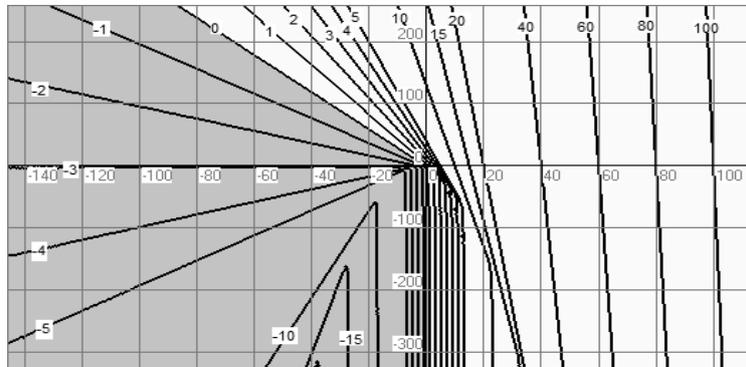


Рис. 2

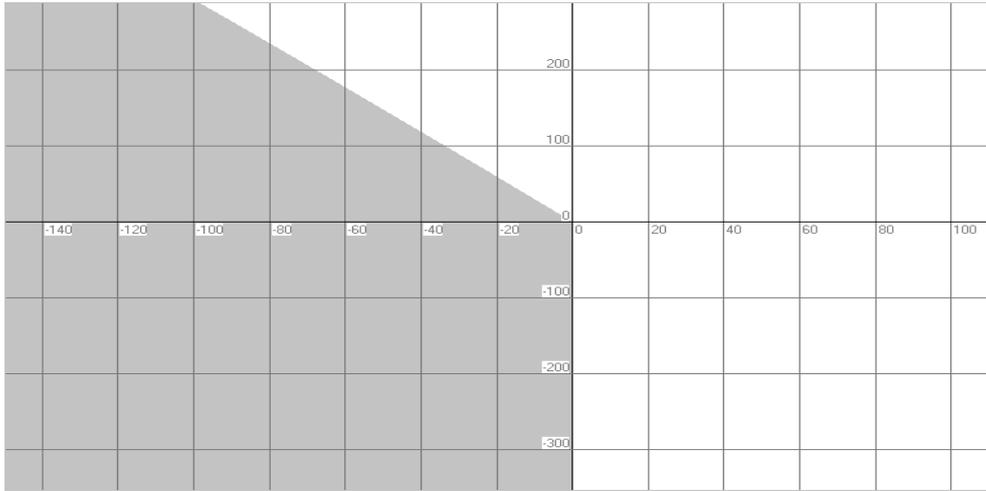


Рис. 3

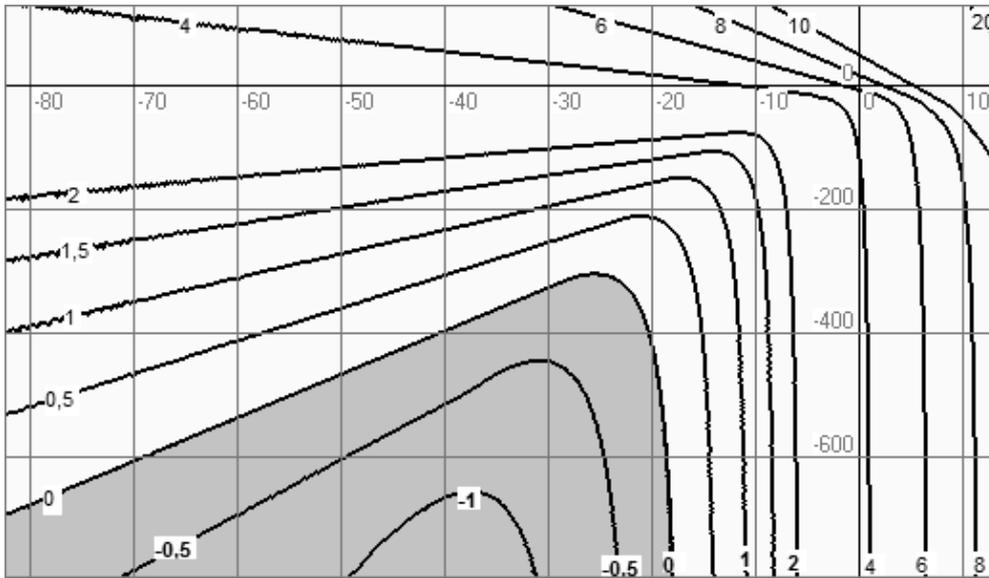


Рис. 4

Согласно результатам, полученным в [13], совокупность непрерывных моделей, получаемых из моделей (4) и (5) при наборе параметров $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_{k0} = 0$, $c_{k1} = 0$, $c_{k2} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau = 0,6$, $c = 2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 3$, $w = 5$, $f = 5$ и $R = 5$, допускают синхронизацию при $L = [-19 \quad -70]$, при этом динамика системы (4) оказывается хаотической. При произвольных c_{k0} , w , f , при $c_{k1} = -0,01$, $\delta = 3$ и при тех же значениях остальных указанных параметров на рис. 4 в пространстве (L_1, L_2) представлена область синхронизации моделей (4) и (5) (серый цвет).

На рис. 5 рассмотрено поведение траектории системы (4) при $c_{k0} = 0,5$, $c_{k1} = -0,01$, $c_{k2} = 1$, $\delta = \tau_{k+1} - \tau_k = 3$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau = 0,6$, $c = 2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 3$, $w = 5$, $f = 5$, $R = 5$ и с начальными данными $x_{1m}(t) = 1$, $t \in [-\tau, 0]$, $x_{2m}(0) = 1$: слева – фазовый портрет, справа вверху – динамика фазовой координаты, справа внизу – динамика фазовой скорости.

Структура нерегулярного аттрактора, рассмотренного на рис. 5, аналогична аттрактору, построенному в работе [13] для хаотической системы. Аттрактор системы (4) при указанных значениях параметров может рассматриваться как хаотический (см. [12, 26, 27], где обсуждаются примеры хаотических систем с запаздыванием и импульсным воздействием, и работу [23] – с подробным обсуждением определения хаотического аттрактора).

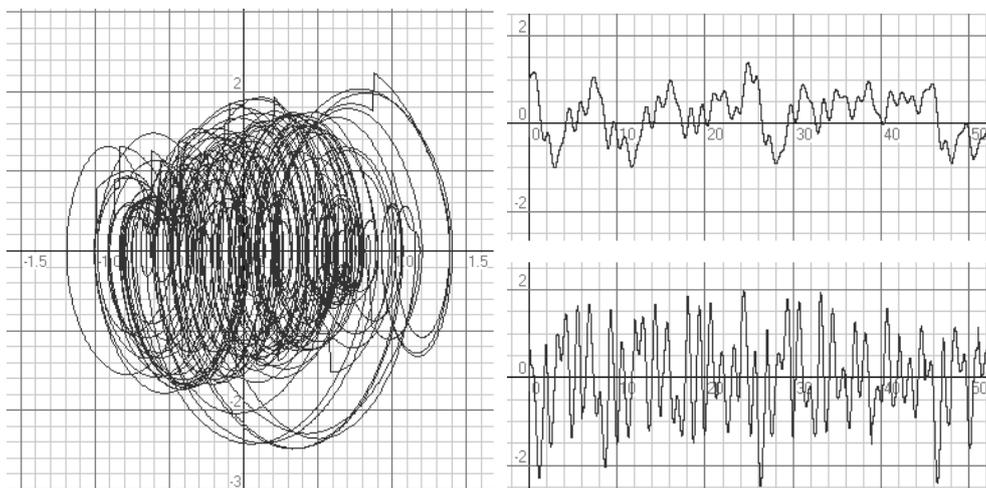


Рис. 5

Следует также отметить, что при росте величины запаздывания τ оценка области синхронизации, получаемая в пространстве управляющих параметров, сокращается и затем становится пустой. Таким образом, полученные результаты лучше всего применимы к случаю малого запаздывания.

Заключение.

В работе дана постановка задачи об экспоненциальной синхронизации связанных электро-энергетических систем с запаздыванием и импульсным воздействием, допускающих хаотическую динамику. Аналитически на основе метода Ляпунова – Разумихина сформулированы достаточные условия глобальной синхронизации, получаемой на основе выходного сигнала, а также предложен метод, позволяющий оценить сверхпоказатель экспоненциальной синхронизации. Для некоторых конкретных числовых параметров энергосистемы получены численные результаты.

РЕЗЮМЕ. Досліджено повну глобальну хаотичну синхронізацію в електроенергетичних системах з запізненням при імпульсних збуреннях. Отримано достатні умови експоненціальної синхронізації на основі теорії стійкості диференціальних рівнянь з запізненням та імпульсною дією. Розглянуті ілюстративні приклади, які демонструють застосовність та ефективність отриманих результатів.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Иванов І.Л. Підхід до дослідження стійкості імпульсних систем з запізненням // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – 12, N 5. – С. 30 – 38.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: URSS, 2001. – 320 с.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
6. Chen G., Dong X. From chaos to order. Methodologies, perspectives and applications. –Singapore: World Scientific, 1998. – 776 p.

7. *Ivanov I.L., Martynyuk A.A.* Stability results for delay power system under impulsive perturbations // Communications in Applied Analysis. – 2015. – **15**, N 2. – P. 275 – 286.
8. *Ivanov I.L., Slyn'ko V.I.* A Stability Criterion for Autonomous Linear Time-Lagged Systems Subject to Periodic Impulsive Force // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 732 – 742.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // Chaos. – 2004. – **14**, N 3. – P. 603 – 610.
10. *Huang C.-H., Lin C.-H., Kuo C.L.* Chaos synchronization-based detector for power-quality disturbances classification in a power system // IEEE Transactions on Power Delivery. – 2011. – **26**, N 2. – P. 944 – 953.
11. *Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 273 p.
12. *Li X., Bohner M.* Exponential synchronization of chaotic neural networks with mixed delays and impulsive effects via output coupling with delay feedback // Mathematical and Computer Modelling. – 2010. – **52**, N 5. – P. 643 – 653.
13. *Lin J.-S., Yang Y.-S., Hung M.-L., Liao T.-L., Yan J.-J.* Observer Design for Chaos Synchronization of Time-delayed Power Systems // Proc. of World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2010. – **4**, N 5. – P. 498 – 501.
14. *Lin Q., Wu X.* The sufficient criteria for global synchronization of chaotic power systems under linear state-error feedback control // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2011. – **12**, N3. – P. 1500 – 1509.
15. *Martynyuk A.A.* Elements of the Theory of Stability of Hybrid Systems (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 243 – 302.
16. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcations and Multistability of the Oscillations of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 232.
17. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1990. – **64**. – P. 821 – 824.
18. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. – 1997. – **78**, N 22. – P. 4193 – 4196.
19. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. – 1996. – **76**, N 11. – P. 1804 – 1807.
20. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. – 1995. – **51**, N 2. – P. 980 – 994.
21. *Shahverdiev E.M., Hashimova L.H., Hashimova N.T.* Chaos synchronization in some power systems // Chaos Solitons and Fractals. – 2008. – **37**, N 3. – P. 829 – 834.
22. *Sprott J.C.* Chaos and Time-series Analysis. – Oxford: Oxford University Press, 2003. – 507 p.
23. *Taylor R.L.* Attractors: Nonstrange to Chaotic // SIAM, Undergraduate Research Online. – 2010. – P. 72 – 80.
24. *Voss H.U.* Anticipating chaotic synchronization // Phys Rev E. – 2000. – **61**. – P. 5115 – 5119.
25. *Yang P., Tan Z., Wiesel A., Nehorai A.* Power system state estimation using PMUs with imperfect synchronization // IEEE Transactions on Power Systems. – 2013. – **28**, N 4. – P. 4162 – 4172.
26. *Yang Y., Cao J.* Exponential lag synchronization of a class of chaotic delayed neural networks with impulsive effects // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2007. – **386**, N 1. – P. 492 – 502.
27. *Zhou J., Xiang L., Liu Z.* Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. – 2007. – **384**, N 2. – P. 684 – 692.

Поступила 27.09.2016

Утверждена в печать 10.10.2017