

А.З.Галишин¹, С.Н.Склепус²

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

¹Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua;

²Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины,

ул. Дм. Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина; e-mail: snsklepus@ukr.net

Abstract. A solution of the problem on the stress-strain state and strength of the hollow layered cylinders and layered cylindrical shells under creep conditions is obtained. The solution for the two-layered shells of varying ratios of layer thicknesses, based on the hypothesis of rectilinear element, is collated with the spatial solutions for axi-symmetrically loaded hollow cylinders. The technique of solving the spatial initial boundary value problem is based on the joint application of Ritz, R-functions methods and the Runge – Kutta – Merson method for time integration with automatic time step control is used. Within the shell statement, the initial boundary value problem is also solved using the Runge – Kutta – Merson method with the combination of the Runge – Kutta method and Godunov method of discrete orthogonalization for solving the boundary problem at each time step.

Key words: layered cylindrical shell, hollow layered cylinder, creep, strength criterion, time to failure.

Введение.

В современной технике широко применяются элементы конструкций, работающие в условиях ползучести. Определению нелинейного напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций посвящены работы [2, 4, 6 – 8, 10 – 12, 16 – 18, 21, 25, 26 и др.]. Задачи ползучести слоистых цилиндров и цилиндрических оболочек рассмотрены в [20, 22 – 24 и др.]. Эти задачи относятся к классу нелинейных пространственных начально-краевых задач, для которых невозможно получить точное аналитическое решение, удовлетворяющее всем граничным условиям. Поэтому, в инженерных расчетах с учетом ползучести таких объектов применяют приближенные методы решения. Во многих случаях для преодоления возникающих вычислительных трудностей используют теории оболочек, которые позволяют упростить постановку задачи и понизить размерность исходной краевой задачи. При этом решение конкретных задач основано на привлечении, как классической теории, так и различных уточненных теорий, учитывающих, например, деформации поперечного сдвига. Анализ применимости классической и уточненных теорий в задачах упругого деформирования оболочек, в том числе слоистых, дан в работе [5].

Одним из возможных вариантов исследования погрешностей теорий оболочек в задачах ползучести цилиндров является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения пространственных задач. Оценке погрешности оболочечных моделей в задачах ползучести, повреждаемости и длительной прочности однослойных цилиндрических оболочек посвящены лишь отдельные работы. Так, в статье [4] на примере цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, проведено исследование применимости различных оболочечных моделей к определению

нию НДС, ползучести и повреждаемости однослойных цилиндрических оболочек. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента либо гипотезах Кирхгофа – Лява, сопоставлены с решением пространственной задачи для осесимметрично нагруженного цилиндра.

Следует отметить, что в литературе отсутствуют работы, посвященные обоснованию применимости теории оболочек для исследования ползучести и прочности слоистых цилиндров. В связи с этим целью данной работы является:

- а) сопоставление результатов решения задачи ползучести и прочности слоистых цилиндров, полученных в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- б) исследование влияния соотношения толщин слоев на отличие оболочечного решения от пространственного;
- в) разработка способа прогнозирования времени разрушения слоистых цилиндров в условиях ползучести.

1. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести цилиндра на основе пространственной модели.

Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый слоистый цилиндр в цилиндрической системе координат $r\varphi z$. Ось z совпадает с осью вращения. Цилиндр состоит из M изотропных слоев постоянной толщины, которые жестко соединены между собой и деформируются без проскальзывания и отрыва. Полагаем, что деформирование в процессе ползучести происходит изотермически, деформации цилиндра остаются малыми, а температурными деформациями можно пренебречь.

Задачу решаем в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают. Принимаем, что компоненты скоростей упругих деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ и скоростей необратимых деформаций ползучести \dot{p}_{ij} аддитивны:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{p}_{ij} \quad (i, j = \overline{1, 3}).$$

В принятой системе координат имеем:

$$\dot{\epsilon}_{rr}(r, z, t) = \dot{\epsilon}_{rr}(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t); \quad \dot{\epsilon}_{zz}(r, z, t) = \dot{\epsilon}_{zz}(r, z, t) + \dot{p}_{zz}(r, z, t);$$

$$\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) = \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t); \quad \dot{\epsilon}_{rz}(r, z, t) = \dot{\epsilon}_{rz}(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t).$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени.

Согласно теории структурных параметров Ю.Н.Работнова [12] физические уравнения ползучести для материала k -го слоя, в общем случае представляются в виде

$$\dot{p}_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k)}(\sigma_{ij}, \sigma_e^{(k)}, q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}), \quad (1)$$

где $f_{ij}^{(k)}$ – некоторая тензор-функция указанных аргументов; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши; $q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$ – структурные параметры, которые описывают упругие свойства материала, повреждаемость и т.д. Изменение структурных параметров описывается кинетическими уравнениями вида

$$\dot{q}_l^{(k)} = g_l^{(k)}(\sigma_{el}^{(k)}, q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}). \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) $\sigma_e^{(k)}, \sigma_{el}^{(k)}$ ($l = \overline{1, n}$) – эквивалентные напряжения, которые содержат те или иные базовые инварианты тензора напряжений.

Краевая задача ползучести в момент времени $t \neq 0$ может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа, определенного в пространстве векторов скоростей перемещений [24]

$$\Lambda(\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \dots, \dot{\mathbf{U}}_M) = 0, 5 \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} \left[\lambda_1^{(k)} \left(\dot{u}_{r,r}^{(k)^2} + \dot{u}_{z,z}^{(k)^2} + \frac{\dot{u}_r^{(k)^2}}{r^2} \right) + G^{(k)} \left(\dot{u}_{r,z}^{(k)} + \dot{u}_{z,r}^{(k)} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda^{(k)} \left(\dot{u}_{r,r}^{(k)} \dot{u}_{z,z}^{(k)} + \frac{\dot{u}_r^{(k)} \left(\dot{u}_{r,r}^{(k)} + \dot{u}_{z,z}^{(k)} \right)}{r} \right) \right] r dr dz - \quad (3)$$

$$- \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} \left[\dot{u}_{r,r}^{(k)} \dot{N}_{rr}^{c(k)} + \dot{u}_{z,z}^{(k)} \dot{N}_{zz}^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_{\varphi\varphi}^{c(k)}}{r} + \dot{N}_{rz}^{c(k)} \left(\dot{u}_{r,z}^{(k)} + \dot{u}_{z,r}^{(k)} \right) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega^{(s)}} \left(\dot{P}_n \dot{u}_n^{(s)} + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau^{(s)} \right) d\partial\Omega.$$

Здесь $\dot{U}_k(r, z, t) = (\dot{u}_r^{(k)} r, z, t, \dot{u}_z^{(k)}(r, z, t))$, $(k = \overline{1, M})$ – вектор кинематически возможных скоростей перемещений; $u_r^{(k)}(r, z, t)$, $u_z^{(k)}(r, z, t)$ – перемещения в k -м слое вдоль осей Or и Oz , соответственно; $\lambda^{(k)} = \frac{E^{(k)} \nu^{(k)}}{(1-2\nu^{(k)})(1+\nu^{(k)})}$, $\lambda_1^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2G^{(k)}$, $G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})}$, $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го слоя; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_M$ – меридиональное сечение цилиндра; $\partial\Omega_p$ – часть контура $\partial\Omega$, где приложены внешние силы, \dot{P}_n , \dot{P}_τ – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – внешняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; s – номер слоя, к которому приложены внешние силы; $\dot{u}_n^{(s)} = \dot{u}_r^{(s)} n_r + \dot{u}_z^{(s)} n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z^{(s)} n_r - \dot{u}_r^{(s)} n_z$; n_r, n_z – направляющие косинусы нормали \mathbf{n} . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляются по формулам:

$$\dot{N}_{rr}^{c(k)} = \left[\lambda_1 \dot{p}_{rr}^{(k)} + \lambda \left(\dot{p}_{zz}^{(k)} + \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) \right]; \quad \dot{N}_{zz}^{c(k)} = \left[\lambda_1 \dot{p}_{zz}^{(k)} + \lambda \left(\dot{p}_{rr}^{(k)} + \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) \right]; \\ \dot{N}_{\varphi\varphi}^{c(k)} = \left[\lambda_1 \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \lambda \left(\dot{p}_{rr}^{(k)} + \dot{p}_{zz}^{(k)} \right) \right]; \quad \dot{N}_{rz}^{c(k)} = 2G \dot{p}_{rz}^{(k)}.$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (3) предполагаются известными и не варьируются.

Совокупность функций скоростей перемещений $\dot{u}_r^{(k)}(r, z, t)$, $\dot{u}_z^{(k)}(r, z, t)$ может быть выбрана в качестве класса допустимых функций, если они удовлетворяют следующим условиям:

а) они непрерывны вместе со своими частными производными в соответствующих слоях Ω_k ($k = \overline{1, M}$);

б) совпадают на границах соседних слоев, т.е.

$$\dot{u}_r^{(a)}(r, z, t) = \dot{u}_r^{(b)}(r, z, t), \quad \dot{u}_z^{(a)}(r, z, t) = \dot{u}_z^{(b)}(r, z, t) \quad \text{на } \partial\Omega_{ab};$$

в) удовлетворяют кинематическим граничным условиям, если соответствующий слой Ω_l примыкает к границе тела, т.е.

$$\dot{u}_r^{(l)}(r, z, t) = \dot{u}_{r0}^{(l)}, \quad \dot{u}_z^{(l)}(r, z, t) = \dot{u}_{z0}^{(l)} \quad \text{на } \partial\Omega_{ul}.$$

Здесь $\dot{u}_{r0}^{(l)}$, $\dot{u}_{z0}^{(l)}$ – заданные функции.

Основные неизвестные задачи ползучести, в произвольной точке цилиндра, можно получить из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая для k -го слоя имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{du_r^{(k)}}{dt} &= \dot{u}_r^{(k)}; & \frac{du_z^{(k)}}{dt} &= \dot{u}_z^{(k)}; & \frac{d\varepsilon_{rr}^{(k)}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)}; & \frac{d\varepsilon_{zz}^{(k)}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{zz}^{(k)}; & \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}}{dt} &= \frac{\dot{u}_r^{(k)}}{r}; \\
\frac{d\gamma_{rz}^{(k)}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}^{(k)}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{z,r}^{(k)}; \\
\frac{d\sigma_{rr}^{(k)}}{dt} &= \lambda_1^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} - \dot{p}_{rr}^{(k)}) + \lambda^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{zz}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} - \dot{p}_{zz}^{(k)} - \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)}); \\
\frac{d\sigma_{zz}^{(k)}}{dt} &= \lambda_1^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{zz}^{(k)} - \dot{p}_{zz}^{(k)}) + \lambda^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} - \dot{p}_{rr}^{(k)} - \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)}); \\
\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{dt} &= \lambda_1^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} - \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)}) + \lambda^{(k)} (\dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{zz}^{(k)} - \dot{p}_{rr}^{(k)} - \dot{p}_{zz}^{(k)}); & \frac{d\sigma_{rz}^{(k)}}{dt} &= G^{(k)} (\dot{\gamma}_{rz}^{(k)} - 2\dot{p}_{rz}^{(k)}); & (4) \\
\frac{dp_{rr}^{(k)}}{dt} &= \dot{p}_{rr}^{(k)}; & \frac{dp_{zz}^{(k)}}{dt} &= \dot{p}_{zz}^{(k)}; & \frac{dp_{\varphi\varphi}^{(k)}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)}; & \frac{dp_{rz}^{(k)}}{dt} &= \dot{p}_{rz}^{(k)}; & \frac{dq_l^{(k)}}{dt} &= \dot{q}_l^{(k)} \quad (l = \overline{1, n}).
\end{aligned}$$

В начальный момент времени деформации ползучести и структурные параметры равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра, удовлетворяющего заданным на его поверхностях граничным условиям.

Решение начальной задачи для системы уравнений (4) проводим методом Рунге – Кутты – Мерсона (РКМ) [9] с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, определяем из решения вариационной задачи для функционала (3). Вариационные задачи решаем методом Ритца в сочетании с методом R-функций [14]. При этом приближенное решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничным условиям и является инвариантной относительно геометрической формы области.

Отметим, что для решения упругой задачи, при определении начальных условий для уравнений (4), может быть использован приведенный выше функционал. При этом в формуле (3) необходимо заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении «фиктивных» сил принять $\dot{p}_{rr}^{(k)} = \dot{p}_{zz}^{(k)} = \dot{p}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \dot{p}_{rz}^{(k)} = 0$.

2. Постановка и метод решения задачи на основе оболочечной теории.

Рассмотрим полый слоистый цилиндр в рамках уточненной теории оболочек, предполагая, что выполняются гипотезы прямолинейного элемента для всего пакета слоев [5]. В соответствии с данными гипотезами связь между осевым u_z и нормальным u_ζ перемещениями произвольной точки оболочки с соответствующими перемещениями точки координатной поверхности u, w имеет вид

$$u_z = u + \zeta \psi_z; \quad u_\zeta = w; \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (5)$$

где ζ – координата, которая отсчитывается по нормали к координатной поверхности; ψ_z, γ_z – соответственно, полный угол прямолинейного элемента и угол, обусловленный поперечным сдвигом, соответственно (штрих означает производную по координате z). В качестве координатной поверхности может быть принята срединная поверхность оболочки или одна из поверхностей раздела слоев.

Используя (5) и соотношения Коши, связь между компонентами тензора деформаций в произвольной точке оболочки $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\zeta}$, компонентами деформации координатной

натной поверхности $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$, параметром изменения ее кривизны κ_z и углом сдвига γ_z представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_z + \zeta \kappa_z; & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_\varphi / a_\varphi; & 2\varepsilon_{z\zeta} &= \gamma_z; \\ \varepsilon_z &= u'; & \varepsilon_\varphi &= w / R; & \kappa_z &= \psi'_z; & a_\varphi &= 1 + \zeta / R, \end{aligned} \quad (6)$$

где R – радиус координатной поверхности оболочки.

Компоненты напряжений в k -ом слое зависят от жесткостных коэффициентов этого слоя $B_{11}^{(k)} = E^{(k)} / (1 - \nu^{(k)2})$; $B_{12}^{(k)} = \nu^{(k)2} B_{11}^{(k)}$; $B_{33}^{(k)} = 2G^{(k)}$ и определяются равенствами (индекс « k » для простоты опущен)

$$\sigma_{zz} = B_{11}\varepsilon_{zz} + B_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = B_{12}\varepsilon_{zz} + B_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a; \quad \sigma_{z\zeta} = B_{33}\varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a. \quad (7)$$

Величины с индексом « a » означают дополнительные напряжения

$$\sigma_{zz}^a = B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}); \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{11}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}); \quad \sigma_{z\zeta}^a = B_{33}p_{z\zeta},$$

где $p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$ – компоненты деформаций ползучести, которые зависят от напряжений, констант ползучести и параметра повреждаемости материала.

Переходя в (7) к усилиям и моментам, получим следующие физические уравнения, связывающие осевое N_z , радиальное N_r , окружное N_φ усилия, соответствующие изгибающие моменты M_z, M_φ с компонентами деформации координатной поверхности:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{00}\varepsilon_z + C_{01}\varepsilon_\varphi + C_{10}\kappa_z - N_z^a; & N_\varphi &= C_{01}\varepsilon_z + C_{02}\varepsilon_\varphi + C_{11}\kappa_z - N_\varphi^a; \\ M_z &= C_{10}\varepsilon_z + C_{11}\varepsilon_\varphi + C_{20}\kappa_z - M_z^a; & M_\varphi &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\varphi + C_{21}\kappa_z - M_\varphi^a; & N_r &= C_{33}\gamma_z - N_r^a, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$C_{pq} = F\{b_q \zeta^p\} \quad (p, q = 0, 1, 2); \quad C_{33} = F\{B_{33}a_\varphi\}; \quad b_0 = B_{11}a_\varphi; \quad b_1 = B_{12}; \quad b_2 = B_{22} / a_\varphi;$$

$$N_z = F\{\sigma_{zz}a_\varphi\}; \quad M_z = F\{\sigma_z a_\varphi \zeta\}; \quad N_z^a = F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi\}; \quad M_z^a = F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi \zeta\} \quad (z \leftrightarrow \varphi); \quad (9)$$

$$a_z = 1; \quad N_r = F\{\sigma_{rz}a_\varphi\}; \quad N_r^a = F\{\sigma_{rz}^a a_\varphi\}; \quad F\{\dots\} = \sum_{i=1}^M \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} (\dots) d\zeta.$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах имеют вид

$$N'_z + q_z = 0; \quad N'_r - N_\varphi / R + q_\zeta = 0; \quad M'_z - N_r = 0, \quad (10)$$

где q_z, q_ζ – приведенные к координатной поверхности распределенные поверхностные нагрузки [5].

Совокупность геометрических (6), физических (8) и статических (10) уравнений позволяет свести задачу ползучести для слоистой цилиндрической оболочки к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (11)$$

где N_r – осевое усилие; $P(z)$ – матрица системы, зависящая от упругих констант материала; \mathbf{f} – вектор свободных членов, который зависит еще и от деформаций ползучести и параметра повреждаемости. Решение системы уравнений (11) должно удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра. Ненулевые элементы матрицы $P(z)$ и вектора \mathbf{f} определяются равенствами

$$\begin{aligned}
p_{12} = -p_{34} = -\mu_1 / R; \quad p_{13} = -p_{64} = \mu_2 / R; \quad p_{14} = (C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11}) / R^2; \\
p_{31} = -p_{46} = 1; \quad p_{41} = 1 / C_{33}; \quad p_{52} = C_{20} / \delta; \quad p_{53} = p_{62} = -C_{10} / \delta; \quad p_{63} = C_{00} / \delta; \\
f_1 = -(\mu_1 N_z^a + N_\phi^a - \mu_2 M_z^a) / R - q_z; \quad f_2 = -q_z; \quad f_4 = Q_z^a / C_{33}; \quad (12) \\
f_5 = (C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a) / \delta; \quad f_6 = -(C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a) / \delta \\
(\mu_1 = (C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20}) / \delta); \quad \mu_2 = (C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10}) / \delta; \quad \delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2.
\end{aligned}$$

Входящие в (9) интегралы вычисляем численно на основании процедуры, сочетающей методы Симпсона и Ньютона. Как и в случае пространственной задачи решение начальной задачи для системы уравнений (11) осуществляем методом РКМ с автоматическим выбором шага по времени. На каждом временном шаге краевая задача (11) решается методом Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией по С.К.Годунову.

При анализе прочности слоистых оболочек возникает вопрос о достоверном определении касательных напряжений $\sigma_{z\phi}$. Особенно актуален этот вопрос в том случае, когда слои сопрягаются посредством клеевых соединений, которые в расчетах, как правило, не учитываются. Из (6) следует, что касательные напряжения, полученные согласно (7), в общем случае не удовлетворяют граничным условиям на поверхностях оболочки и условиям контакта смежных слоев. Существующие способы устранения этих противоречий, в основном, базируются на задании нелинейного закона изменения касательных напряжений по толщине оболочки. Эти способы хорошо апробированы на задачах упругого деформирования слоистых оболочек [3, 5, 13]. В отличие от этого в настоящей работе для определения касательных напряжений воспользуемся методикой [19], основанной на численном интегрировании пространственных уравнений равновесия в напряжениях. Полученные на ее основе касательные напряжения не зависят от используемых уравнений состояния.

3. Пример расчета.

Проведем сопоставление результатов решений задачи ползучести для двухслойного цилиндра, полученных как на основе пространственной постановки, так и в рамках оболочечной теории. Геометрические размеры: длина $l = 0,1$ м, внутренний радиус цилиндра $r_{in} = 0,095$ м, внешний – $r_{out} = 0,105$ м. Толщины слоев будем варьировать. Внутренний слой цилиндра толщиной h_1 выполнен из жаропрочного сплава на основе никеля ЭИ437 (ХН77ТЮР), а наружный, толщиной h_2 – из диоксида циркония, стабилизированного иттрием (8YSZ). Данный керамический материал часто применяется для термобарьерных покрытий (thermal barrier coating – ТВС). Температура цилиндра постоянна: $T = 800^\circ\text{C}$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона сплава ЭИ437: $E_1 = 1,5285 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_1 = 0,28$ [15]; предел текучести – $\sigma_T = 340$ МПа. Упругие характеристики материала 8YSZ равны: $E_2 = 1,539 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_2 = 0,27$ [26]. Предел прочности – $\sigma_s = 565$ МПа [1]. На наружной поверхности $r = r_{out}$ цилиндр нагружен давлением P , изменяющимся вдоль оси цилиндра по закону $P = 0,5P_0 [1 + \cos(2\pi z / l)]$, где $P_0 = 37$ МПа.

Закон одноосной ползучести сплава ЭИ437 имеет вид [12]

$$p = At\sigma^n \quad (A = 5,15 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-n} \text{ ч}^{-1}, \quad n = 5,23). \quad (13)$$

Закон (13) описывает установившуюся ползучесть материала при отсутствии упрочнения. Данный закон справедлив для многих сплавов при достаточно высоком

уровне температур и напряжений [12] и позволяет исследовать ползучесть в наиболее «чистой» форме, исключив такие явления, как упрочнение материала и повреждаемость вследствие ползучести.

Определяющие уравнения ползучести примем в виде [12] $\dot{p}_{kl} = 3/2(A\sigma_i^{n-1}s_{kl})$, где σ_i – интенсивность напряжений; $s_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl}(\sigma_{kk})$ – компоненты девиатора напряжений.

Предположим, что керамический материал наружного слоя деформируется при отсутствии деформаций ползучести.

Граничные условия на торцах цилиндра $z = \pm l/2$ примем в виде

$$\dot{u}_r^{(i)} = 0; \dot{\sigma}_{zz}^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (14)$$

На внутренней поверхности $r = r_{inn}$ цилиндра $\dot{\sigma}_{rr}^{(1)} = 0$, $\dot{\sigma}_{rz}^{(1)} = 0$; на внешней поверхности $r = r_{out}$ – цилиндра $\dot{\sigma}_{rr}^{(2)} = -\dot{P} = 0$, $\dot{\sigma}_{rz}^{(2)} = 0$.

На границе контакта слоев $r = r_c$ принимаем условия жесткого соединения:

$$\dot{u}_r^{(1)} = \dot{u}_r^{(2)}; \quad \dot{u}_z^{(1)} = \dot{u}_z^{(2)}. \quad (15)$$

Можно показать, что структура решения, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений (14) и условиям (15) имеет такой вид:

$$\dot{u}_{ri} = \omega_u \Phi_1 + \omega_{uci}^2 \Phi_{1i}; \quad \dot{u}_{zi} = z(\Phi_2 + \omega_{uci}^2 \Phi_{2i}) \quad (i=1, 2). \quad (16)$$

Здесь $\Phi_i, \Phi_{1i}, \Phi_{2i}$ – неопределенные компоненты структуры решения [14]; $\omega_u = 1/l[(l^2/4) - z^2] = 0$ – уравнение части границы, где заданы скорости перемещений. Уравнения подобластей Ω_1, Ω_2 , из которых состоит меридиональное сечение цилиндра $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, имеют вид

$$\omega_{uci} = \omega_u \wedge_0 \omega_{ci} = \omega_u + \omega_{ci} - \sqrt{\omega_u^2 + \omega_{ci}^2} = 0 \quad (i=1, 2), \quad (17)$$

где \wedge_0 – символ R-конъюнкции [14].

В формуле (17) функции ω_{uci} удовлетворяют условиям: $\omega_{uci} = 0$, $\partial\omega_{uci}/\partial n = -1$ на $\partial\Omega_i$ (\mathbf{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega_i$) и $\omega_{uci} > 0$ внутри Ω_i , а $\omega_{ci} = 0$ ($i=1, 2$) – уравнения контакта слоев ($\omega_{ci} = 0$, $\partial\omega_{ci}/\partial n = -1$ – на линии контакта и $\omega_{ci} > 0$ – внутри Ω_i), т.е. $\omega_{c1} = r_c - r$, $\omega_{c2} = r - r_c$.

Уравнение границы области Ω ($\omega = 0$, $\omega_n = -1$ на $\partial\Omega$, $\omega > 0$ – внутри Ω) имеет вид $\omega = \omega_r \wedge_0 \omega_u = \omega_r + \omega_u - \sqrt{\omega_r^2 + \omega_u^2} = 0$, где $\omega_r = [(r - r_{inn})(r_{out} - r)] / (r_{out} - r_{inn})$.

При численной реализации неопределенные компоненты структуры решения представлены в виде конечных рядов вида $\Phi(r, z, t) = \sum_n C_n(t) f_n(r, z)$, где $C_n(t)$ – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге определяем методом Рунге; t – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета; $\{f_n\}$ – система линейно независимых функций. Здесь в качестве $\{f_n\}$ использованы бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке $K_r \times K_z$, где K_r, K_z – количество отрезков дискретизации вдоль осей Or и Oz , соответственно. В данном случае Φ_1, Φ_2 были заданы во всей области Ω , а Φ_{1i}, Φ_{2i} ($i=1, 2$) – только в соответствующих подобластях Ω_i . Решение задачи ползучести для цилиндра,

сформулированной в рамках пространственной постановки, получено при следующих параметрах пространственно-временной дискретизации: $K_r = 20$, $K_z = 10$ для Φ_1, Φ_2 и $K_r = 10$, $K_z = 10$ для Φ_{1i}, Φ_{2i} ; начальный шаг по времени $\Delta_0 t = 10^{-3}$ ч; заданная погрешность вычислений в методе РКМ – $\varepsilon = 10^{-6}$.

При решении задачи в рамках теории оболочек рассмотрена правая симметричная половина оболочки при $0 \leq z \leq l/2$. На меридианное сечение оболочки была нанесена сетка, состоящая из 201 точки по z и 11 точек по толщине каждого слоя. Другие параметры дискретизации принимали значения: $\Delta_0 t = 10^{-5}$ ч, $\varepsilon = 10^{-8}$. Приведенных выше параметров оказалось достаточно для получения сходящихся результатов, как в пространственной, так и в оболочечной постановках.

Граничные условия в рамках теории оболочек формулируем в виде:

$$\text{при } z = 0: N_r = u_z = \psi_z = 0; \text{ при } z = l/2: N_z = M_z = u_r = 0.$$

Критерием определения времени разрушения t_* и окончания процесса решения было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации критерия наибольших нормальных напряжений [8]:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} = \sigma_*, \quad (18)$$

где σ_* – предельное напряжение. В качестве σ_* могут быть выбраны: предел пропорциональности σ_{pp} , предел текучести σ_T или предел прочности σ_σ .

Отношение толщины наружного слоя цилиндра к общей толщине $\eta = h_2/h$ варьировали в пределах от 1/20 до 1/3 (табл. 1).

Таблица 1

| η | 1/20 | 1/10 | 1/6 | 1/5 | 1/4 | 1/3 |
|----------------|------|------|------|-----|------|------|
| t_*^{3D} , ч | 433 | 502 | 609 | 680 | 820 | 1236 |
| t_*^{SH} , ч | 373 | 435 | 545 | 617 | 762 | 1190 |
| Δ , % | 13,9 | 13,3 | 10,5 | 9,2 | 7,07 | 3,7 |

В результате расчетов установлено, что в процессе деформирования во внутреннем слое развиваются деформации ползучести и, как следствие, происходит релаксация максимальных напряжений. Это приводит к увеличению абсолютных значений напряжений в наружном слое и, в конечном итоге – к выполнению критерия (18) на наружной поверхности в центре цилиндра:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} = |\sigma_{\varphi\varphi}| = \sigma_\sigma.$$

Т.е. в данном случае, в качестве предельного напряжения принят предел прочности материала 8YSZ – $\sigma_* = \sigma_\sigma$. Это происходит во всех рассмотренных вариантах расчета.

В табл. 1 приведены значения критического времени t_* , полученные по пространственной модели (t_*^{3D}) и на основе оболочечной модели (t_*^{SH}), а также значения отклонений $\Delta = [(t_*^{3D} - t_*^{SH}) / t_*^{3D}] \cdot 100\%$ оболочечного решения от пространственного. Из таблицы видно, что с ростом параметра η указанное отклонение уменьшается.

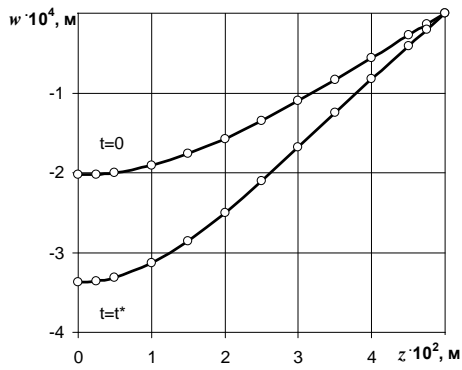


Рис. 1

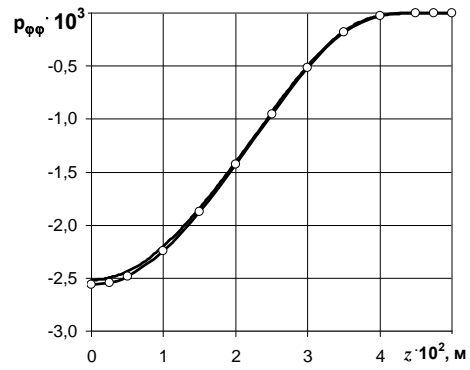


Рис. 2

Некоторые результаты расчетов для $\eta = 1/4$ показаны на рис. 1 – 10. Кривые, соответствующие пространственному решению помечены маркерами. На тех рисунках, где оболочечное решение совпадает с пространственным, приведено лишь пространственное решение.

На рис. 1 показаны графики изменения вдоль оси цилиндра прогиба w в начальный момент времени $t = 0$ и в моменты разрушения $t = t^*$. На рис. 2 приведены графики изменения вдоль оси цилиндра на внутренней поверхности окружных деформаций ползучести $p_{\phi\phi}$ в моменты $t = t^*$.

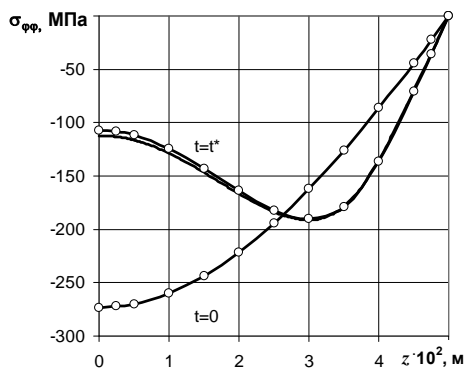


Рис. 3

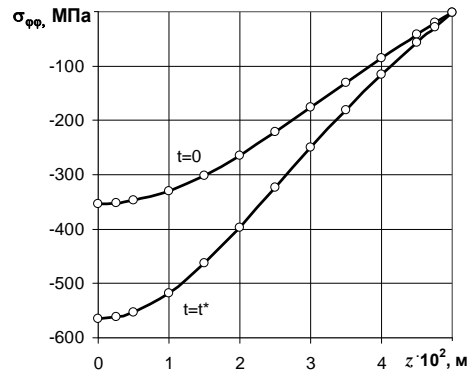


Рис. 4

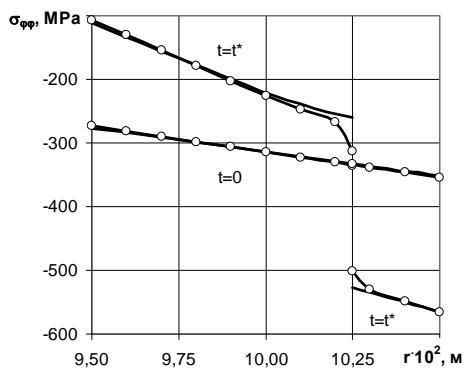


Рис. 5

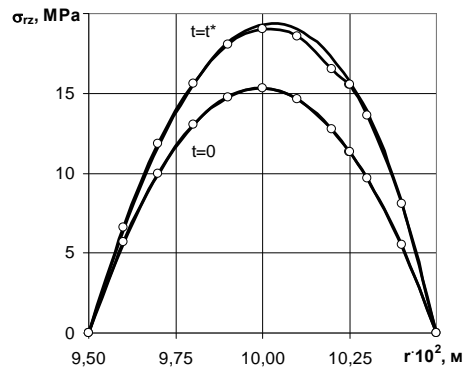


Рис. 6

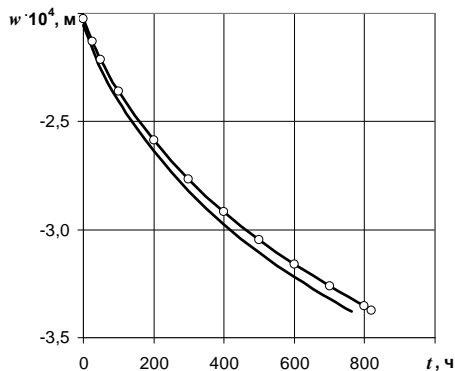


Рис. 7

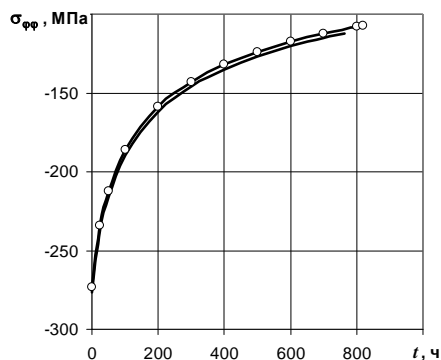


Рис. 9

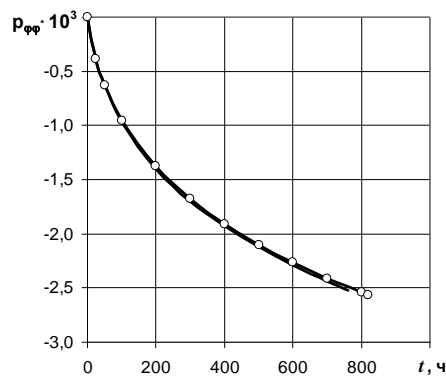


Рис. 8

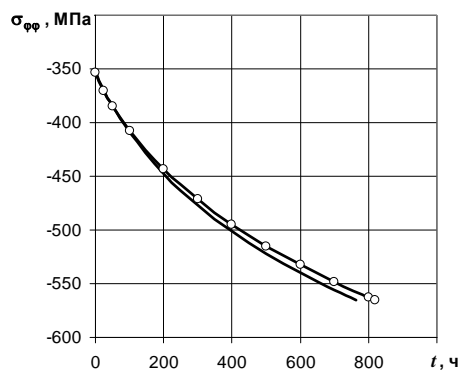


Рис. 10

На рис. 3 представлены аналогичные результаты для напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ на внутренней поверхности цилиндра, а на рис. 4 – на наружной поверхности. Рис. 5 иллюстрирует изменение по толщине напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в центре цилиндра, а рис. 6 – изменение касательных напряжений σ_{zr} в сечении $z = 0,025$ м. Изменение во времени величин, представленных на рис. 1 – 4, в центре цилиндра показано: прогиба w – на рис. 7; деформаций ползучести $p_{\varphi\varphi}$ – на рис. 8; напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ на внутренней поверхности – на рис. 9; напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ на внешней поверхности – на рис. 10. Представленные результаты свидетельствуют о высокой точности оболочечного решения для $\eta = 1/4$. С уменьшением параметра η погрешность оболочечного решения увеличивается.

4. Способ прогнозирования времени разрушения при ползучести.

Анализ результатов (табл. 1), показал, что зависимость времени разрушения t_* от параметра $\xi = h_2 / h_1 = \eta / (1 - \eta)$ хорошо аппроксимируется квадратичной функцией вида

$$t_* = a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0. \quad (19)$$

Для проверки этого утверждения из табл. 1 выберем три базовые значения времен разрушения, например, при $\eta = 1/10; 1/5; 1/4$ и определим коэффициенты представления (19) в пространственном (3D) и оболочечном (SH) случае. Эти коэффициенты помещены в табл. 2. По полученным коэффициентам вычислим прогнозируемые значе-

ния времени разрушения t_{*pr}^{3D} , t_{*pr}^{SH} и соответствующие отклонения Δ_{3D} , Δ_{SH} прогнозируемых значений от значений, вычисленных по прикладным программам, для $\eta = 1/20; 1/6; 1/3$ (табл. 3).

Таблица 2

| | a_0 | a_1 | a_2 |
|----|-------|-------|--------|
| 3D | 409,4 | 634,2 | 1792,8 |
| SH | 343,1 | 612,3 | 1933,2 |

Таблица 3

| η | 1/20 | 1/6 | 1/3 |
|--------------------|------|-----|------|
| t_*^{3D} , ч | 433 | 609 | 1236 |
| t_*^{SH} , ч | 373 | 545 | 1190 |
| t_{*pr}^{3D} , ч | 448 | 608 | 1175 |
| t_{*pr}^{SH} , ч | 381 | 543 | 1133 |
| Δ_{3D} , % | -3,4 | 0,2 | 5,0 |
| Δ_{SH} , % | -2,1 | 0,4 | 4,8 |

Данные таблицы свидетельствуют о высокой точности предложенного способа прогнозирования времени разрушения при ползучести: максимальная погрешность в определении прогнозируемого времени разрушения составляет 5%.

Выводы.

1. Решена задача ползучести и прочности двухслойного цилиндра в рамках пространственной и оболочечной моделей при условии, что внутренний слой работает в условиях ползучести, а наружный деформируется упруго.

2. Получено хорошее согласование результатов пространственного и оболочечного решений, как для параметров НДС, так и для времени разрушения. Показано, что при уменьшении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения возрастает.

3. Разработан способ прогнозирования времени разрушения на основе аппроксимации зависимости времени разрушения от отношения толщин слоев квадратичной функцией.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі про напружено-деформований стан та міцність порожнистих шаруватих циліндрів і шаруватих циліндричних оболонок, що перебувають в умовах повзучості. Розв'язок задачі для двошарових оболонок з різним співвідношенням товщини шарів, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента, співставлено з просторовими розв'язками для осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів. Метод розв'язання просторової початково-крайової задачі повзучості базується на спільному застосуванні методів Рітца, R-функцій та Рунге–Кутта – Мерсона для інтегрування за часом з автоматичним вибором часового кроку. В оболочковій постановці вихідна початково-крайова задача також розв'язана за допомогою методу Рунге – Кутта – Мерсона в комбінації з методом Рунге – Кутта і методом Годунова дискретної ортогоналізації для розв'язання крайової задачі на кожному часовому кроці.

1. Брусенцов В.П. и др. Исследование прочности твердооксидных топливных элементов пластинчатой формы // Твердооксидные топливные элементы: Сб. научн. статей. – Снежинск: РФ ЯЦ-ВНИИТФ, 2003. – С. 233 – 240.
2. Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К. Длительная прочность оболочек. – Харьков: Вища шк., 1981. – 104 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1974. – 308с.
4. Галишин А.З., Скелтус С.Н. Применение оболочечных моделей к расчету ползучести и повреждаемости полых цилиндров // Збірник наук. праць Дніпродзержинського держ. техніч. ун-ту. – 2015. – Вип. 1(26). – С. 60 – 70.

5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: в 5 т.; Т.4).
6. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – К.: Наук. думка, 2005. – 221 с.
7. Золочевский А.А., Склепус А.Н., Склепус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. – 720 с.
8. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
9. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
10. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2015. – 495 с.
11. Локощенко А.М., Печенина Н.Е., Шестериков С.А. Долговечность цилиндрических оболочек при чистом изгибе в условиях ползучести // Прикл. математика и механика. – 1989. – **25**, № 12. – С. 73 – 78.
12. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
13. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк., 1986. – 191с.
14. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
15. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 329 с.
16. Altenbach H., Naumenko K. Shear correction factors in creep-damage analysis of beams, plates and shells // JSME Int. J. Series A. – 2002. – **45**, N 1. – P. 77 – 83.
17. Altenbach H., Morachkovsky K., Naumenko K., Sychov A. Zum Kriechen dünner Rotationsschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften // Forschung im Ingenieurwesen. – 1996. – **62**, N 3 – S. 47 – 57.
18. Galishin A., Zolochovsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling // Techn. Mech. – 2009. – **29**, N 1. – P. 48 – 59.
19. Galishin A.Z. Determination of Tangential Stresses in Axisymmetrically Loaded Layered Shells of Revolution in Inelastic Nonisothermal Deformation Processes // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 8. – P. 637 – 644.
20. Galishin A. Z. Axisymmetric Thermoviscoelastoplastic State of Thin Laminated Shells Made of a Damageable Material // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 4. – P. 431 – 441.
21. Naumenko K. On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations // Tech. Mech. – 2000. – **20**, N 3. – P. 215 – 226.
22. Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z. Determination of the axially symmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of thin layered shells with regard for the damageability of the material // J. of Mathematical Sciences. – 2009. – **162**, N 2. – P. 216 – 230.
23. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoviscoelastoplastic Deformation of Compound Shells of Revolution Made of a Damageable Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 607 – 613.
24. Sklepus S. M. Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section // J. of Mathematical Sciences. – 2015. – **205**, N 5. – P. 644 – 658.
25. Zolochovsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff – Love solutions for cylinders under creep-damage conditions // Techn. Mech. – 2014. – **34**, N 2. – P. 104 – 113.
26. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Parkhomenko L., Gnitko V., Kühhorn A., Kober M., Leyens C. Benchmark creep tests for thermal barrier coating // Вісник НТУ «ХП». – 2013. – N 23. – P.159 – 179.

Поступила 22.09.2016

Утверждена в печать 10.10.2017