Т. В. К а р н а у х о в а

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ БИМОРФНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАЗОМКНУТЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Национальный технический университет «КПИ»,
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: karn@inmech.kiev.ua.

Abstract. A statement of the problem of forced vibrations and dissipative heating of piezoelectric rectangular plates with opened electrods and hingedly fixed ends under action of harmonic surface uniform pressure is given. The electromechanical problem is reduced to an infinite system of algebraic equations. An exact analytical solution of this system is obtained. An exact analytical solution of the energy equation is obtained for vibrations on the first resonant frequency. A formula for the critical pressure is obtained after reaching of which the plate does not accomplish its structural functions owing to loss of piezoeffect by the active material.

Key words: forced vibrations, dissipative heating, opened electrods, critical pressure.

Введение.

Биморфные прямоугольные пластины широко применяются в различных областях современной техники [1, 8]. Гармонический и, в частности, резонансный режим является одним из основных при их эксплуатации [1, 4, 9]. Из-за гистерезисных потерь в пьезоматериалах гармонические колебания вызывают в пластине повышение температуры диссипативного разогрева, которая может оказать существенное влияние на ее функционирование. Так, например, при достижении температурой точки Кюри имеет место специфический тип теплового разрушения, когда пластина не разделяется на части, но теряет свое функциональное назначение из-за потери материалом пьезоэффекта [5 – 8, 9]. Как правило, при резонансных колебаниях ограничиваются одномодовым приближением. При разомкнутых электродах точное решение задачи сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений.

Ниже в данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях биморфной пластины с разомкнутыми электродами при действии на нее гармонического во времени давления. Для моделирования поведения материала используется концепция комплексных характеристик [2, 3]. Задача сведена к решению бесконечной комплексной системы алгебраических уравнений.

Точное решение этой системы получено в замкнутом виде. Задача о диссипативном разогреве указанной пластины рассмотрена при колебаниях на резонансной частоте. Представлено выражение для критической поперечной нагрузки, после достижения которой имеет место указанный выше тип теплового разрушения.

§1. Постановка задачи.

Постановка задачи о гармонических колебаниях биморфной шарнирно опертой прямоугольной пластины с разомкнутыми электродами представлена в монографии [1], где постановка рассматриваемой в статье задачи приведена только для упругого материала, в котором для гармонических электромеханических процессов гистерезисные потери отсутствуют, а, следовательно, отсутствует и диссипативный разогрев. Для учета гистерезисных потерь в данной статье использована известная в теории вязкоупругости упруго-вязкоупругая аналогия, согласно которой уравнения состояния для вязкоупругого материала получаются из уравнений состояния для упругого материала путем замены упругих констант на комплексные величины. Для вязкоупругих материалов необходимо иметь также уравнение состояния для диссипативной функции. Для гармонических процессов определяющее уравнение для этой функции совпадает с осредненной за период мощностью. Диссипативная функция выступает в качестве источника тепла в уравнении теплопроводности, из решения которого определяем температуру диссипативного разогрева, возникающую в результате превращения электромеханической энергии в тепловую.

Сложность рассматриваемой задачи состоит в том, что решение задачи электромеханики сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. В работе получено точное аналитическое решение в замкнутом виде этой системы. По полученному решению задачи электромеханики определяем диссипативную функцию. Зная ее, решаем уравнение теплопроводности и рассчитываем температуру диссипативного разогрева. Для теплоизолированных торцов пластины получено точное аналитическое решение уравнения теплопроводности. Приравнивая полученное значение температуры точке Кюри, получим выражение для критической нагрузки, после достижения которой пластина теряет свое функциональное назначения из-за потери материалом пьезоэффекта.

Для вязкоупругого материала в представленных в [1] соотношениях следует заменить действительные константы материала на комплексные в соответствии с концепцией комплексных характеристик [2,3].

Уравнения состояния для моментов имеют такой вид:

$$M_x=-\bar{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bar{\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-M_0;\ \ M_y=-\bar{D}\left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-M_0;$$
$$M_{xy}=-\bar{D}(1-\bar{\nu})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \tag{1.1}$$

где принято обозначения:

$$M_0=-\frac{h^2}{4}\frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)}\frac{V(t)}{h}=\frac{3}{8}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{(1-\bar{\nu})k_p^2}{(1-k_p^2)}\frac{1}{ab}\bar{D}\int_a^b\int_a^b\Delta w dxdy; \tag{1.2}$$

$V(t)$ – неизвестная разность потенциалов; ν – коэффициент Пуассона; $\bar{\nu}$ – модифицированный коэффициент Пуассона; k_p^2 – коэффициент электромеханической связи; $\bar{D}$ – модифицированная изгибная жесткость. Выражения для указанных величин приведены в [1].

Из (1.2) устанавливаем связь между M_0 и неизвестной разностью потенциалов в виде

$$V(t)=-\frac{4}{h}\frac{(1-\nu)S_{11}^E}{d_{31}}M_0.$$

Исследование вынужденных колебаний шарнирно опертой пьезопластины при действии на нее гармонического по времени равномерного поверхностного давления $p=qe^{i\omega t}$ сведено к решению комплексного дифференциального уравнения

$$\bar{D}\Delta\Delta w-\rho h\omega^2 w+\Delta M_0=q \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$w=0,\ \bar{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+M_0=0\quad (x=0;\ a);\ w=0,\ \bar{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+M_0=0\quad (y=0;\ b). \tag{1.4}$$

Как отмечено в [1], наличие поверхностного интеграла в выражении для M_0 (см. 1.1) существенно усложняет решение задачи.

§2. Решение задачи электромеханики.

Решение поставленной задачи определим в виде разложения его в ряд Фурье

$$w = \sum_{m-1,\,3,\ldots}\ \sum_{n=1,\,3,\ldots} w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y \quad \left(k_m = \frac{m\pi}{a},\ p_n = \frac{n\pi}{b} \right). \tag{2.1}$$

При использовании метода Фурье постоянную величину M_0 в области, занимаемой пластиной, представим в виде функции

$$M_0(x,y) = M_0 \begin{cases} [H(x) - H(x-a)][H(y) - H(y-b)] & \text{при} \quad x \ge 0, y \ge 0; \\ -[H(x) - H(x-a)][H(y) - H(y-b)] & \text{при} \quad x \le 0, y \le 0. \end{cases}$$

Здесь $H(x), H(y)$ – ступенчатые функции Хевисайда, производные от которых порождают функции Дирака: $H'(x) = \delta(x)$, $H'(y) = \delta(y)$. При этом имеем: $H''(x) = \delta'(x)$, $H''(y) = \delta'(y)$.

Функция $M_0(x,y)$ продолжается периодически на всю действительную плоскость и, таким образом, строится двумерная периодическая функция, которую можно раскладывать в ряд Фурье, над которым можно проводить операции интегрирования и дифференцирования.

Подставляя (2.1) в (1.2), получим

$$M_0 = -m_0 \sum_i \sum_j v_{ij} w_{ij} \tag{2.2}$$

$$\left(m_0 = \frac{3}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(1-\overline{\nu})k_p^2}{(1-k_p^2)} \frac{1}{ab},\ v_{ij} = \frac{k_i^2 + p_j^2}{k_i p_j} \right). \tag{2.3}$$

Разложим постоянные M_0, q в ряды Фурье:

$$M_0 = \sum_{m=1,3,\ldots}\ \sum_{n=1,3,\ldots} M_{mn} \sin k_m x \sin p_n y; \quad q = \sum_{m=1,3,\ldots}\ \sum_{n=1,3,\ldots} q_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \tag{2.4}$$

где приняты обозначения

$$M_{mn} = \frac{16}{abk_m p_n} M_0; \quad q_{mn} = \frac{16}{abk_m p_n} q. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1), (2.4), (2.5) в (1.3), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант w_{ij}:

$$\Delta_{mn} w_{nm} + N_{mn} \sum_{i=1,3,\ldots}\ \sum_{j=1,3,\ldots} v_{ij} w_{ij} = q_{mn} \tag{2.6}$$

$$\left\{ \Delta_{mn} = \left[\overline{D}(k_m^2 + p_n^2)^2 - \rho h \omega^2 \right];\ N_{mn} = \frac{16\overline{D}(k_m^2 + p_n^2) m_0}{abk_m p_n}\ (m,\ n = 1,\ 3,\ \ldots) \right\}.$$

Разделив уравнение (2.6) на Δ_{mn}, полученный результат умножим на v_{mn} и просуммируем по $m, n.$ Тогда получим такое уравнение:

$$W + NW = Q, \tag{2.7}$$

$$\left(W = \sum_{i=1,\,3,\ldots} \sum_{j=1,\,3,\ldots} v_{ij} w_{ij},\ N = \sum_{i=1,\,3,\ldots} \sum_{j=1,\,3,\ldots} N_{ij} v_{ij} / \Delta_{ij},\ Q = \sum_{i=1,\,3,\ldots} \sum_{j=1,\,3,\ldots} q_{ij} v_{ij} / \Delta_{ij} \right). \quad (2.8)$$

Из (2.7) имеем:

$$W = \frac{Q}{1+N}. \quad (2.9)$$

Зная w, согласно (2.6) определим неизвестные w_{ij} :

$$\Delta_{mn} w_{nm} + N_{nm} \sum_{i=1,3,\ldots} \sum_{j=1,3,\ldots} v_{ij} w_{ij} = q_{mn}, \quad w_{ij} = \frac{q_{ij}}{\Delta_{ij}} - \frac{N_{ij}}{\Delta_{ij}} W = \frac{q_{ij}}{\Delta_{ij}} - \frac{N_{ij}}{\Delta_{ij}} \frac{Q}{1+N}. \quad (2.10)$$

Таким образом, получено решение задачи электромеханики о вынужденных колебаниях шарнирно опертой прямоугольной пластины с разомкнутыми электродами.

Для решения поставленной задачи можно также использовать следующий подход, который не приводит к появлению функций Дирака в операторе $\Delta M_0(x, y)$. При использовании этого подхода решение задачи представляем в виде суммы квазистатической w^s и динамической w^d составляющих:

$$w = w^s + w^d. \quad (2.11)$$

При этом функцию w^s определяем согласно решения такой краевой задачи:

$$\tilde{D}\Delta\Delta w^s + \Delta M_0 = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[w^s = 0, \tilde{D}\frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} + M_0 = 0 \quad \text{при } x = 0,\ x = a; \right. \quad (2.13)$$

$$\left. w^s = 0,\ \tilde{D}\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} + M_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b \right]. \quad (2.14)$$

Функцию w^d определим согласно решения краевой задачи с однородными граничными условиями на торцах пластины:

$$\tilde{D}\Delta\Delta w^d - \rho h \omega^2 w^d = q + \rho h \omega^2 w^s; \quad (2.15)$$

$$w^d = 0, \frac{\partial^2 w^d}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ x = a; \quad (2.16)$$

$$w^d = 0, \frac{\partial^2 w^d}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = 0,\ y = b. \quad (2.17)$$

Решение краевой задачи (2.12) – (2.14) получим согласно метода Фурье в виде:

$$w^s = \sum_{m=1,3,\ldots} \sum_{n=1,3,\ldots} w^s_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \quad (2.18)$$

где введены обозначения:

$$w^s_{mn} = \frac{M_{mn}}{\tilde{D}(k_m^2 + p_n^2)};\ M_{mn} = \frac{16}{abk_m p_n} M_0. \quad (2.19)$$

Решение краевой задачи (2.15) – (2.17) также определим методом Фурье в таком виде:

$$w^d = \sum_{m=1,3,\ldots} \sum_{n=1,3,\ldots} w^d_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \quad (2.20)$$

где для w_{mn}^d имеем соотношение

$$[\tilde{D}(k_m^2 + p_n^2)^2 - \rho h\omega^2]w_{mn}^d = q_{mn} + \rho h\omega^2 w_{mn}^s = q_{mn} + \rho h\omega^2 \frac{M_{mn}}{\tilde{D}(k_m^2 + p_n^2)}. \qquad (2.21)$$

Учитывая выражения (2.2), (2.5) и (2.11), получим бесконечную систему алгебраических уравнений, которая совпадает с (2.6).

Таким образом, оба подхода к решению поставленной задачи приводят к одной и той же бесконечной системе алгебраических уравнений.

§3. Уравнение энергии и его решение.

Уравнение энергии для шарнирно опертой пластины и его решение при колебаниях на первой резонансной частоте представлено в статье [5].

Диссипативная функция определяется выражением

$$W = \frac{\omega}{2} D'' |A|^2 \left\{ \left[k_1^4 + 2\nu k_1^2 p_1^2 + p_1^4 \right] \sin^2 k_1 x \cdot \sin^2 p_1 y + 2(1-\nu) k_1^2 p_1^2 \cos^2 k_1 x \cdot \cos^2 p_1 y \right\} \qquad (3.1)$$

или в таком виде:

$$W = \frac{\omega}{2} W_0^2 \left\{ a_0 - a_1 \left(\cos 2k_1 x + \cos 2p_1 y \right) + a_2 \cos 2k_1 x \cdot \cos 2p_1 y \right\}, \qquad (3.2)$$

где приняты обозначения

$$W_0^2 = \frac{\omega}{2D''} \left\{ \frac{16 p_0^2 b^2}{\pi^4 \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]} \right\}^2;$$

$$a_0 = a_2 = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]^2; \; a_1 = \frac{1}{4} \left\{ \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\}. \qquad (3.3)$$

Уравнение энергии имеет вид:

$$\nabla^2 \theta - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} \theta + \frac{W}{(\lambda h)} = 0. \qquad (3.4)$$

Для теплоизолированного контура пластины решение задачи имеет вид:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_1 x + \theta_2 \cos 2p_1 y + \theta_3 \cos 2k_1 x \cdot \cos 2p_1 y. \qquad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.4) и учитывая (3.2), определим θ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$:

$$\theta_0 = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} \right) a_0 W_0^2; \qquad (3.6)$$

$$\theta_1 = -\frac{\omega}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_1}{\left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right) + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2}; \; \theta_2 = -\frac{\omega}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_1}{\left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right) + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2}; \qquad (3.7)$$

$$\theta_3 = \frac{\omega a}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_2}{\left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] + \left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right)}. \qquad (3.8)$$

Приравнивая максимальную температуру температуре в точке Кюри, из (3.5) – (3.8) получаем выражение для критического значения параметра нагружения W_{0K}^2:

$$W_{0K}^2 = \frac{4\alpha\theta_K}{\omega\Delta};$$

$$\Delta = a_0 + a_1\left[1/[1+2\lambda h\pi^2/(\alpha a^2)] + 1/[1+2\lambda h\pi^2/(\alpha b^2)]\right] + \\ +a_2\left[1/[1+2\lambda h\pi^2/(\alpha a^2)+2\lambda h\pi^2/(\alpha b^2)]\right]. \qquad (3.9)$$

Используя (3.3), (3.9), определим критическую поперечную нагрузку в виде.

$$p_{kr} = \frac{\pi^2\sqrt{1+(b/a)^2}}{4b}\sqrt[4]{2D'' W_{0K}^2/\omega}. \qquad (3.10)$$

Если амплитуда поверхностного давления превышает критическое значение ($p_0 > p_{kr}$), пластина перестает выполнять свое функциональное назначение из-за деполяризации пьезоматериала.

Выводы.

1. Дана постановка и получено решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой прямоугольной пьезопластины с разомкнутыми электродами при действии на нее гармонического во времени равномерного давления.
2. Использован метод Фурье, задача сведена к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Получено точное решение этой системы.
3. Для теплоизолированных торцов пластины представлено точное аналитическое решение уравнения энергии при колебаниях пластины на первой резонансной частоте.
4. Получено выражение для критического механического давления, после достижения которого пьезопластина не выполняет своего функционального назначения из-за деполяризации материала при температуре, равной температуре в точке Кюри.

Р Е З Ю М Е . Дано постановку задачі про вимушені коливання і дисипативний розігрів шарнірно обпертої п'єзоелектричної прямокутної пластини з розімкнутими електродами при дії на неї гармонічного рівномірного поверхневого тиску. Задачу електромеханіки зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Отримано точний аналітичний розв'язок цієї системи. Побудовано точний аналітичний розв'язок рівняння енергії при коливаннях на першій резонансній частоті. Отримано формулу для критичного тиску, після досягнення якого пластина не виконує свого функціонального призначення із-за втрати п'єзоефекту активним матеріалом.

1. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф.,Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.– (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т.; Т. 5).
2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т.; Т. 4).
3. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
4. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоэлектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
5. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaja E.V.* Damping the Resonant Flexural Vibration of a Hinged Plate with Actuators // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 448 – 456.
6. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Zavgorodnii A.V., Umrykhin I.N.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of a Viscoelastic Piezoelectric Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 614 – 622.
7. *Kirichok I.F.* Resonant Axisymmetric Vibrations and Vibrational Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayered Subject to Electromechanical Exitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 567 – 573.
8. *Kirichok I.F.* Damping the Radial Vibrations and Self-Heating of Viscoelastic Shell Elements with Piezoelectric Sensor and Actuator // Int.Appl.Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P.354 – 358.
9. *Karnaukhov V.G.* Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating // Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski). – New-York, Dordrecht: Springer, 2014. – **7**. – P. 3910 – 3919.

Поступила 15.02.2016 Утверждена в печать 10.10.2017