

В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш, А. В. Павлюк

ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ ДИСКРЕТНЫМ
РЕБРИСТЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. The equations of non-axisymmetric vibrations of three-layered cylindrical shells with an elliptical cross section with transverse discrete filler under non-stationary loading are given. When the elements of elastic structure being analyzing, the refined Timoshenko's type model of shells and rods is used. The numerical method of solving the dynamic equations is based on the integro-interpolation method of constructing the finite-difference schemes for equations with discontinuous coefficients. A solution is given for the problem on dynamic behavior of the three-layered cylindrical shell with elliptic cross section with taking into account of discreteness of transverse ribbed filler for the case of the distributed non-stationary loading. The numerical results are proposed in the form of plots that are later analysed.

Key words: three-layered cylindrical shell, elliptic cross section, the theory of Timoshenko type, forced vibrations, numerical solution.

Введение.

Решение задач динамики трехслойных цилиндрических оболочек с дискретным ребристым наполнителем является достаточно сложным теоретическим и вычислительным процессом. Он включает: развитие исходных теоретических моделей, постановку задач, выбор определенного численного алгоритма и т.д. Реализация этих моделей вызывает необходимость совершенствования и разработки эффективных численных методов расчета указанных конструкций. Сложность построения механических моделей многослойных оболочек и применение принципиально разных кинематических и статических гипотез приводит к значительному разнообразию расчетных схем и уравнений [1, 3 – 5, 6 – 23]. Известно, что при построении вариантов многослойных оболочек существует два основных подхода построения математических моделей, которые основаны на использовании единых гипотез ко всему пакету [3, 5], и гипотез, которые учитывают кинематические и статические особенности каждого слоя [1, 6, 12]. Согласно терминологии, предложенной в [3, 6], модели и теории второго подхода получили название «дискретно-структурных». При рассмотрении трехслойных оболочек с ребристым наполнителем также справедливы указанные подходы – конструктивно-орготропная модель трехслойных оболочек и модель с учетом дискретного расположения элементов заполнителя. В рамках последнего подхода рассмотрены осесимметричные и неосесимметричные колебания трехслойных оболочек с ребристым наполнителем при нестационарных нагрузках [11, 13]. Неосесимметричные колебания трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с учетом продольного дискретного ребристого наполнителя при распределенных нестационарных нагрузках исследованы в работе [12].

В данной работе рассмотрены трехслойные цилиндрические оболочки эллиптического поперечного сечения с учетом поперечного дискретного ребристого наполните-

ля. Очевидно, что оболочки с учетом дискретности наполнителя можно отнести ко второму подходу построения моделей многослойных оболочек. В рамках предположений, соответствующих гипотезам Тимошенко для оболочек и стержней, согласно геометрически линейной теории ниже приведены уравнения колебаний. Для решения поставленной задачи использована явная конечно-разностная схема интегрирования уравнений. Представлен числовой пример решения задачи о вынужденных неосесимметричных колебаниях указанной неоднородной оболочечной структуры при действии распределенной нестационарной нагрузки.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

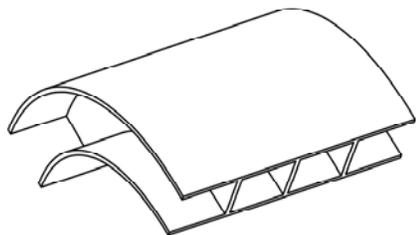


Рис. 1

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку эллиптического сечения с дискретным поперечным наполнителем при действии внутреннего распределенного нестационарного нагружения. Неоднородная трехслойная упругая структура имеет вид двух цилиндрических оболочек (внутренняя и внешняя обшивки), которые жестко соединены между собой системой поперечных дискретных ребер. Схематическое представление исходной конструкции показано на рис. 1.

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности исходных оболочек принимаем в таком виде:

$$A_1 = 1; k_1 = 0; A_2 = (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}; \quad (1.1)$$

$$k_2 = a_k b_k (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2} \quad (k = 1, 2),$$

где a_k и b_k – полуоси эллипса, который характеризует поперечное сечение соответствующей цилиндрической оболочки.

Принято, что деформированное состояние внутренней и внешней обшивок (соответственно, индексы 1 и 2) может быть определено обобщенными векторами перемещений соответствующих срединных поверхностей $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ и $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$. При рассмотрении элементов дискретного наполнителя предполагаем что деформированное состояние поперечного j -го ребра может быть определено обобщенным вектором перемещений $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной упругой структуры с дискретным наполнителем используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского, согласно которому

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.2)$$

где K и Π – полная кинетическая и потенциальная энергии упругой системы; A – работа внешних сил.

В уравнениях (1.2) принято:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{k=1}^2 \Pi^k + \delta \sum_{j=1}^I \Pi_j; \quad \delta K = \delta \sum_{k=1}^2 K^k + \delta \sum_{j=1}^I K_j, \quad (1.3)$$

где Π^k , Π_j – потенциальная энергия k -й обшивки и соответствующего j -го ребра; K^k , K_j – соответствующие кинетические энергии.

После стандартных преобразований в вариационном уравнении (1.2) с учетом выражений для потенциальной и кинетической энергий для обшивок и ребер согласно [2] получены две группы уравнений. Уравнения колебаний трехслойной цилиндрической оболочки эллиптического сечения с учетом дискретности поперечного заполнителя принимают вид:

для внутренней и внешней обшивок –

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}; & \frac{\partial S^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}^k}{\partial s_2} - k_2 T_{22}^k + P_3^k(s_1, s_2, t) &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial M_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial H^k}{\partial s_2} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H^k}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial s_2} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2}; \quad k = 1, 2;$$

для j -го поперечного ребра –

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; & \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} - k_{2j} T_{22j} + [T_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}]_j = \rho_j I_{cuj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} + [H]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

В соотношениях (1.5) величины типа $[S]_j$, $[T_{22}]_j$, $[T_{23}]_j$, $[H]_j$, $[M_{22}]_j$ соответствуют суммарным значениям усилий – моментов для внешней и внутренней обшивок, которые действуют на j -й дискретный элемент заполнителя.

Системы уравнений (1.4) – (1.5) связаны между собой кинематическими условиями контакта обобщенных векторов перемещений срединной поверхности обшивок и центров тяжести поперечного сечения j -го дискретного элемента согласно формулам:

$$\begin{aligned} u_{1j}(s_2) &= u_2^k(s_{1j}, s_2) \pm H_j^k \varphi_2^k(s_{1j}, s_2); \\ u_{2j}(s_2) &= u_1^k(s_{1j}, s_2) \pm H_j^k \varphi_1^k(s_{1j}, s_2); \\ u_{3j}(s_2) &= u_3^k(s_{1j}, s_2); \quad \varphi_{1j}(s_2) = \varphi_2^k(s_{1j}, s_2); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\varphi_{2j}(s_2) = \varphi_1^k(s_{1j}, s_2); \quad H_j^k = 0,5(h_k + h_j); \quad k = 1, 2.$$

В соотношениях (1.4) – (1.6) величины ρ_k ($k = 1, 2$), ρ_j ($j = \overline{1, I}$) отвечают плотностям материала обшивок и соответствующих дискретных элементов заполнителя; h_k ($k = 1, 2$), h_j ($j = \overline{1, I}$) – толщины и высоты соответствующих обшивок и дискретных элементов.

Величины усилий – моментов обшивок определены через величины деформаций согласно формулам

$$T_{11}^k = B_{11}^k(\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k); \quad T_{22}^k = B_{22}^k(\varepsilon_{22}^k + \nu_{12}^k \varepsilon_{11}^k);$$

$$T_{13}^k = B_{13}^k \varepsilon_{13}^k; S = B_{12}^k \varepsilon_{12}^k; H = D_{12}^k \kappa_{12}^k; \quad (1.7)$$

$$M_{11}^k = D_{11}^k (\kappa_{11}^k + \nu_{21}^k \kappa_{22}^k); M_{22}^k = D_{22}^k (\kappa_{22}^k + \nu_{12}^k \kappa_{11}^k),$$

а величины деформаций определяются через компоненты обобщенных векторов перемещений срединных поверхностей обшивок согласно равенствам

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{\partial u_1^k}{\partial s_1}; \varepsilon_{22}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial s_2} + k_2 u_3^k; \varepsilon_{12}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial s_1} + \frac{\partial u_1^k}{\partial s_2}; \varepsilon_{13}^k = \varphi_1^k + \theta_1^k; \varepsilon_{23}^k = \varphi_2^k + \theta_2^k; \quad (1.8)$$

$$\theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial s_1}; \theta_2^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial s_2} - k_2 u_2^k; \kappa_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s_1}; \kappa_{22}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial s_2}; \kappa_{12}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial s_1} + \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s_2}.$$

Для усилий – моментов поперечных дискретных элементов заполнителя, связь с соответствующими деформациями, выражается формулами

$$T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j}; T_{21j} = G_j F_j \varepsilon_{21j}; T_{23j} = G_j F_j \varepsilon_{23j}; \quad (1.9)$$

$$M_{22j} = E_j I_{2j} \kappa_{22j}; M_{21j} = G_j I_{kj} \kappa_{21j},$$

где приняты обозначения

$$\varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_{2j}}{\partial y}; \varepsilon_{21j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}; \varepsilon_{23j} = \varphi_{2j} + \theta_{2j}; \quad (1.10)$$

$$\theta_{1j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}; \theta_{2j} = \frac{\partial u_{3j}}{\partial y} - \frac{u_{2j}}{R_j}; \kappa_{22j} = \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y}; \kappa_{21j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y};$$

E_j, G_j – физико-механические параметры материала j -го элемента дискретного заполнителя; F_j, I_{1j}, I_{kj} – геометрические параметры j -го дискретного элемента.

Уравнения колебаний (1.4) – (1.10) дополняются соответствующими начальными и граничными условиями.

§2. Численный алгоритм.

Построение численного алгоритма основано на совместном использовании интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам s_1, s_2 и явной конечно-разностной схемы интегрирования по временной координате t [2]. Одной из особенностей задач колебаний неоднородных оболочек с учетом дискретного расположения ребер является наличие разрывных коэффициентов в исходных уравнениях. Учитывая вышеизложенное, решения задач теории трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с учетом продольного ребристого наполнителя сводится к рассмотрению следующих этапов: 1) поиск решения в гладкой области; 2) поиск решения на j -той линии разрыва вдоль оси OY [2].

Рассмотрим построение разностного алгоритма для уравнений (1.4) в гладкой области

$$\Omega_1 = \{s_{l-1/2} \leq s_1 \leq s_{l+1/2}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2};$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \quad (2.1)$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial S^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt;$$

.....

После стандартных преобразований в (2.1) получим разностные соотношения, которые аппроксимируют исходные уравнения (1.4) в гладкой области

$$\begin{aligned} & \frac{T_{1l+1/2,m}^{kn} - T_{1l-1/2,m}^{kn}}{\Delta s_1} + \frac{S_{l,m+1/2}^{kn} - S_{l,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_2} = \rho h(U_{1lm}^{kn})_{it} ; \\ & \frac{S_{l+1/2,m}^{kn} - S_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta s_1} + \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} - T_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_2} + \\ & + \frac{1}{2} k_{2l,m} (T_{23l,m+1/2}^{kn} + T_{23l,m-1/2}^{kn}) = \rho h(U_{2lm}^{kn})_{it} ; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

В результате такого подхода величины компонент обобщенных векторов \bar{U}_1, \bar{U}_2 соотнесены к целым точкам разностной схемы (l, m) . Величины усилий – моментов, которые используются при дифференцировании по координате s_1 , соотнесены к полупечным точкам $(l \pm 1/2, m)$, а величины которые используются при дифференцировании по координате s_2 – к $(l, m \pm 1/2)$.

Для согласования величин усилий – моментов в (2.2) уравнения (1.7) интегрируем в областях

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{ s_{l-1} \leq s_1 \leq s_l, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \} ; \\ \Omega_3 &= \{ s_{l-1/2} \leq s_1 \leq s_{l+1/2}, s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m} \} \quad \text{при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2} . \end{aligned}$$

В частности, в области Ω_2 имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_2} [T_{11}^k] d\Omega_2 dt &= \int_t \int_{\Omega_2} [B_{11}^k (\epsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \epsilon_{22}^k)] d\Omega_2 dt ; \\ \int_t \int_{\Omega_2} [S] d\Omega_2 dt &= \int_t \int_{\Omega_2} [B_{12}^k \epsilon_{12}^k] d\Omega_2 dt ; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Применяя формулы численного интегрирования, получаем следующие разностные соотношения, которые связывают величины усилий – моментов с соответствующими величинами деформаций:

$$\begin{aligned} T_{1l \pm 1/2, m}^{kn} &= B_{11}^k (\epsilon_{1l \pm 1/2, m}^{kn} + \nu_{21}^k \epsilon_{22l \pm 1/2, m}^{kn}) ; \\ S_{l \pm 1/2, m}^{kn} &= B_{12}^k \epsilon_{12l \pm 1/2, m}^{kn} ; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогичные соотношения записываем в области Ω_3 .

Для получения разностных соотношений для величин деформаций в соотношениях (2.4) интегрируем соотношение (1.8), соответственно, по областям Ω_2 и Ω_3 при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_2} [\epsilon_{11}^k] d\Omega_2 dt &= \int_t \int_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_1^k}{\partial s_1} \right] d\Omega_2 dt ; \\ \int_t \int_{\Omega_2} [\epsilon_{22}^k] d\Omega_2 dt &= \int_t \int_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_2^k}{\partial s_2} + k_2 u_3^k \right] d\Omega_2 dt ; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

После операции численного интегрирования в (2.5) получим следующие разностные соотношения, которые связывают соответствующие деформации с компонентами обобщенного вектора перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11l+1/2,m}^{kn} &= \frac{u_{1l+1,m}^{kn} - u_{1l,m}^{kn}}{\Delta s_1}; \\ \varepsilon_{22l+1/2,m}^{kn} &= \frac{u_{2l+1/2,m+1/2}^{kn} - u_{2l+1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta s_1} + k_{2l+1/2,m} \frac{u_{3l+1,m}^{kn} + u_{3l,m}^{kn}}{2}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

.....

Для построения численного решения для j -го поперечного ребра рассматриваем следующие подобласти:

$$\Omega_{1j} = \{s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\}; \quad \Omega_{2j} = \{s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m}\}; \quad \Omega_{3j} = \{s_{2m} \leq s_2 \leq s_{2m+1}\}$$

при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$. Уравнения колебаний j -го поперечного ребра (1.5) интегрируются в области Ω_{1j} :

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial T_{21j}}{\partial y} + [T_{11}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt; \quad (2.7) \\ \int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial T_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} + [M_{11}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j I_{krj} \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j I_{2j} \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt. \end{aligned}$$

После стандартных преобразований в (2.7), получены следующие разностные соотношения для уравнений (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{T_{21jm+1/2}^n - T_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [T_{11}]_{jm}^n &= \rho_j F_j (u_{1jm}^n)_{\bar{t}t}; \\ \frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{T_{23jm+1/2}^n + T_{23jm-1/2}^n}{2R_j} + [S]_{jm}^n &= \rho_j F_j (u_{2jm}^n)_{\bar{t}t}; \quad (2.8) \\ \frac{T_{23jm+1/2}^n - T_{23jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{T_{22jm+1/2}^n + T_{22jm-1/2}^n}{2R_j} + [T_{13}]_{jm}^n &= \rho_j F_j (u_{3jm}^n)_{\bar{t}t}; \end{aligned}$$

$$\frac{M_{21jm+1/2}^n - M_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [M_{11}]_{jm}^n = \rho_j I_{krj} (\varphi_{1jm}^n)_{,tt} ;$$

$$\frac{M_{22jm+1/2}^n - M_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{T_{23jm+1/2}^n + T_{23jm-1/2}^n}{2} + [H]_{jm}^n = \rho_j I_{2j} (\varphi_{2k,t}^n)_{,tt} .$$

Получение согласованных величин усилий – моментов для j -го поперечного ребра для уравнения (1.10) производится аналогично формулам (2.5), (2.6) для оболочки.

Вышеизложенный подход построения конечно-разностных соотношений для обшивок и ребер позволяет выполнить закон сохранения полной механической энергии на разностном уровне.

§3. Числовой пример.

Как частный случай уравнений (1.4) – (1.10), рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки кругового сечения с дискретным поперечным ребристым заполнителем при внутренней распределенной импульсной нагрузке. При этом, в соотношениях (1.1) полагаем: $A_1 = 1$; $k_1 = 0$; $A_2 = R_k$; $k_2 = 1/R_k$. Принимаем, что края оболочки и элементов поперечного заполнителя жестко закреплены. Граничные условия в этом случае при $s_1 = 0$, $s_1 = L$ имеют следующий вид:

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0; \quad k = \overline{1,2} .$$

Начальные условия для системы (1.1) – (1.6) при $t = 0$ имеют вид:

для обшивок –

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0 \quad (k = 1, 2); \quad \frac{\partial u_1^k}{\partial t} = \frac{\partial u_2^k}{\partial t} = \frac{\partial u_3^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial t} = 0;$$

для поперечных дискретных элементов заполнителя –

$$u_{1j} = u_{2j} = u_{3j} = \varphi_{1j} = \varphi_{2j} = 0; \quad \frac{\partial u_{1j}}{\partial t} = \frac{\partial u_{2j}}{\partial t} = \frac{\partial u_{3j}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial t} = 0 \quad (j = \overline{1, J}).$$

Задачу рассмотрим при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $L/h_1 = 40$; $h_1 = h_2$; $R_1/h_1 = 10$; $H_j/h_1 = 2$; $F_j = H_j h_1$; $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Нормальная импульсная нагрузка задана в таком виде:

$$P_3 = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – продолжительность нагрузки. В расчетах полагаем: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Подкрепляющие элементы расположены в точках $s_{1j} = [11 + (k-1) \cdot 15] \cdot \Delta s_{1j}$, $k = 1, \dots, 5$, $\Delta s_{1j} / 80$.

Полученные численные результаты позволяют характеризовать напряженно-деформированное состояние трехслойной упругой структуры цилиндрического типа в любой момент времени на исследуемом временном интервале, согласно вышеуказанных постановок. Расчеты проводились в интервале времени $0 \leq t \leq 50T$. В частности, на рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости величин прогиба u_3 от пространственной координаты s_1 в моменты времени $t = 6T$ и $t = 7T$ (в эти моменты величина u_3 достигает максимального значения в интервале расчета по времени t). Кривая с индексом 1 соответствует теории с дискретным размещением ребер (внутренний слой), с индексом 2 – (внешний слой), с индексом 3 – конструктивно-ортотропной теории трехслойных оболочек с наполнителем. Согласно приведенным численным данным наблюдается качественное и количественное отличие в полученных результатах. Учет дискретности размещения ребер (на рисунках это точки соединения кривых с индексом

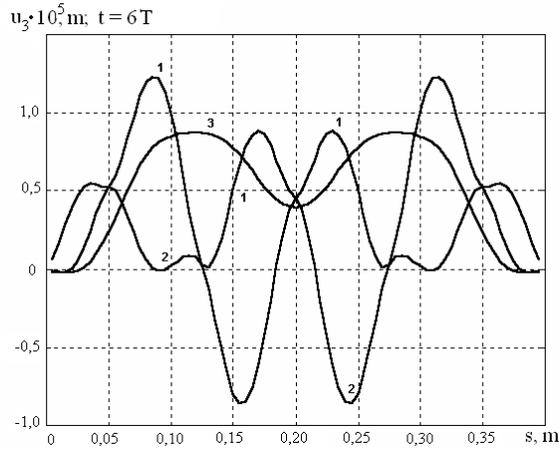


Рис. 2

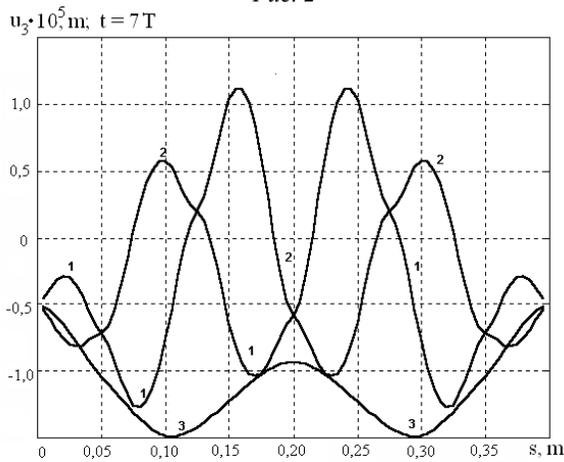


Рис. 3

сом 1 и 2) приводит к более густому волнообразованию величины u_3 по длине конструкции. Расчеты по конструктивно-ортотропной модели дают некоторые интегральные кривые, которые находятся в пределах изменения величины u_3 внутреннего и внешнего слоев согласно теории с учетом дискретности ребер (рис. 2). Как предельный случай, в момент времени $t = 7T$ величина u_3 (кривая с индексом 3) огибает соответствующие кривые с индексом 1 и 2 (рис. 3). Анализируя количественный характер приведенных результатов видно, что различия по максимальным величинам u_3 согласно приведенных теорий (теория трехслойных оболочек учетом дискретного наполнителя и конструктивно-ортотропная теория трехслойных оболочек) достигает 40%.

Заключение.

В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с поперечным дискретным наполнителем при действии нестационарной нагрузки. Разработан численный алгоритм решения данного класса задач. Приведены результаты расчетов и проведен количественный и качественный анализ полученных данных.

РЕЗЮМЕ. Отримано рівняння коливань тришарових циліндричних оболонок еліптичного перерізу з дискретним наповнювачем при нестационарному навантаженні. При розгляді елементів пружної структури використано моделі теорії оболонок і стержнів згідно з теорією оболонок Тимошенка. Чисельний метод розв'язування динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевої схем для рівнянь з розривними коефіцієнтами. Дано розв'язок задачі про динамічну поведінку тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності поперечного ребристого заповнювача. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Григояк Э.И., Куликов Г.Н. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – № 2. – С. 287 – 298.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т.5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
5. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. – М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. – 1983. – 15. – С. 3 – 68.
6. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Успехи механики: в 6-ти томах / Под ред. А.Н. Гузя. Т. 3. – К.: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
7. Altenbach H. An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates // Int. J. of Solids Struct. – 2000. – 37. – P. 3503 – 3520.
8. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates: A review // Mechanics of Composite Materials. – 1998. – 34., N 3. – P. 243 – 252.
9. Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 2001. – 54 – P. 301 – 329.
10. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core under Local Loads // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 359 – 367.
11. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Shtantsel S. E. Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 2. – P. 161 – 167.
12. Meish V.F., Pavlyuk A.V. Nonstationary Vibrations of Elliptic Cylindrical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Stringers // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 67 – 75.
13. Meish V. F., Shtantsel S. E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 12. – P. 1501 – 1507.
14. Meish Yu. A. Nonstationary Vibrations of Transversely Reinforced Elliptic Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 359 – 647.
15. Noor A.K., Burton W. S. Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – 43, N 4. – P. 67 – 97.
16. Noor A.K., Burton W.S. and Bert C.W. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Appl. Mech. Rev. – 1996. – 49, N 3. – P. 155 – 200.
17. Noor A.K., Burton W.S. and Peters J.M. Assessment of Computation Models for Multilayered Composite Cylinders // Int. J. of Solids Struct. – 1991. – 27, N 10. – P. 1269 – 1286.
18. Pagano N. J., Free edge stress fields in composite laminates // Int. J. of Solids Struct. – 1978. – 14. – P. 401 – 406.
19. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates // J. Composite Materials. – 1970. – 4. – P. 20 – 34.
20. Qatu M. S., Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989-2000, Part 1: Laminated Composite Shells. – Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55, N. 4. – P. 325 – 350.
21. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Structures. – 2010. – 93, N 1. – P. 14 – 31.
22. Reddy J. N., On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – 27. – P. 361 – 382.
23. Soldatos K. P. Mechanics of Cylindrical Shells with Non – Circular Cross Section // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 49, N 8. – P. 237 – 274.

Поступила 06.04.2016

Утверждена в печать 10.10.2017