В.Г.Карнаухов [1], В.И.Козлов [1], Т.В.Карнаухова [2]

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ И ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

[1] *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mali: karn@inmech.kiev.ua.*
[2] *Национальный технический университет «КПИ», пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: karn@inmech.kiev.ua.*

Abstract. An effect of anisotropy and shear strains on operating efficiency of piezoelectric sensors and actuators under active damping of resonance vibrations of rectangular hinged plate is studied. To simulate the vibrations of plate the Timoshenko's hypothesis is used. The analytical solution of the problem is obtained by the Fourier's method. The formulas are obtained for the potential difference, which must to be supplied to actuators to compensate the mechanical load. The analogical formulas are obtained for the sensor's indications. The formulas are given for the damping coefficient in the case of common using the sensors and actuators for the active damping of plate resonant vibrations.

Key words: resonant vibrations, active damping, sensors and actuators, orthotropic rectangular plate.

Введение.

Одним из основных методов демпфирования колебаний тонкостенных элементов является пассивный метод с использованием включения в конструкцию компонент с высокими характеристиками демпфирования. Этим вопросам посвящена обширная отечественная и зарубежная литература [2, 3, 6, 14]. В последние годы для этой цели широко используют активные методы, основанные на применении пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов [8, 9, 15 – 18].

Существуют *два основных метода* активного демпфирования колебаний. *Первый* из них основан на применении пьезоэлектрических слоев, выполняющих функции актуаторов, к которым подводится разность потенциалов, компенсирующая действие механической нагрузки, в результате чего амплитуда колебаний существенно уменьшается. Основной теоретической задачей при этом является расчет указанной разности потенциалов с учетом размеров актуатора, его размещения и др. Эффективность работы актуатора оценивается по такому критерию: тот актуатор более эффективен, к которому подводится меньшая разность потенциалов для компенсации фиксированной нагрузки.

Второй метод состоит в совместном использовании сенсоров и актуаторов. При этом к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная снимаемой с сенсора разности потенциалов, его первой или второй производной. При этом изменяются, соответственно, жесткостные характеристики, коэффициент демпфирования и инерционные характеристики элемента. Эффективность работы сенсора оценивается по следующему критерию: тот сенсор более эффективен, с которого снимается большая разность потенциалов при фиксированной нагрузке. На эффективность работы сенсором и актуаторов влияет много факторов: механические граничные условия, расположение на поверхности элементов, их размеры, температура, характеристики пьезоматериала и др. Существенное влияние на эффективность работы сенсоров и актуаторов оказывают анизотропия пассивного материала, толщина пластины и деформации поперечного сдвига. В работе [9] эти вопросы исследованы для цилиндрической панели при предположении о малости толщины пьезослоев по сравнению с толщиной пассивной слоя.

В данной статье исследуем влияние анизотропии материала пассивного слоя и деформаций поперечного сдвига для прямоугольной пластины без указанного выше предположения. Рассмотрены ортотропные и трансверсально-изотропные вязкоупругие пассивные слои, а пьезоактивные слои являются трансверсально-изотропными и упругими. Для моделивания колебаний слоистой пластины используем гипотезы С.П.Тимошенко [7, 10, 13], дополненные гипотезами о распределении электрических полевых величин по толщине активных слоев. Для случая шарнирного опирания торцов пластины получены: 1) формулы для разности потенциалов, необходимой для компенсации механической гармонической загрузки; 2) формулы для показаний сенсора; 3) формулы для коэффициента демпфирования при совместном использовании сенсоров и актуаторов.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим трехслойную шарнирно опертую прямоугольную пластину длиной a шириной b, составленную из среднего ортотропного вязкоупругого пассивного (без пьезоэффекта) слоя и двух упругих трансверсально изотропных пьезоактивных слоев. На пластину действует гармоническое во времени равномерное поверхностное давление $p = p_0 e^{i\omega t}$. Для моделирования механического поведения пассивного материала используем концепцию комплексных характеристик [4 – 6, 19], согласно которой уравнения состояния вязкоупругого материала имеют формально такой же вид, как и уравнения состояния упругого материала с тем лишь отличием, что они являются комплексными. Для описания механического поведения указанной пластины используем гипотезы С.П.Тимошенко, дополненные предположениями о малости тангенциальных составляющих вектора индукции D_x, D_y по сравнению с нормальной составляющей D_z : $D_x, D_y << D_z$. [1, 5]. Тогда из уравнения электростатики $\operatorname{div}\vec{D} = 0$ следует, что компонента D_z постоянна по толщине пьезослоя. Все компоненты вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ примем отличными от нуля. Пьезослои имеют одинаковые электромеханические характеристики, но противоположную поляризацию, так что пьезоконстанты слоев имеют противоположные знаки. В результате принятия этих гипотез получим следующие определяющие уравнения для моментов M_{11}, M_{22}, H и усилий T_{13}, T_{23}:

$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}) - M_0;\; M_{22} = D_{22}(\nu_{12}\kappa_{11} + \kappa_{22}) - M_0;$$
$$H = D_{12}\kappa_{12};\; T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13};\; T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}. \quad (1.1)$$

Здесь все жесткостные характеристики являются комплексными, их получаем путем суммирования жесткостных характеристик $\tilde{D}_{ij},\ldots$ пассивного и пьезоактивных слоев; так, например, имеем

$$D_{11} = \tilde{D}_{11} + \frac{2Em_1}{1-\nu^2} - \frac{2E^2 d_{31}^2 m_1}{(1-\nu)^2 \tilde{\varepsilon}_{33}},\ldots \quad . \quad (1.2)$$

Жесткостные характеристики пассивного ортотропного слоя определяем по известным формулам механики анизотропных пластин [5, 20]:

$$\tilde{D}_{11}=\frac{E_1h_2^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};\ \tilde{D}_{22}=\frac{E_2h_2^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};\ \tilde{D}_{12}=\frac{\nu_{12}E_2h_2^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};$$

$$\tilde{D}_{66}=\frac{G_{12}h_2^3}{12};\ \tilde{B}_{13}=G_{13}h_2,\tilde{B}_{23}=G_{23}h_2,$$

а характеристики пьезоактивных слоев определяем из соотношений:

$$M_{xx}^{(n)}=\frac{2Em_1}{1-\nu^2}(\kappa_{11}+\nu\kappa_{22})-\frac{2E^2d_{31}^2m_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\kappa_{11}+\kappa_{22})-M_0;\ m_1=\frac{1}{2}h_0^2h_1+h_0h_1^2+\frac{1}{3}h_1^3;$$

$$M_{yy}^{(n)}=\frac{2Em_1}{1-\nu^2}(\nu\kappa_{11}+\kappa_{22})-\frac{2E^2d_{31}^2m_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\kappa_{11}+\kappa_{22})-M_0;\ M_{xy}^{(n)}=\frac{Em_1}{2(1+\nu)}\kappa_{12};\ M_0=m_0V_0;\quad (1.3)$$

$$Q_x^{(n)}=2E_{44}h_1\varepsilon_{13};\ Q_y^{(n)}=2E_{44}h_1\varepsilon_{23};\ E_{44}=1/(S_{44}-d_{15}^2/\tilde{\varepsilon}_{33}^T);\ m_0=\frac{E}{1+\nu}|d_{31}|(h_0+h_1).$$

Здесь использованы обозначения, принятые в [5].

Кинематические соотношения имеют вид [5]:

$$\kappa_{11}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x};\ \kappa_{22}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y};\ \kappa_{12}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y};\ \varepsilon_{13}=\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_1;\ \varepsilon_{23}=\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_2,\quad (1.4)$$

где w – поперечный прогиб, а φ_1,φ_2 характеризуют сдвиг.

При учете сил инерции только в нормальном к поверхности пластины направлении уравнения движения имеют вид [5, 20]:

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}}{\partial y}+p=\tilde{p}\frac{\partial^2\omega}{\partial z_2};\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-T_{13}=0;\ \frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_{22}}{\partial y}-T_{23}=0.\quad (1.5)$$

Используя (1.1), (1.4), (1.5), получим три уравнения движения относительно w,φ_1,φ_2:

$$B_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+B_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+p+\left(\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}\right)=\tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$D_{11}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\nu_{21}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}\right)+D_{12}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)-B_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_1\right)=0;\quad (1.6)$$

$$D_{22}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+\nu_{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right)+D_{12}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\right)-B_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_2\right)=0.$$

Уравнения (1.6) следует дополнить граничными условиями, которые для шарнирного опирания принимают вид:

$$w=0,\ M_{11}=0,\ \varphi_2=0\ \text{при}\ x=0;a;\quad w=0,\ M_{22}=0,\ \varphi_1=0\ \text{при}\ y=0;b.\quad (1.7)$$

§2. Решение задачи для ортотропного пассивного материала.

Для шарнирного опирания торцов пластины при колебаниях по моде (m,n), когда

$$p=p_{mn}\sin(k_m x)\sin(\mathrm{p}_n\,y);\ M_0=M_{mn}\sin(k_m x)\sin(\mathrm{p}_n\,y)$$

$$\left(k_m=\frac{m\pi}{a};\ p_n=\frac{n\pi}{b};\ p_{mn}=\frac{16p}{abk_mp_n};\ M_{mn}=\frac{16M_0}{abk_mp_n}=\frac{16m_0V_0}{abk_mp_n}\right),\quad (2.1)$$

решение системы (1.6) может быть представлено в виде:

$$w = w_{mn}\sin k_m x \sin p_n y;\ \varphi_1 = \varphi_{1mn}\cos k_m x \sin p_n y;\ \varphi_2 = \varphi_{2mn}\sin k_m x \sin p_n y. \quad (2.2)$$

В результате подстановки (2.1), (2.2) в систему (1.6) получим уравнение движения относительно поперечного прогиба w_{mn} :

$$\tilde{\rho}\ddot{w}_{mn} + A^{(1)}_{mn}\dot{w}_{mn} + A^{(2)}_{mn}M_{mn} = p_{mn}. \quad (2.3)$$

Для гармонических колебаний уравнение (2.3) имеет решение $w_{mn} = w'_{mn} + iw''_{mn}$:

$$w_{mn} = w'_{mn} + iw''_{mn} = \frac{p_{mn} - A^{(2)}_{mn}M_{mn}}{(A^{(1)}_{mn} - \tilde{\rho}\omega^2)} \quad (2.4)$$

$$\left(A^1_{mn} = B_{13}k_m\frac{\Delta_{13}\Delta_{22} - \Delta_{23}\Delta_{12}}{\Delta} + B_{13}p_n\frac{\Delta_{23}\Delta_{11} - \Delta_{13}\Delta_{21}}{\Delta} + (k^2_m B_{13} + p^2_n B_{23}); \right.$$
$$\left. A^2_{mn} = B_{13}k_m\frac{\Delta_{01}\Delta_{22} - \Delta_{02}\Delta_{12}}{\Delta} + B_{23}p_n\frac{\Delta_{02}\Delta_{11} - \Delta_{01}\Delta_{21}}{\Delta} \right), \quad (2.5)$$

где для ортотропного материала имеем:

$$\Delta_{11} = k_m{}^2 D_{11} + p_n{}^2 D_{12} + B_{13}, \Delta_{22} = k_m{}^2 D_{12} + p_n{}^2 D_{22} + B_{23};$$
$$\Delta_{12} = -\left(D_{11}\nu_{12} + D_{12}\right)k_m p_n = \Delta_{21};\ \Delta_{13} = -\Delta_{01}B_{13}, \Delta_{01} = k_m; \quad (2.6)$$
$$\Delta_{23} = -\Delta_{02}B_{23};\ \Delta_{02} = p_n;\ \Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta^2{}_{12}.$$

Из (2.4) видно, что резонансная частота колебаний пластины равна $\tilde{\rho}\omega^2 = \operatorname{Re} A^{(1)}_{mn}$, а для компенсации механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов V_0 , определяемую соотношением

$$M_{mn} = \frac{16m_0V_0}{abk_m p_n} = p_{mn} / A^{(2)}_{mn}. \quad (2.7)$$

Для короткозамкнутых электродов снимаемый с них заряд Q рассчитываем с использованием формулы [1, 4, 5]:

$$Q = \gamma_{31}\left(h_0 + h_1\right)\iint\limits_{(s)}\left(\chi_1 + \chi_2\right) dxdy. \quad (2.8)$$

Для шарнирного опирания имеем

$$Q_{mn} = -4\left(h_0 + h_1\right)\gamma_{31}\left(\frac{\varphi_{1mn}}{p_n} + \frac{\varphi_{2mn}}{k_m}\right) \quad (2.9)$$

$$\left(\varphi_{1mn} = \psi_{1mn}w_{mn};\ \varphi_{2mn} = \psi_{2mn}w_{mn};\ \psi_{1mn} = \frac{\Delta_{13}\Delta_{22} - \Delta_{23}\Delta_{12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}{}^2};\ \psi_{2mn} = \frac{\Delta_{23}\Delta_{11} - \Delta_{13}\Delta_{21}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}{}^2}\right). \quad (2.10)$$

При совместном использовании сенсоров и актуаторов для активного демпфирования колебаний пластины к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная, например, току: $V_{0mn} = -\tilde{G}\dot{Q}_{mn}$. С использованием (2.9), (2.10) определяем

$$V_{0mn} = 4(h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{\psi_{1mn}}{p_n} + \frac{\psi_{2mn}}{k_m}\right)\dot{w}_{mn} = \psi_{mn}\dot{w}_{mn};\ \psi_{mn} = 4(h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{\psi_{1mn}}{p_n} + \frac{\psi_{2mn}}{k_m}\right). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в уравнение (2.3) и используя (2.1), получим:

$$\ddot{w}_{mn}+2\eta_{mn}\dot{w}_{mn}+[A_{mn}^{(1)}/\tilde{\rho}]\,w_{mn}=p_{mn}/\tilde{\rho};\ 2\eta_{mn}=\frac{16m_0}{\tilde{\rho}abk_m p_n}A_{mn}^{(2)}\psi_{mn}. \qquad (2.12)$$

Как видно из (2.12), при совместном использовании сенсоров и актуаторов для демпфирования колебаний даже для упругого материала в колеблющейся пластине появляется затухание, характеризующееся коэффициентом демпфирования η_{mn}. Для вязкоупругих материалов демпфирование порождается вязкостью материалов и при использовании сенсоров и актуаторов оно увеличивается за счет коэффициента η_{mn}. Для гармонических колебаний вязкоупругой пластины коэффициент демпфирования может быть определен следующим образом: из уравнения (2.12) определим комплексную собственную частоту ω_p. Ее получим из квадратного уравнения с комплексными коэффициентами

$$\omega_p^2-2i\eta_{mn}\omega_p-B_{mn}=0;\ B_{mn}=\frac{A_{mn}^{(1)}}{\tilde{\rho}}. \qquad (2.13)$$

(здесь для вязкоупругого материала – $\eta_{mn}=\eta'_{mn}+i\eta''_{mn}$, $B_{mn}=B'_{mn}+iB'_{mn}$. В дальнейшем нижние индексы опустим).

Решение уравнения (2.13) имеет вид

$$\omega_p=i(\eta'+i\eta'')\pm i\sqrt{(\eta'+i\eta'')^2-(B'+iB'')}=\omega'_p+i\omega''_p. \qquad (2.14)$$

Величина ω''_p равна коэффициенту демпфирования, а ω'_p – собственной частоте колебаний пластины с учетом вязкоупругих свойств материала.

§3. Решение задачи для трансверсально-изотропного пассивного материала.

Для трансверсально-изотропного материала в полученных выше формулах следует положить: $\tilde{D}_{11}=\tilde{D}_{22}=D;\ \nu_{12}=\nu_{21}=\nu;\ B_{13}=B_{23}=B'$.

При этом имеем формулы:

$$\Delta_{11}=\left(k_m{}^2+\frac{1-\nu}{2}p_n{}^2\right)D+B';\ \Delta_{22}=\left(\frac{1-\nu}{2}k_m{}^2p_n{}^2\right)D+B';$$

$$\Delta_{12}=\Delta_{21}=\frac{1+\nu}{2}Dk_mp_n;\ \Delta_{13}=-\Delta_{01}B';\ \Delta_{01}=k_m;$$

$$\Delta_{23}=-\Delta_{02}B';\ \Delta_{02}=p_n;\ \Delta=\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta^2{}_{12}.$$

В этом случае также имеем такие уравнения:

$$\varphi_{1mn}=-\frac{B'}{D}\frac{k_{mn}w_{mn}}{k_{mn}^2+p_{mn}^2+\dfrac{B'}{D}}+\frac{M_{mn}}{D}\frac{k_{mn}}{k_{mn}^2+p_{mn}^2+\dfrac{B'}{D}};$$

$$\varphi_{2mn}=-\frac{B'}{D}\frac{p_{mn}w_{mn}}{k_{mn}^2+p_{mn}^2+\dfrac{B'}{D}}+\frac{M_{mn}}{D}\frac{p_{mn}}{k_{mn}^2+p_{mn}^2+\dfrac{B'}{D}}. \qquad (3.1)$$

Используя (3.1), из первого уравнения (1.6) получим уравнение движения пластины для учета поперечного прогиба

$$\left[\frac{D(k_{mn}^2+p_{mn}^2)^2}{1+\dfrac{D}{B'}}-\tilde{\rho}\omega^2\right]w_{mn}-p_{mn}+\frac{M_{mn}(k_{mn}^2+p_{mn}^2)}{1+\dfrac{D}{B'}(k_{mn}^2+p_{mn}^2)}=0. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что для компенсации механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов, определяемую соотношением

$$M_{mn}=\frac{1+\dfrac{D}{B'}(k_{mn}^2+p_{mn}^2)}{(k_{mn}^2+p_{mn}^2)}P_{mn}. \tag{3.3}$$

Используя обозначение (2.7), получим

$$V^T{}_a=V^K{}_a\left[1+c\left(k_m{}^2+p_n{}^2\right)\right], \tag{3.4}$$

где $V^T{}_a, V^K{}_a$ – разность потенциалов, рассчитанная согласно гипотезам С.П. Тимошенко и Кирхгофа – Лява, соответственно. Как видно из (3.4), для компенсации механической нагрузки учет сдвига приводит к увеличению разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации заданной механической нагрузки.

Если выбрать поправочный коэффициент, равным $k^2=\pi^2/12$, то в формуле (3.4) –

$$c=\left(\frac{D}{B'}\right)=\left(\frac{2}{1-\nu}\right)\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[m^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2n^2\right].$$

В этом случае имеем равенство

$$V_a^{yt}=V_a^{kl}\left\{1+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[m^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2n^2\right]\right\}. \tag{3.5}$$

Для основной моды $m=n=1$ и из формулы (3.5) следует

$$V_a^{yt}=V_a^{kl}\left\{1+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\right\}. \tag{3.6}$$

При этом поправка к классическому результату зависит от отношения модулей сдвигов G/G' и отношения толщины пластины к размеру a. В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой.

Снимаемый с сенсора заряд определяем формулой

$$Q_{mn}=-4\left(h_0+h_1\right)\gamma_{31}\left(\frac{\varphi_{1mn}}{p_n}+\frac{\varphi_{2mn}}{k_m}\right)==4\left(h_0+h_1\right)\gamma_{31}\frac{k_{mn}^2+p_{mn}^2}{k_{mn}p_{mn}}\frac{1}{1+\dfrac{D}{B'}(k_{mn}^2+p_{mn}^2)}. \tag{3.7}$$

При $B'\to\infty$ получаем заряд, определяемый с использованием классической гипотезы Кирхгофа – Лява.

Из (3.2) имеем уравнение движения трансверсально-изотропной пластины вида (2.12), в котором

$$2\eta=\frac{64m_0(h_0+h_1)\gamma_{31}(k^2+p^2)^2}{\tilde{\rho}abk^2p^2[1+D(k^2+p^2)/B']};\ B=[A^{(1)}/\tilde{\rho}]=\frac{D(k^2+p^2)^2}{1+D/B'}.$$

Коэффициент демпфирования для вязкоупругого трансверсально-изотропного материала определяется по формулам (2.13), (2.14).

§4. Числовой пример.

Используя представленные выше формулы, рассчитаны собственная частота ω_{11}, модуль поперечного прогиба $|w|$ и электрический потенциал V_a, который необходимо подвести к актуатору для компенсации механического давления $p_0 = 10^3\,\text{Pa}$, действующего на квадратную со стороной $a = b = 0{,}1$м и разными толщинами. Внутренний слой пластины изготовлен из алюминиевого сплава со следующими механическими характеристиками: $E = E' + iE''$; $E' = 7{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $E'' = 0{,}01E'$; $\nu = 0{,}34$.

Пьезоэлектрические слои имеют такие комплексные электромеханические свойства [5]:

$$S'_{11} = 0{,}171 \cdot 10^{-10}\,\text{м}^2 / N;\ S'_{12} = -0{,}58 \cdot 10^{-11}\,\text{м}^2 / N;\ S'_{13} = -0{,}91 \cdot 10^{-11}\,\text{м}^2/\text{Н};$$

$$S'_{33} = 0{,}184 \cdot 10^{10}\,\text{м}^2/\text{Н};\ S'_{55} = 0{,}460 \cdot 10^{10}\,\text{м}^2/\text{Н};\ d'_{31} = -189{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};$$

$$d'_{33} = 357 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};\ d'_{15} = 609 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};\ \varepsilon'^{T}_{11} = 0{,}20541 \cdot 10^{-7}\,\text{Ф/м};$$

$$\varepsilon'^{T}_{33} = 0{,}14803 \cdot 10^{-7}\,\text{Ф/м};$$

$$S''_{11} = -0{,}2 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{N};\ S''_{12} = 0{,}1 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{N};\ S''_{13} = 0{,}2 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};$$

$$S''_{33} = -0{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};\ S''_{55} = -5{,}6 \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};\ d''_{31} = -4{,}8 \cdot 10^{-12}\,\text{К/Н};$$

$$d''_{33} = -14{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{К/Н};\ d''_{15} = -253{,}6 \cdot 10^{-12}\,\text{К/Н};\ \varepsilon''^{T}_{11} = -11270 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф/м};$$

$$\varepsilon''^{T}_{33} = -342 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф/м}.$$

В табл. 1 для разных значений отношения h/a представлены результаты расчета указанных характеристик при использовании теорий, основанных на классических гипотезах Кирхгофа – Лява и на представленной выше теории С.П.Тимошенко. При расчетах принято, что $h_2 = h_1 + h_3 = 2h_1$ (толщина среднего слоя равна сумме толщин внешних слоев). Как видно из этой таблицы, при малых отношениях h/a обе теории дают одинаковые результаты. С увеличением отношения h/a имеет место заметное отклонение результатов расчетов по классической теории и теорий с учетом сдвиговых деформаций.

Таблица 1

h/a	$10^{-4}\omega$, гц	$10^5 w$, м	$10^{-2}V_a$,	$10^{-4}\omega$, гц	$10^4 w$, м	V_a
1/100	0,3930	98,74	1,171	0,3929	98,74	1,172
1/50	0,1960	0,7911	0,234	0,1947	0,7911	0,2366
1/10	0,39195	0,09871	0,1171	0,3822	0,09871	0,1218
1/5	0,7839	0,012364	0,05861	0,7141	0,012364	0,067861

В табл. 2 представлены результаты расчетов тех же характеристик для пластины толщиной $h = h_2 + 2h_1 = 0{,}01$м в зависимости от толщины среднего слоя h_2 при использовании указанных выше теорий (использованы те же обозначения, что и в табл. 1). Из табл. 2 следует, что с уменьшением толщины активного слоя результаты расчетов изменяются незначительно. Таким образом, при малой толщине пьезослоя можно не учитывать влияния его жесткостных характеристик при расчете собственной частоты и подводимой к актуатору разности потенциалов.

Таблица 2

$10^2 h$	$10^{-4}\omega$, гц	$10^5 w$, м	V_a,	$10^{-4}\omega$, гц	$10^4 w$, м	V_a
0,99	0,4728	2,596	8,828	0,4619	2,824	9,156
0,98	0,47094	1,389	8,8727	0,45999	0,5158	9,2014
0,90	0,45624	0,31633	9,2463	0,44529	0,34699	9,6033
0,80	0,4389	0,17675	9,760	0,4281	0,19425	10,146
0,50	0,39195	0,09891	11,712	0,3822	0,1085	12,177
0,20	0,3519	0,08697	14,6401	0,3436	0,095512	15,189
0,10	0,34024	0,8668	15,97	0,3324	0,09268	16,556

Заключение.

Для моделирования вынужденных резонансных колебаний неупругих прямоугольных пластин с сенсорами и актуаторами использованы модель С.П.Тимошенко и дополнительные гипотезы о распределении индукции и напряженности электрического поля по толщине пластины. Неупругое поведение материалов учитывается концепцией комплексных характеристик. С использованием указанной модели получено решение задачи о резонансных колебаниях шарнирно опертой неупругой прямоугольной пластины с сенсорами и актуаторами. Из этого решения получены формулы для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации изменяющегося по гармоническому закону равномерного давления. Получены также формулы для заряда, снимаемого с сенсора при резонансных колебаниях пластины и выражение для коэффициента демпфирования, возникающего в результате совместного использования сенсоров и актуаторов для уменьшения амплитуды резонансных колебаний пластины. Приведенные результаты расчетов иллюстрируют влияние деформаций сдвига на эффективность работы сенсоров и актуаторов.

Р Е З Ю М Е . Досліджено вплив анізотропії і деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань шарнірно обпертих прямокутних пластин. Для моделювання коливань пластин використано гіпотези С.П.Тимошенка. Методом Фур'є одержано аналітичний розв'язок вказаної задачі. Одержано формули для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Аналогічні формули одержано для показників сенсора. Наведено формули для коефіцієнтів демпфування у випадку сумісного використання сенсорів та актуаторів для активного демпфування резонансних коливань пластин.

1. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т.5). – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.
2. *Гузь А.Н., Кабелка И., Маркуш Ш. и др.* Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов / Под ред. Гузя А.Н. – К.: Наук. думка, 1991. – 368 с.
3. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В.* Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т.1. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.
4. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т.4).– К.: Наук. думка, 1988. – 328 с.
5. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – № 95. – С. 75 – 95.
6. *Матвеев В.В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
7. *Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu.* Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53,** N 2. – P.164 – 172.

8. *Encyclopedia of Smart Materials*, (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176 p.
9. *Gabbert U., Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluver Academic Pub, 2001. – 384 p.
10. *Grigorenko A.Ya., S. Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N.* Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in Refined Formulation // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 326 – 332.
11. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 374 – 390.
12. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A.* Free Vibrations of Nonthin Elliptic Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 668 – 679.
13. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Propagation of Axisymmetric Electroelastic Waves in a Hollow Layered Cylinder Under Mechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 562 – 567.
14. *Jones D.I.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: John Wiley & Sons, 2001. – 412 p.
15. *Karlash V.L.* Influence of Electric Loading Conditions on the Vibrations of Piezoceramic Resonators // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 64 – 172.
16. *Karlash V.L.* Conductance- and Susceptance-Frequency Responses of Piezoceramic Vibrators // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 464 – 471.
17. *Karlash V.L.* Using Passive Two-Port Networks to Study the Forced Vibrations of Piezoceramic Transducers // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 595 – 602.
18. *Karlash V.L.* Phase-Frequency Characteristics of the Longitudinal and Transverse Vibrations of Planar Piezoceramic Transformers // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 349 – 353.
19. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators Under Harmonic Loading (Review) // Int. Appl. Mech.– 2017. – **53**, N1. – P. 6 – 58.
20. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 547 p.

Поступила 30.03.2017 Утверждена в печать 30.01.2018