

В. Н. Юрчук, Я. Я. Рушицкий

**ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ОДИНОЧНОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РАДИАЛЬНОЙ ВОЛНЫ С НАЧАЛЬНЫМ  
ПРОФИЛЕМ В ВИДЕ ФУНКЦИИ МАКДОНАЛЬДА**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A new variant of nonlinear wave equation is obtained for the solitary nonlinear cylindrical radial wave of displacement (a wave in direction of radial coordinate in cylindrical coordinates), to which in following the approximate method of solving is applied that is approved in the problem on plane longitudinal wave. The numerical analysis is carried out for the wave initial profile in the form of Macdonald function. About 30 variants of initial parameters are studied numerically – three variants of materials (aluminium, copper, steel), three variants of the wave bottom, three variants of initial maximal amplitude. For this initial profile, the set of nine two-dimensional plots «wave shape (displacement) – passed by the wave distance» is built that shows the level of distortion. This profile appears unusual from point of view of profile shape. The profile shapes that were considered before (sinusoidal, bell-shaped, in the form of Whittaker and Hankel functions) were changed essentially. They formed at tops the plateau and then cave demonstrating in this way the strong distortion. In the case in hand, the shape of Macdonald function is practically not changed, the profile bottom is increases slightly and the profile maximal value only increased significantly changing the steepness of the profile left part.

**Key words:** solitary elastic wave, plane longitudinal wave, cylindrical radial wave, approximate method, distortion of wave initial profile, Macdonald function.

**1. Аналитические формулы, на которых основан числовой анализ эволюции одиночной цилиндрической радиальной волны смещения с начальным профилем в виде гладкой функции.**

Одиночные волны исследованы в меньшей степени, чем гармонические и до сих пор являются предметом исследований [2, 4 – 7, 12, 14, 17]. Цилиндрической радиальной волной смещения называют в линейной теории упругости волну, которая распространяется в бесконечном пространстве с цилиндрической круговой полостью, к граничной поверхности которой приложен импульс, возбуждающий движение в радиальном направлении. В простейшем случае импульс равномерный в пространстве и гармонический во времени.

Цилиндрическая система координат  $O r \vartheta z$  выбирается таким образом, что ось  $Oz$  совпадает с осью полости и задача о движении волны становится осесимметричной и зависимой лишь от радиуса  $r$  и времени  $t$ . Ненулевыми являются радиальное смещение  $u_r$  и три компонента тензора напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}$ . Уравнение движения имеет вид [10, 12]

$$\mu \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[ \frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right] - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (1)$$

Если ввести потенциал  $\Phi(r, t)$

$$u_r = \Phi_{,r}, \quad (2)$$

то уравнение (1) преобразуется в более простое

$$\Phi_{,tt} - (c_L)^2 \left( \Phi_{,rr} + \frac{1}{r} \Phi_{,r} \right) = 0. \quad (3)$$

Основанное на модели Мэрнагана нелинейное уравнение, соответствующее линейному уравнению (1), имеет вид [1, 2, 9, 12]

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}); \quad (4)$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2; \quad (5)$$

$$\tilde{N}_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu};$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}.$$

Задача о гармонической во времени волне смещения, распространяющейся от цилиндрической полости радиуса  $r_o$  вследствие приложенных гармонической во времени нагрузки  $\sigma^{rr}(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$  или гармонического во времени смещения  $u_r(r_o, t) = u_{r_o} e^{i\omega t}$  описана в [12, 13, 15] для уравнения (5) в рамках метода последовательных приближений с удержанием лишь первых двух аппроксимаций.

Первая (линейная) аппроксимация описывается аналитически через функцию Ханкеля первого рода и первого порядка

$$u_r^{(1)}(r, t) = u_r^o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

где  $u_r^o$  – заданный в условии на поверхности полости амплитудный множитель

$$u_{r_o} = - \frac{p_o k_L}{k_L (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)},$$

$k_L = (\omega/v_L)$ ,  $v_L = \sqrt{[(\lambda+2\mu)/\rho]}$  – волновое число и фазовая скорость линейной плоской продольной волны.

*Примечание 1.* Решение (6) свидетельствует, что волна гармонична во времени, а по пространственной координате гармонична лишь асимптотично. Интенсивность линейной радиальной цилиндрической волны уменьшается со временем распространения вследствие свойств функции Ханкеля  $H_1^{(1)}$ .

Нелинейная волна в рамках первых двух аппроксимаций аналитически представляется в виде [12, 15]

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t). \quad (7)$$

Второе приближение определялось двумя способами. Первый способ основан на предположении, что четыре нелинейные составляющие в (5) с множителями  $r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}$  мало влияют на окончательный результат при увеличении расстояния от полости. Иными словами, уравнение (4) анализировалось при условии

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r}. \quad (8)$$

Далее использовалось приближенное представление функций Ханкеля [3, 8, 13]

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left[z - \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)\right]} \left\{ 1 + i \frac{4p^2 - 1}{8z} - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots \right\}. \quad (9)$$

В итоге, нелинейное решение получено в виде

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_r^0 e^{i\left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{k_L r}} \left( 1 - \frac{1}{8} \frac{i}{k_L r} - \frac{9}{128(k_L r)^2} \right) + \quad (10)$$

$$+ \frac{r(u_r^0)^2}{\pi k_L} (k_L)^2 N_1 e^{i2\left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \left[ -\frac{2}{3} \frac{1}{k_L r} + \frac{5}{18} \frac{i}{(k_L r)^2} + \frac{151}{288} \frac{1}{(k_L r)^3} \right].$$

Второй способ учитывает все нелинейные составляющие в уравнении (4) и использует рекуррентные формулы для производных функций Ханкеля и факт, что произведения  $(H_0^{(1)}(k_L r))^2, (H_1^{(1)}(k_L r))^2, H_0^{(1)}(k_L r)H_1^{(1)}(k_L r)$  не являются решениями линейного аналога уравнения (4). Соответствующее второму способу решение имеет вид

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) =$$

$$= u_{r0} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \left\{ B_{00} [H_0^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{11} [H_1^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t}. \quad (11)$$

Проведенное числовое моделирование для металлических конструкционных материалов показало [12], что начиная с довольно близкого к полости расстояния решения (10) и (11) практически идентичны. Это дает основания для следующего изменения начального нелинейного уравнения (4): проигнорируем лишь две из пяти нелинейных составляющих и сохраним справа в (4) выражение

$$-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2; \quad (12)$$

представим уравнение (4) в виде

$$u_{r,rr} (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) + \frac{1}{r} u_{r,r} (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) - \frac{u_r}{r^2} (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) - (c_L)^{-2} u_{r,tt} = 0; ;$$

примем приближенно, что  $\tilde{N}_1 \approx \tilde{N}_3 \approx \tilde{N}_4$  (в действительности,  $\tilde{N}_1 > \tilde{N}_4 \gg \tilde{N}_3$ ), и получим выражение для нелинейного волнового уравнения

$$(c_L)^2 (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (13)$$

Уравнение для цилиндрической радиальной волны (13) имеет такую же структуру, как уравнение для плоской продольной волны  $u_{1,tt} - \left\{ (c_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0$ , использованное в работах [10 – 15, 17, 18]. Это позволяет использовать в анализе уравнения (13) подход из работ [10 – 15, 17, 18].

**2. Одиночная цилиндрическая радиальная волна смещения. Приближенный метод анализа. Случай, когда начальный профиль описывается аналитически функцией Макдональда.**

Предположим, что начальный профиль волны описывается функцией  $u_r(r, t = 0) = F(r)$  и одиночная волна распространяется в виде

$$u_r(r, t) = F(a(r - vt)), \quad (14)$$

где скорость волны определяется выражением

$$v = \sqrt{1 + \tilde{N}_1 u_{r,r}} c_L. \quad (15)$$

*Примечание 2.* Параметр  $a$  введен в представление (14) с целью выбора длины подошвы одиночной волны – в зависимости от значения этого параметра подошва волны может или сужаться или расширяться. В гармонической волне такой параметр называют длиной волны  $\lambda = (2\pi/k)$ .

Примем ограничение в представлении (15)

$$\tilde{N}_1 u_{r,r} \ll 1 \quad (16)$$

и представим приближенно решение уравнения (13) в виде

$$u_r(r, t) \cong F \left[ a(r - c_L t) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right]. \quad (17)$$

Точность приближения (17) зависит от точности выполнения условия (16), которое включает ограничения на два параметра: параметр  $\tilde{N}_1$  и градиент перемещения  $u_{r,r}$ . Ограничим анализ классом конструкционных материалов, для которых модель Мэрнагана достаточно приемлема. Для такой ситуации в работах [10 – 15, 17, 18] показано, что при точности 0,1% ограничения (12) и (14) можно уточнить:  $|\alpha u_{r,r}| \leq 0,001$ ,  $|u_{r,r}| \leq 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ .

Обозначим фазу волны с постоянной фазовой скоростью через  $\sigma = a(r - c_L t)$  и дополнительный малый параметр через  $\delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t$ , представим решение (17) (одиночную волну) в виде ряда Тейлора и ограничим рассмотрение первыми двумя членами ряда из-за малости  $\delta$ . Тогда ввиду равенства

$$u_{r,r}(r, t) \approx F'_\sigma(1/2) \cdot \sigma'_r = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot (1 - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t) \approx F'_\sigma,$$

решению (17) можно придать вид

$$u_r(r, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) \left[ \delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right] = F(\sigma) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t \left[ F'(\sigma) \right]^2. \quad (18)$$

Приближенное представление решения (18) для одиночной цилиндрической радиальной волны имеет общий характер и для разных конкретно выбранных функций  $F$  будет описывать возникновение (помимо «первой гармоники») «второй гармоники» или подобных ей новых составляющих и увеличение амплитуды «второй гармоники» со временем распространения волны.

Однако в данном случае функция  $F(r)$  должна быть решением линейного аналога нелинейного волнового уравнения (13). Поскольку движение одиночной волны не предполагается гармоничным во времени, то цилиндрическая функция действительного аргумента – функция Ханкеля  $H_\lambda(r)$  [3, 8] – уже не является решением уравнения

$$(c_L)^2 \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (19)$$

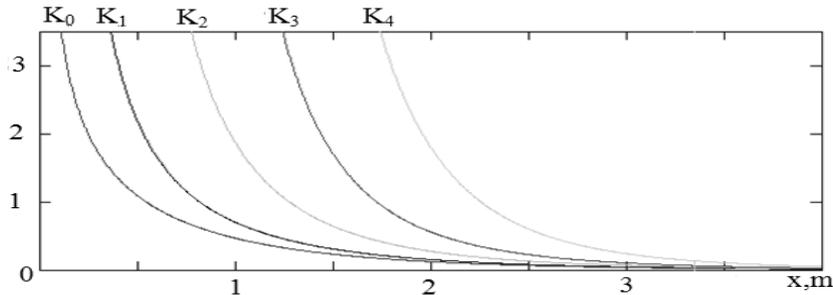


Рис. 1

Решением уравнения (19), имеющим вид (14), является цилиндрическая функция мнимого аргумента – функция Макдональда  $K_\lambda(r)$  [3, 8]. На рис. 1 показаны графики функции Макдональда  $K_\lambda(r)$  с пятью значениями индекса  $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ . Из рисунка видно, что графики функций напоминают график гиперболы (они пологие и вогнуты вниз) при изменении индекса  $\lambda$  графики функций отличаются пологостью и сдвигом профиля.

Выберем форму начального профиля волны в виде функции  $K_0(r)$  и подставим полученное конкретное выражение в формулу (18)

$$u_r(r, t) \approx K_0(\sigma) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t [K_0'(\sigma)]^2. \quad (20)$$

Используя известную [3, 8] формулу  $K_0'(\sigma) = -K_1(\sigma)$ , решение (20) можно преобразовать к виду

$$u_r(r, t) \approx K_0(a(r - c_L t)) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t [K_1(a(r - c_L t))]^2. \quad (21)$$

Решение (21) подтверждает основное предположение о постепенном изменении профиля волны при ее распространении и также позволяет сделать более конкретное заключение о механизме изменения – для каждого конкретного значения времени и фазы (конкретной точки на профиле волны) соотношение линейной и нелинейной добавок будет своим.

### 3. Параметры материала и волны в последующем числовом моделировании.

Выберем три металлических конструкционных материала с такими параметрами в рамках модели Мэрнагана (система СИ) [1, 9, 12, 15, 18]:

алюминий –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3; \alpha = -16,81;$$

медь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Из рис. 1 следует, что функция  $K_0(r)$  имеет подошву  $L = 10$ . Поэтому при представлении профиля в виде  $u_r(ar) = K_0(ra)$  параметр  $a$  определяет длину подошвы по формуле  $\sigma = (1/a)$ . Для всех трех материалов начальная подошва выбрана одинаковой  $L = 0,1$  ( $a = 10$ ) и вариантов выбора три:  $L = \{0,1; 0,20; 0,25\}$  ( $a = \{10; 50; 40\}$ ). Начальная амплитуда выбиралась одинаковой для каждого материала и для каждой начальной подошвы волны:  $a_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ .

Далее рассмотрено 9 вариантов начального профиля волны (3 варианта материала, 3 варианта длины (подошвы) волны, 3 графика сравнений шагов и 1 вариант, на котором построены две отдельных гармоники на одном графике).

### 4. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Макдональда.

Рассмотрим формулу (21) в следующем виде

$$u_r(r, t) \approx a^\circ K_0(a(r - c_L t)) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t (a^\circ)^2 [K_1(a(r - c_L t))]^2. \quad (22)$$

Подставляя в (22) приближенные значения функций  $K_0$  и  $K_1$ , получим решение:

$$u_r(r, t) \approx a^o \sqrt{\frac{2}{\pi a(r - c_L t)}} e^{-a(r - c_L t)} - (23)$$

$$-(1/2) \tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2 \left[ \left( \frac{1}{2\sqrt{(ar - c_L t)^3}} + \frac{1}{\sqrt{a(r - c_L t)}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a(r - c_L t)} \right]^2.$$

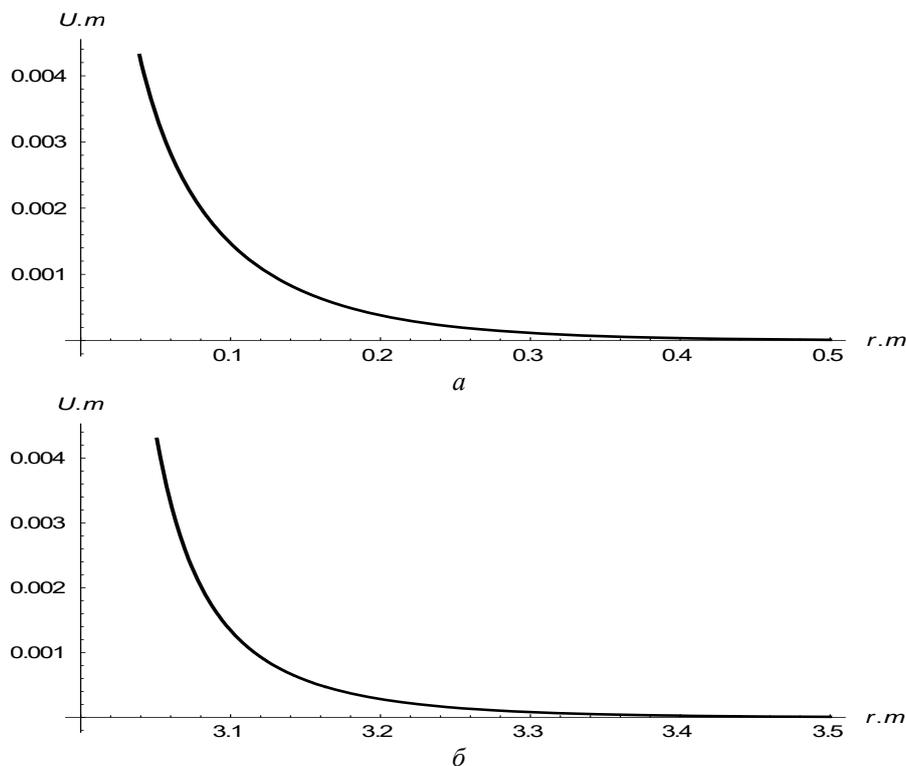
Решение (23) состоит из линейной и нелинейной составляющих и описывает изменение начального профиля одиночной волны вследствие присутствия нелинейной экспоненциальной составляющей и прямой зависимости множителя при этой составляющей от радиуса и времени.

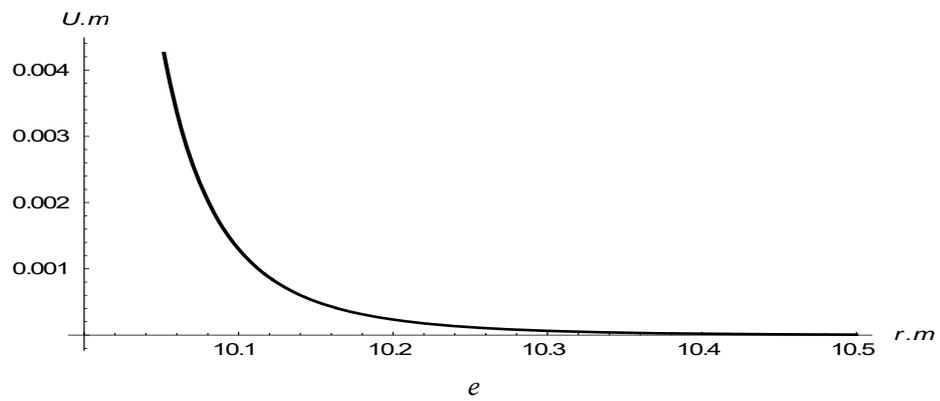
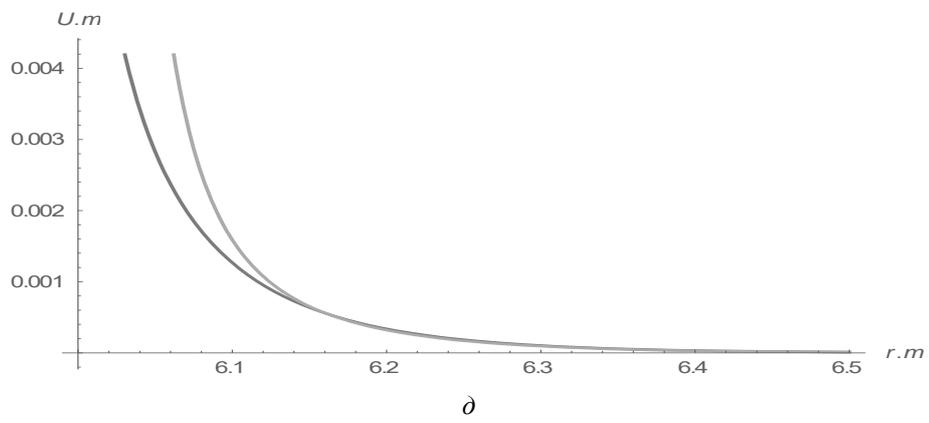
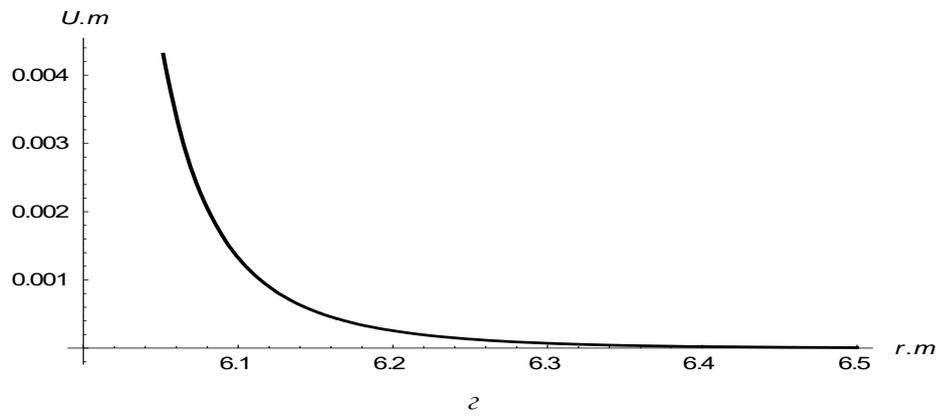
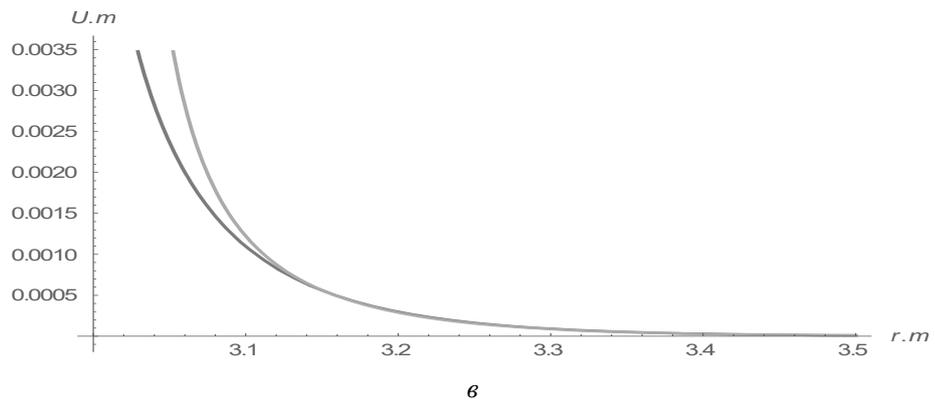
На основании формулы (23) построены двумерные графики с координатами «форма волны  $u_r$  – пройденное волной расстояние  $r$ ». При построении графиков волны смещения, которая распространяется от цилиндрической полости радиуса  $r_0$ , учтен факт, что должно выполняться условие  $r \geq r_0$ .

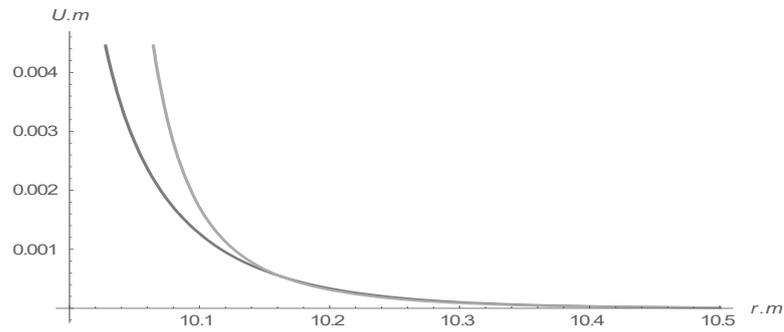
Всего исследовано около 30 наборов (3 материала, 3 варианта длины волны, 1 вариант двух гармоник, 3 варианта сравнения шагов). Каждый набор включает 9 графиков с формой профиля волны для различных расстояний – 5 графиков эволюции профиля волны от начального положения волны до положения на расстоянии в 10 повторений длины подошвы, где влияние нелинейности уже проявляется и искажение профиля вполне наблюдаемо визуально, и дополнительно график первой и второй (нелинейной) составляющей, показывающий уровень влияния нелинейности, а также 3 графика сравнения предыдущего и последующего шагов.

На рис. 2 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал алюминий,  $r_0 = 0,01$ ;  $a_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ .

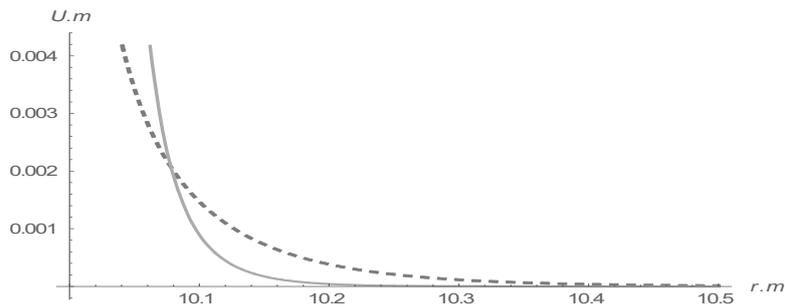
Из графиков следует, что эволюция несимметричного начального профиля волны происходит следующим образом: максимальное значение амплитуды растет и левая часть профиля становится более крутой. Первоначальный график как бы сжимается.







Ж



з

Рис. 2

После каждого двух шагов показаны графики, на которых сравниваются предыдущий и последующий шаги.

На восьмом графике сравнены первый и последний шаги.

На девятом графике показана разница между линейным решением («первой гармоникой») и нелинейной добавкой («второй гармоникой»), где штрих-пунктирная линия – это линейное решение, а сплошная линия – это нелинейная добавка.

Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным профилем в виде функции Макдональда позволяет описать такое волновое явление как дисторсия профиля.

#### Заключение.

Получен новый вариант нелинейного волнового уравнения для цилиндрической радиальной волны смещения  $u_r(r, t)$ , к которому дальше применен приближенный метод решения, апробированный ранее на задаче о плоской продольной волне.

Проведен числовой анализ для волны с начальным профилем в виде функции Макдональда  $K_0(r)$ .

Этот профиль оказался необычным с точки зрения самой формы профиля. Рассмотренные ранее формы профиля (синусоидальный, колоколообразный, в виде функций Уиттекера и Ханкеля) изменялись существенно, образуя на вершинах сначала плато, далее впадину и демонстрируя сильное искажение. В данном случае, форма функции Макдональда практически не искажается, подошва профиля слабо увеличивается и лишь максимальное значение профиля увеличивается существенно, изменяя крутизну левой части профиля.

**РЕЗЮМЕ.** Отримано новий варіант нелінійного хвильового рівняння для циліндричної радіальної хвилі зміщення, до якого далі застосовано наближений метод розв'язування, що апробований раніше на задачі про плоску поздовжню хвилю. Проведено числовий аналіз для хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда. Чисельно вивчено біля 30 комбінацій набору початкових параметрів – три варіанти матеріалу (алюміній, мідь, сталь), три варіанти підшви хвилі, один варі

ант графіку що поєднує обидві гармоніки та три варіанта порівняння кроків. Для кожного варіанту побудовано набір з дев'яти двовимірних графіків «форма хвилі (зміщення) – пройдена хвилею від стань», які показують рівень спотворення хвилі. Цей профіль виявився незвичайним з точки зору форми профіля. Форми профіля, які розглядалися раніше (синусоїдальний, дзвоноподібний, у вигляді функцій Уіттекера та Ханкеля), змінювалися суттєво, утворюючи на вершинах спочатку плато, далі впадину і демонструючи сильне спотворення. У даному випадку, форма функції Макдональда практично не спотворюється, підосва профіля незначно збільшується і лише максимальне значення профіля збільшується суттєво, змінюючи крутизну лівої частини профіля.

1. Руцицький Я.Я., Журнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
3. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7<sup>th</sup> revised edition. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
4. Guz I.A., Rushchitsky J.J. Theoretical Description of a Delamination Mechanism in Fibrous Micro- and Nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1129 – 1136.
5. Hussein M.I., Khayattourian R. Nonlinear elastic waves in solids: Deriving simplicity from complexity // Bulletin of the American Physical Society. – 2015. – **60**, N 1. ([http://meetings.aps.org/link/BAPS.2015.MAR\\_Q8.10](http://meetings.aps.org/link/BAPS.2015.MAR_Q8.10)).
6. Janno J., Seletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equation by measuring solitary waves // Wave Motion. – 2015. – **52**. – P. 15 – 25.
7. Narahara K. Asymmetric solitary waves in coupled nonlinear transmissions lines // Wave Motion. – 2015. – **58**. – P.13 – 21.
8. Olde Daalhuis A.B. Confluent Hypergeometric Functions. Chapter 13. – P. 383 – 402. Whittaker Functions. 13.14-13.26. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
9. Rushchitsky J.J. On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 119 – 133.
10. Rushchitsky J.J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Plane-Strain State // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 496 – 505.
11. Rushchitsky J.J. Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **9**, N 12. – P. 600 – 643.
12. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
13. Rushchitsky J.J., Cattani C. Cubically Nonlinear Elastic Waves Versus Quadratically Ones // Int. Appl. Mech., 2003. – **39**, N 12. – P. 1361 – 1399.
14. Rushchitsky J.J., Cattani C., Terletska E.V. Wavelet Analysis of the Evolution of a Solitary Wave in a Composite Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 311 – 318.
15. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P.282 – 290.
16. Structural and Residual Stress Analysis. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
17. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2016. – **53**, N 1. – P.104 – 121.
18. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile // Int. Appl. Mech. – 2016. – **53**, N 3. – P.300 – 305.

Поступила 16.12.2016

Утверждена в печать 30.01.2018