

В. А. Баженов, О. А. Лукьянченко,
Ю. В. Ворона, Е. В. Костина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

*Киевский национальный университет строительства и архитектуры (КНУСА),
пр-т Воздухофлотский, 31, 03037 г. Киев, Украина; e-mail: lukianch0907@meta.ua*

Abstract. A numerical technique is presented for constructing the reduced model for parametric oscillations stability of a shallow shell with negative Gaussian curvature of the hyperbolic paraboloid type. To form the reduced mass matrix, damping matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix the procedures of finite element software is used. An analysis of the static and dynamic nonlinear behavior of a hyperbolic paraboloid permits to reveal its difference from the shallow shells of positive Gaussian curvature. Namely, an effect of the constant component of the parametric load on the eigenfrequencies of oscillations with a subsequent exit into the stability zone is revealed. The authors propose to study this peculiarity by constructing the additional reduced stability model for the parametric oscillations of hyperbolic paraboloid just in the way stated in this study.

Key words: dynamic stability, parametric oscillations, finite element method, shallow shell, hyperbolic paraboloid.

Введение.

Гиперболические параболоиды являются пологими оболочками отрицательной гауссовой кривизны, которые используются во многих областях техники и строительства. Достаточно детально разработаны методы расчета таких оболочек при статическом действии внешних нагрузок [1, 2, 5 – 7, 10, 12, – 16, 18 – 20, 23, 28, 31]. Количество работ, посвященных исследованию динамического поведения гиперболических параболоидов, сравнительно мало. Важной остается задача создания редуцированных моделей устойчивости параметрических колебаний пологих оболочек, в том числе отрицательной гауссовой кривизны [3, 4, 6, 9, 11, 21, 22, 24 – 27, 29, 30, 32]. Ее решение с помощью аналитических методов является сложным и содержит некоторые предположения, поэтому все чаще применяются численные методы. При построении дискретных моделей пологих оболочек широкое применение получил метод конечных элементов, который реализован в современных вычислительных комплексах ANSYS, NASTRAN, SCAD и других [17]. Построение редуцированных дискретных моделей устойчивости параметрических колебаний упругих систем, в том числе пологих оболочек положительной гауссовой кривизны, выполнено авторами и освещено в работах [3, 4]. Актуальной остается задача моделирования устойчивости параметрических колебаний пологих оболочек отрицательной гауссовой кривизны типа гиперболического параболоида.

Ниже выполнено построение редуцированной дискретной модели устойчивости параметрических колебаний латунной квадратной жестко закрепленной пологой тонкостенной оболочки типа гиперболического параболоида при действии поверхностного давления с применением процедур программного комплекса конечноэлементного анализа NASTRAN [17]. Для определения редуцированных матриц масс, демпфирования, жесткости и геометрической жесткости решены линейная и нелинейная задачи статики оболочки (Linear Static, Nonlinear Static), линейная задача устойчивости (Buckling) при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки. Вы-

полнен модальный анализ гиперболического параболоида в линейной постановке (Normal Modes). В нелинейной постановке определены собственные частоты колебаний оболочки, нагруженной постоянной составляющей параметрической нагрузки (Nonlinear Static, Modes_Param). Выявлены особенности статического и динамического поведения гиперболического параболоида, которые были учтены при формировании редуцированной модели устойчивости параметрических колебаний оболочки.

§1. Формирование редуцированных моделей динамической устойчивости параметрических колебаний пологих оболочек.

За основу построения редуцированных моделей динамической устойчивости параметрических колебаний пологих оболочек авторами принята численная методика редуцирования в задачах параметрических колебаний упругих систем, представленная в статьях [3, 4, 11]. Известно, что уравнение динамической устойчивости упругой системы может быть записано в виде уравнения ее статического равновесия с добавлением даламберовых сил инерции, диссипативных сил и некоторых составляющих невозбужденного напряженно-деформированного состояния системы, зависящих от времени. Зададим параметрические силы с точностью до двух множителей, один из которых α характеризует постоянную составляющую параметрического воздействия, а второй β – составляющую, изменяющуюся во времени по закону $f(t)$ [21].

Тогда уравнение устойчивости параметрических колебаний упругой системы запишется в виде дифференциальных уравнений в частных производных, которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям

$$\tilde{M}\ddot{\vec{v}}(t) + \tilde{C}\dot{\vec{v}}(t) + \tilde{K}\vec{v}(t) + \alpha\tilde{K}_{G_1}\vec{v}(t) + \beta f(t)\tilde{K}_{G_2}\vec{v}(t) = 0, \quad (1.1)$$

где \tilde{M} и \tilde{K} – инерционный и упругий операторы; \tilde{K}_{G_1} и \tilde{K}_{G_2} – составляющие оператора параметрических сил в уравнении квазистатического равновесия; \tilde{C} – оператор, учитывающий диссипативные силы. Область определения решений $\vec{v}(t)$ уравнения (1.1) совпадает с областью определения оператора \tilde{K} . Операторы \tilde{M} , \tilde{K} , \tilde{K}_{G_1} и \tilde{K}_{G_2} – положительно определены.

Выполнение прикладных расчетов требует перехода от операторного уравнения (1.1) к дискретной динамической модели. Задачу динамической устойчивости для систем с конечным числом степеней свободы на основе метода конечных элементов запишем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\vec{u}}(t) + C\dot{\vec{u}}(t) + K\vec{u}(t) + \alpha K_{G_1}\vec{u}(t) + \beta f(t)K_{G_2}\vec{u}(t) = 0, \quad (1.2)$$

где $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – вектор узловых перемещений; M , K , K_{G_1} и K_{G_2} – положительно определенные матрицы масс, жесткости и геометрической жесткости соответственно, C – матрица демпфирования.

В настоящее время существует много подходов для решения этой классической задачи, когда $f(t)$ является детерминистической периодической функцией или случайным стационарным процессом [3, 4, 24 – 28, 30]. При рассмотрении реальных объектов дискретные модели могут быть большого размера, что влечет за собой вычислительные трудности. Поэтому необходимо выполнить редукцию исходной дискретной модели, при этом существенно учитывать характеристики параметрического воздействия.

Для построения редуцированных моделей можно применить метод обобщенных координат. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ – система линейно-независимых векторов, достаточная для представления в пространстве E_n . Нетривиальное решение системы (1.2) можно аппроксимировать выражением

$$\vec{u}(t) = V \vec{y}(t), \quad (1.3)$$

где V матрица размерностью $n \times m$ определяется системой базисных векторов $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^m$:

$$V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m), \quad (1.4)$$

$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_i(t), \dots, y_m(t))^T$ – вектор обобщенных координат. Исходя из (1.2) и (1.3) относительно компонент вектора $\vec{y}(t)$ записывается система m обыкновенных дифференциальных уравнений

$$V^T M V \ddot{\vec{y}}(t) + V^T C V \dot{\vec{y}}(t) + V^T K V \vec{y}(t) + \alpha V^T K_{G_1} V \vec{y}(t) + \beta f(t) V^T K_{G_2} V \vec{y}(t) = 0. \quad (1.5)$$

Систему (1.5) представим в виде

$$M^* \ddot{\vec{y}}(t) + C^* \dot{\vec{y}}(t) + K^* \vec{y}(t) + \alpha K_{G_1}^* \vec{y}(t) + \beta f(t) K_{G_2}^* \vec{y}(t) = 0, \quad (1.6)$$

где редуцированные матрицы масс M^* , демпфирования C^* , жесткости K^* , геометрической жесткости $K_{G_1}^*$ и $K_{G_2}^*$ размерностью $m \times m$ представляются, соответственно, выражениями:

$$M^* = V^T M V; \quad (1.7)$$

$$C^* = V^T C V; \quad (1.8)$$

$$K^* = V^T K V; \quad (1.9)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K_{G_1} V; \quad (1.10)$$

$$K_{G_2}^* = V^T K_{G_2} V. \quad (1.11)$$

Для сложных объектов исследование динамической устойчивости может быть выполнено при построении редуцированных моделей с размерностью m , которое выбирается значительно меньше n ($m \ll n$). Вопрос об адекватности модели (1.6) решается, с одной стороны, исследованием внутренней сходимости результатов при увеличении m , а с другой стороны – применением при редукции других базисных векторов.

Главные вычислительные проблемы связаны с определением редуцированных матриц. Для этого необходимо вычислительными процедурами соответствующего вычислительного комплекса формировать матрицы $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$, столбцы которых представляют собой, соответственно, векторы $M\vec{v}_j, C\vec{v}_j, K\vec{v}_j, K_{G_1}\vec{v}_j, K_{G_2}\vec{v}_j$, ($j = 1, 2, \dots, m$). Однако, в стандартных вычислительных комплексах процедуры для определения всех этих векторов, как правило, отсутствуют. Есть процедура для определения реакции системы на заданное поле перемещений \vec{v} , т. е. для вычисления вектора $K\vec{v}$, где K – матрица жесткости системы, которая рассматривается. Применяя такую процедуру, можно определить векторы $M\vec{v}, K_{G_1}\vec{v}, K_{G_2}\vec{v}$. Также при некоторых условиях можно определить структуру матрицы C и вектора $C\vec{v}$. Для этого, кроме указанной выше процедуры, используются процедуры анализа свободных колебаний и процедуры решения задачи устойчивости.

Сначала представляется алгоритм вычисления вектора $M\vec{v}$ для любого поля перемещений \vec{v} . Для системы формулируется задача об определении частот и форм собственных колебаний

$$(K - \omega^2 M)\vec{\varphi} = 0. \quad (1.12)$$

Пусть ω_i ($i = 1, 2, \dots, m_1$) – вектор частот собственных колебаний дискретной модели, $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots, \varphi_{mi})^T$ ($i = 1, 2, \dots, m_1$) – система векторов собственных форм колебаний. Система векторов $\{\vec{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ – ортогональна, т. е. $\vec{\varphi}_j^T M \vec{\varphi}_i = 0, \vec{\varphi}_j^T K \vec{\varphi}_i = 0$ ($i \neq j$).

С помощью подмножества собственных форм колебаний $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ можно приближенно представить поле перемещений \bar{v} в виде

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \quad (1.13)$$

В силу ортогональности векторов $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ имеем

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i}. \quad (1.14)$$

Вследствие (1.12) имеем равенство

$$M \bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (1.15)$$

Тогда, учитывая (1.14), можно записать

$$M \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M \bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (1.16)$$

Таким образом, исходя из процедуры вычисления $K \bar{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m_1$), можно определить вектор $M \bar{v}$.

Аналогично строится алгоритм вычисления векторов $K_{G_1} \bar{v}$ и $K_{G_2} \bar{v}$, только вместо процедуры анализа собственных колебаний применяется процедура решения задачи статической устойчивости. Сначала рассматривается алгоритм вычисления вектора $K_{G_1} \bar{v}$. Для системы формулируется задача устойчивости

$$(K + \lambda K_{G_1}) \bar{\psi} = 0. \quad (1.17)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_2}$ – совокупность критических значений задачи (1.17), $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m_2}$ – соответствующие формы потери устойчивости. Вследствие выполненных выше предположений относительно свойств матриц K и K_{G_1} эти векторы ортогональны в метрике, которая определяется матрицей K_{G_1} и, соответственно, матрицей K , т.е.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j^T K_{G_1} \bar{\psi}_i &= 0 \\ \bar{\psi}_j^T K \bar{\psi}_i &= 0 \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (1.18)$$

С помощью подмножества форм потери устойчивости $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ приближенно поле перемещений \bar{v} представляется в виде

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} b_i \bar{\psi}_i. \quad (1.19)$$

Аналогично (1.16) можно записать, что вектор

$$K_{G_1} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} -\frac{b_i}{\lambda_i} K \bar{\psi}_i, \quad (1.20)$$

где

$$b_i = \frac{\bar{\psi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\psi}_i^T K \bar{\psi}_i}. \quad (1.21)$$

Таким образом, задача определения вектора $K_{G_1} \bar{v}$ решена.

Аналогично определяется вектор $K_{G_2} \bar{v}$. Рассматривается задача устойчивости

$$(K + \mu K_{G_2}) \bar{\chi} = 0. \quad (1.22)$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_3}$ – совокупность критических значений задачи (1.22); $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m_3}$ – соответствующие ортогональные в метрике матрицы жесткости K формы потери устойчивости.

Совокупность векторов $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ является базисом в пространстве E_n , которое так удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_j^T K_{G_2} \bar{\chi}_i &= 0 \\ \bar{\chi}_j^T K \bar{\chi}_i &= 0 \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (1.23)$$

С помощью подмножества векторов $\bar{\chi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m_3$) аналогично (1.13) поле перемещений \bar{v} можно приближенно представить в виде

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i \bar{\chi}_i, \quad (1.24)$$

где

$$c_i = \frac{\bar{\chi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\chi}_i^T K \bar{\chi}_i}. \quad (1.25)$$

Аналогично (1.20) вектор $K_{G_2} \bar{v}$ можно приближенно представить в виде

$$K_{G_2} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i K_{G_2} \bar{\chi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_3} -\frac{c_i}{\mu_i} K \bar{\chi}_i. \quad (1.26)$$

Таким образом, для произвольного поля перемещений \bar{v} с помощью процедуры вычисления реакции $K \bar{v}$ и процедуры решения соответствующих обобщенных задач на собственные значения построены алгоритмы аппроксимации векторов $M \bar{v}$, $K_{G_1} \bar{v}$ и $K_{G_2} \bar{v}$.

Для определения вектора $C \bar{v}$ необходимо принять дополнительные предположения о структуре матрицы демпфирования C . Если матрицу демпфирования представить в форме Рэлея

$$C = d_0 M + d_1 K, \quad (1.27)$$

где d_0 и d_1 – произвольные коэффициенты пропорциональности, тогда в силу (1.16)

$$C \bar{v} \cong d_0 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i + d_1 K \bar{v}. \quad (1.28)$$

Теперь можно записать матрицы MV , CV , KV , $K_{G_1} V$, $K_{G_2} V$, входящие в формулы (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) с учетом выражений (1.16), (1.20), (1.26), (1.28) и подсчитать аппроксимации редуцированных матриц масс M^* , демпфирования C^* , жесткости K^* , геометрических жесткостей $K_{G_1}^*$ и $K_{G_2}^*$. Подмножество векторов $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$, $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ и $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ принимается с одинаковой размерностью m ($m_1 = m_2 = m_3 = m$). Используя (1.16), (1.20), (1.26), (1.28) и в силу (1.14), (1.21), (1.25), можно записать

$$MV = K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T KV; \quad (1.29)$$

$$CV = d_0 K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T KV + d_1 KV; \quad (1.30)$$

$$K_{G_1} V = K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T KV; \quad (1.31)$$

$$K_{G_2} V = K X \Theta^{-1} X^T K V. \quad (1.32)$$

Здесь матрицы Φ, Ψ и X размерностью $n \times m$ определяются соотношениями

$$\Phi = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_m); \quad (1.33)$$

$$\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m); \quad (1.34)$$

$$X = (\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_m), \quad (1.35)$$

а диагональные матрицы $\Omega^{-1}, \Lambda^{-1}, \Theta^{-1}$ – соотношениями

$$\Omega^{-1} = \text{diag}(\omega_1^{-2}, \omega_2^{-2}, \dots, \omega_m^{-2}); \quad (1.36)$$

$$\Lambda^{-1} = \text{diag}(-\lambda_1^{-1}, -\lambda_2^{-1}, \dots, -\lambda_m^{-1}); \quad (1.37)$$

$$\Theta^{-1} = \text{diag}(-\mu_1^{-1}, -\mu_2^{-1}, \dots, -\mu_m^{-1}). \quad (1.38)$$

С учетом выполненных процедур редуцированные матрицы масс M^* , демпфирования C^* , жесткости K^* , геометрической жесткости $K_{G_1}^*$ и $K_{G_2}^*$ вычисляются по формулам

$$M^* = V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V; \quad (1.39)$$

$$C V = d_0 V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V + d_1 V^T K V = d_0 M^* + d_1 K^*; \quad (1.40)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K V; \quad (1.41)$$

$$K_{G_2}^* = V^T K X \Theta^{-1} X^T K V. \quad (1.42)$$

Таким образом, соотношения (1.9), (1.39) – (1.42) позволяют определить все коэффициенты редуцированной модели (1.6). Представленная численная методика редуцирования в задачах параметрических колебаний упругих конструкций использована авторами при исследовании динамической устойчивости параметрических колебаний упругих систем, в том числе пологих оболочек положительной гауссовой кривизны [3, 4].

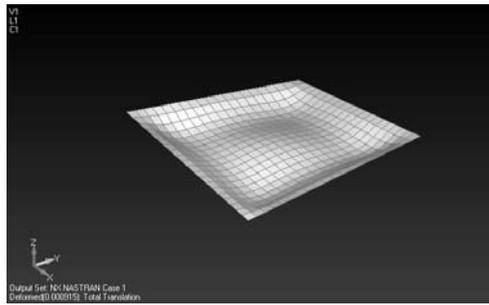
§2. Исследование нелинейного поведения гиперболического параболоида при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки.

Физические и геометрические параметры квадратного жестко закрепленного тонкостенного гиперболического параболоида приняты равными: сторона $a = b = 0,2$ м, толщина $h = 0,5$ мм, модуль упругости $E = 98,1$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$, прогиб $f = 0,06$ м. Поверхность параболоида смоделирована в виде совокупности плоских прямоугольных конечных элементов с шестью степенями свободы в узлах (конечноэлементная модель гиперболического параболоида – см. рис. 1). Вдоль контура ограничены все линейные и угловые перемещения узлов модели оболочки.

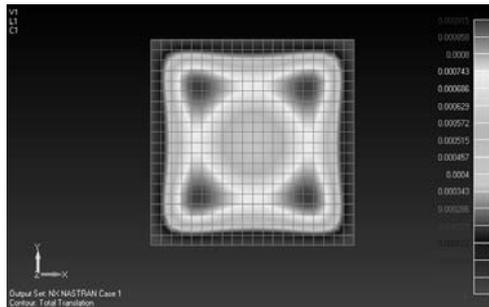


Рис. 1

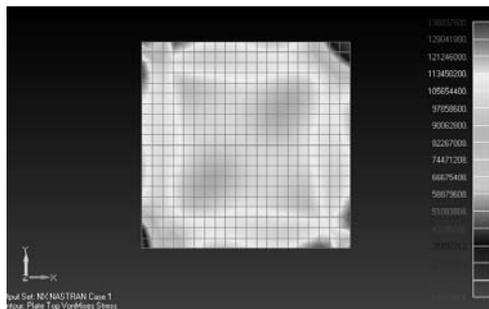
На верхнюю поверхность оболочки приложена распределенная параметрическая нагрузка $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, где $z_0, \tilde{z}(t)$ – постоянная и динамическая составляющие параметрической нагрузки, соответственно.



a



б



в

Рис. 2

Исследовано влияние постоянной составляющей параметрической нагрузки ($z_0 = q_0 = 98100 \text{ Па}$) на напряженно-деформированное состояние оболочки в линейной и нелинейной постановках.

Результаты решения задачи линейной статики (Linear Static) представлены на рис. 2. Напряженно-деформированное состояние оболочки показано при действии поверхностного давления (Linear Static): *a*, *б* – деформации; *в* – эквивалентные напряжения.

Максимальные деформации $0,915 \text{ мм}$ симметрично распределены на выпуклой и вогнутой параболах оболочки (рис. 2, *б*). Максимальные эквивалентные напряжения $136,84 \text{ МПа}$ наблюдаются возле выпуклой параболы на противоположных краях оболочки (рис. 2, *в*). Нелинейное поведение гиперболического параболоида исследовано с помощью модифицированного метода Ньютона – Рафсона. На рис. 3 показаны кривые зависимости максимальных перемещений узлов выпуклой и вогнутой парабол оболочки при действии статической составляющей поверхностной нагрузки $z_0 = q = [0 - 1] q_0$. Поведение выпуклой и вогнутой парабол отличаются при нагрузке $q \geq 0,62 q_0$. Оболочка сжата вдоль выпуклой параболы и растянута вдоль вогнутой параболы. Кривые нагружения гиперболического параболоида (Nonlinear Static): 1 – выпуклая парабола; 2 – вогнутая парабола. Эти результаты совпадают с исследованиями статического поведения гиперболического параболоида [1, 18].

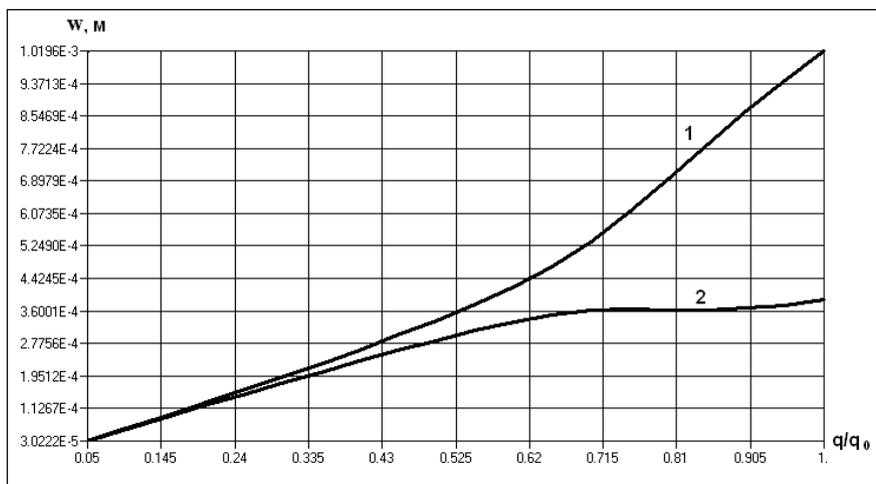


Рис. 3

На рис. 4 представлены изополя перемещений и эквивалентных напряжений в элементах оболочки на разных шагах ее нагружения.

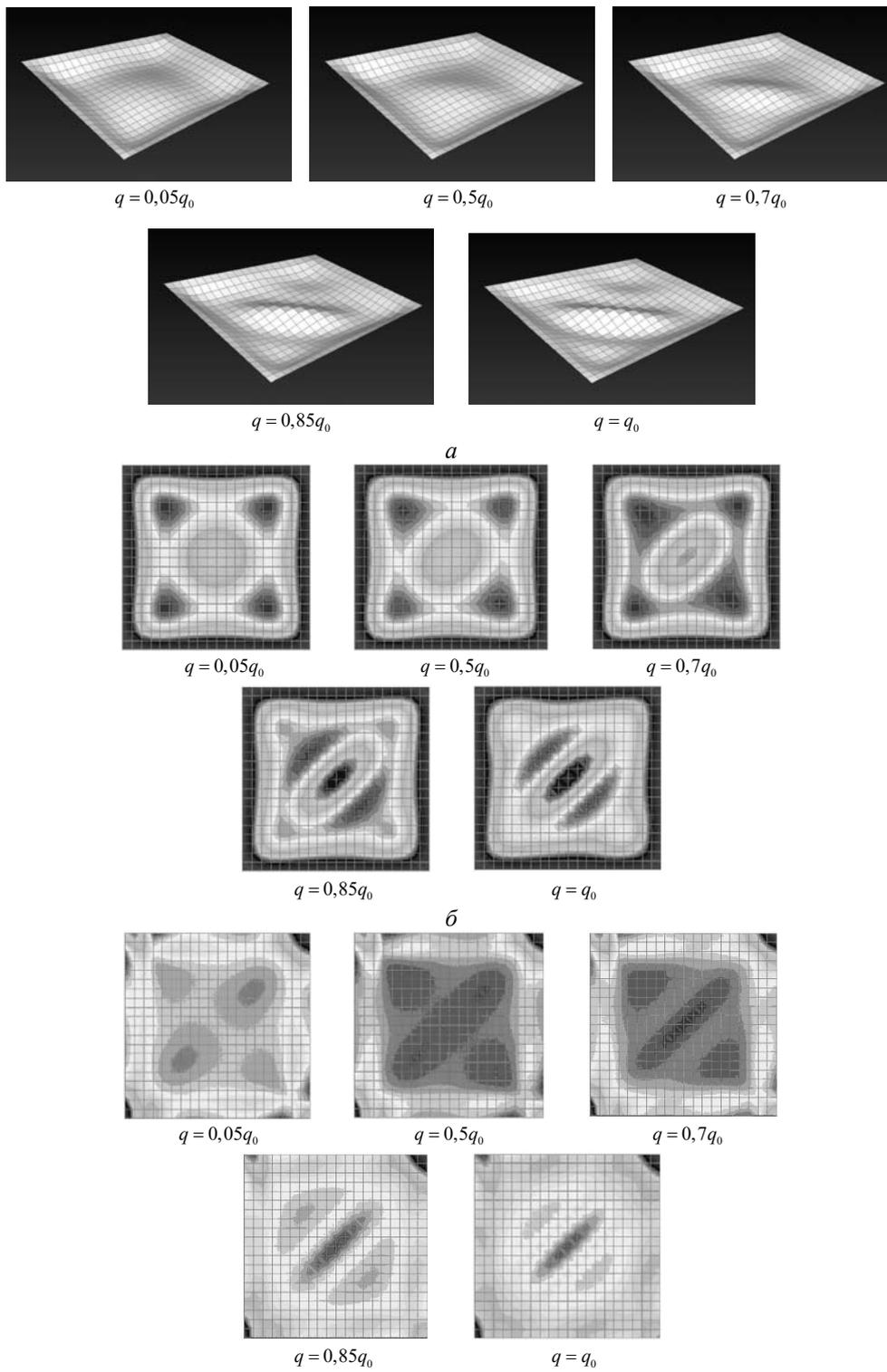


Рис. 4

Поведение гиперболического параболоида на разных шагах статического нагружения (Nonlinear Static) показано на рис. 4: *a*, *b* – деформации; *в* – эквивалентные напряжения.

В работе исследована устойчивость гиперболического параболоида при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки $z_0 = q_0 = 98100$ Па на основе решения задачи на собственные значения (Buckling) методом Ланцоша. На рис. 5 приведены первые десять форм потери устойчивости и соответствующие критические значения нагрузки.

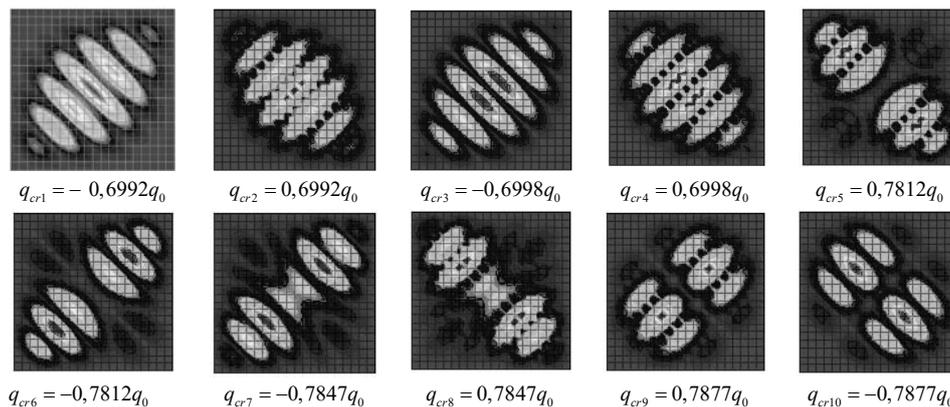


Рис. 5

Потеря устойчивости гиперболического параболоида происходит при $q_{cr1} = 0,6992q_0$. Спектр критических значений статической составляющей параметрической нагрузки $q_{cr} = [-0,6992; 0,6992; -0,6998; 0,6998; 0,7812; -0,7812; -0,7847; 0,7877; -0,7877]q_0$ Па плотный. Видно, что оболочка поочередно растягивается и сжимается вдоль выпуклой и вогнутой парабол. При решении нелинейной задачи статики (рис. 4, *a*) наблюдается только сжатие оболочки вдоль выпуклой параболы и растяжение вдоль вогнутой параболы.

§3. Определение динамических характеристик гиперболического параболоида.

В работе выполнен модальный анализ ненагруженного гиперболического параболоида. Решена задача на собственные значения (Normal Modes) методом Ланцоша. На рис. 6 представлены первые десять форм и частот собственных колебаний оболочки.

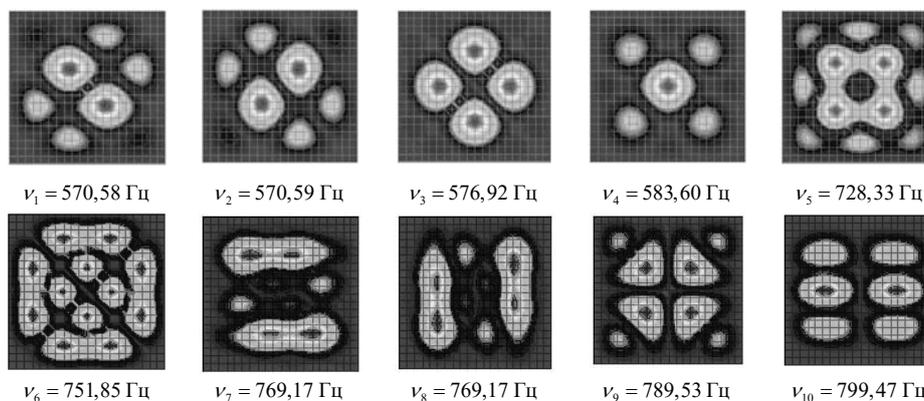


Рис. 6

На рис. 6 наблюдаются симметричные и кососимметричные формы колебаний как относительно парабол, так и осей симметрии. Спектр собственных частот оболочки плотный $\nu_i = [570,58; 570,59; 576,92; 583,60; 728,33; 751,85; 769,17; 769,17; 789,53; 799,47]$ Гц. Формы собственных колебаний гиперболического параболоида отличаются от форм деформаций, полученных при решении нелинейной задачи статики (рис. 4) и от форм потери устойчивости при действии на оболочку постоянной составляющей параметрической нагрузки (рис. 5).

В нелинейной постановке с помощью процедур Nonlinear Static и Modes_Param исследованы частоты и формы собственных колебаний гиперболического параболоида, нагруженного постоянной составляющей параметрической нагрузки $z_0 = [100 - 98100]$ Па = $[0,001 - 1]q_0$. В таблице представлены значения первых пяти собственных частот нагруженной оболочки ($\tilde{\nu}_i$).

z_0 Па ,	Частоты собственных колебаний нагруженной оболочки $\tilde{\nu}_i$, Гц				
	$\tilde{\nu}_1$	$\tilde{\nu}_2$	$\tilde{\nu}_3$	$\tilde{\nu}_4$	$\tilde{\nu}_5$
100	590,258	590,2665	594,195	601,0739	758,565
1000	590,1886	590,2743	594,1646	601,0476	758,5126
10000	586,6749	587,5751	591,0912	598,3885	753,1955
20000	576,3847	578,4214	581,4108	589,8676	736,0726
30000	558,885	561,5569	564,7944	573,6301	701,1866
40000	531,6699	533,7711	538,5317	544,9197	644,3833
50000	484,18	490,18	490,3385	497,4305	554,6142
60000	358,7183	361,4407	424,8568	431,195	450,1801
70000	276,0074	286,2772	316,4006	323,4406	486,5696
72500	195,6378	214,9427	274,3147	281,2457	456,5276
73500	149,7651	175,9225	254,6887	261,6312	443,5983
74000	119,8988	152,0462	244,0816	251,0526	436,8146
74500	78,9782	123,0894	232,8475	239,8691	429,7664
75000	0 (-44,55)	83,9534	220,8593	227,9896	422,4205
80000	0 (-86,41)	0 (-85,95)	331,8887	349,6658	505,2092
85000	195,8188	223,2068	458,4897	461,6251	524,6245
90000	402,9578	408,8756	474,9057	494,5833	517,641
95000	333,8849	342,9061	415,1306	440,275	460,7677
98100	279,4819	290,9796	371,2992	392,6741	425,641

При нагрузке $z_0 \leq 0,2039q_0 \leq 20000$ Па частоты собственных колебаний гиперболического параболоида $\tilde{\nu}_i$ выше собственных частот ненагруженной оболочки ν_i (рис. 6). Это свидетельствует о том, что при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки гиперболический параболоид становится жестче. При последующем увеличении нагрузки собственные частоты колебаний нагруженной оболочки уменьшаются. При действии нагрузки $z_0 = 75000$ Па первая частота собственных колебаний обнуляется, что соответствует потере устойчивости гиперболического параболоида. Когда постоянная составляющая параметрической нагрузки принимает значение $z_0 = 80000$ Па, обнуляются первая и вторая частоты колебаний. Уточненные значения критических нагрузок составляют $q_{cr1} = 0,7645q_0$, $q_{cr2} = 0,8155q_0$. Эти

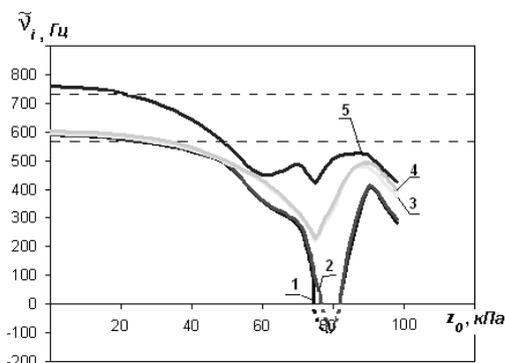


Рис. 7

значения выше критических значений нагрузки при потере устойчивости оболочки, полученных методом Ланцоша в линейной постановке (рис. 5). Важно отметить, что при последующем увеличении нагрузки гиперболический параболоид не теряет устойчивость. На рис. 7 представлена зависимость первых пяти собственных частот колебаний оболочки от значения постоянной составляющей параметрической нагрузки. Там же показано влияние постоянной составляющей параметрической нагрузки на частоту собственных колебаний оболочки: 1 – первую, 2 – вторую, 3 – третью, 4 – четвертую, 5 – пятую.

Видно, что динамическое поведение гиперболического параболоида при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки является нелинейным. Имеет место потеря устойчивости по первой и второй частотам собственных колебаний оболочки в некотором диапазоне значений постоянной составляющей параметрической нагрузки. Такое поведение не наблюдается в исследованных авторами пологих оболочках положительной кривизны [3, 4].

§4. Построение редуцированной модели параметрических колебаний гиперболического параболоида.

Если за базисные векторы принять формы собственных колебаний $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^m$, которые в программе NASTRAN [17] нормированы по матрице масс M , тогда редуцированные матрицы масс M^* , демпфирования C^* и жесткости K^* принимают вид

$$\begin{aligned} M^* &= \Phi^T M \Phi = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1); \\ C^* &= \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\varepsilon_1 \omega_1, 2\varepsilon_2 \omega_2, \dots, 2\varepsilon_i \omega_i, \dots, 2\varepsilon_m \omega_m); \\ K^* &= \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_m^2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\Phi = \{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^m$ – матрица форм собственных колебаний; $\omega_i = 2\pi\nu_i$ – круговая частота собственных колебаний (c^{-1}); ε_i – коэффициент демпфирования оболочки по i -той частоте собственных колебаний; m – число учтенных форм собственных колебаний.

Редуцированная матрица геометрической жесткости K_G^* гиперболического параболоида, согласно представленной в §1 численной методики, принимает вид

$$K_G^* = \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi. \quad (4.2)$$

Здесь $\Lambda = \{\bar{\lambda}_i\}_{i=1}^m = \{q_{cr1}, q_{cr2}, \dots, q_{crm}\}^T$ – матрица критических значений нагрузки (§2); векторы матриц $K\Psi$ и $K\Phi$ вычисляются с помощью процедуры определения реакции системы на заданное поле перемещений в виде векторов форм собственных колебаний $\Phi = \{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^m$ и форм потери устойчивости оболочки $\Psi = \{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^m$ [3].

Редуцированную модель динамической устойчивости параметрических колебаний гиперболического параболоида с учетом формул (1.6), (4.1) и (4.2) представим в виде системы связанных уравнений

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\bar{y}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\bar{y}}(t) + \Phi^T K \Phi \bar{y}(t) + z(t) \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi \bar{y}(t) = 0, \quad (4.3)$$

или

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i^2 \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) + z(t) \sum_{j=1}^m g_{ij} y_j(t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (4.4)$$

где g_{ij} – члены матрицы геометрической жесткости K_G^* .

Особенность поведения гиперболического параболоида, нагруженного поверхностным давлением (таблица и рис. 7), а именно, потеря устойчивости оболочки по первой и второй формам собственных колебаний в диапазоне нагрузки $z_0 = [75000 - 80000]$ Па с

последующим переходом в зону устойчивости, с помощью уравнений (4.4) не будет учтена. Авторами предлагается в первом приближении построить редуцированную матрицу геометрической жесткости гиперболического параболоида для конкретных значений статической составляющей параметрической нагрузки $K_{G(z_0)}^*$, представленных в таблице. Например, если при формировании расчетной редуцированной модели параметрических колебаний гиперболического параболоида учесть первые пять частот собственных колебаний, тогда редуцированная матрица жесткости ненагруженной оболочки примет вид

$$K^* = \text{diag}(12851896, 12852347, 13139091, 13445120, 20940667). \quad (4.5)$$

Редуцированная матрица жесткости нагруженной оболочки $K_{(z_0)}^{**}$, например, при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки $z_0 = 100 \text{ Па}$ и $z_0 = 50000 \text{ Па}$ (таблица) примет вид

$$\begin{aligned} K_{(z_0=100)}^{**} &= \text{diag}(13753647, 13754043, 13937732, 14262310, 22715365); \\ K_{(z_0=50000)}^{**} &= \text{diag}(9254390, 9485174, 9491309, 9767849, 12142723). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Редуцированная матрица жесткости нагруженного гиперболического параболоида, может быть представлена в виде

$$K_{(z_0)}^{**} = K^* - K_{G(z_0)}^*. \quad (4.7)$$

Тогда из выражения (4.7) редуцированная матрица геометрической жесткости

$$K_{G(z_0)}^* = K^* - K_{(z_0)}^{**}. \quad (4.8)$$

Например, для значений постоянной составляющей параметрической нагрузки $z_0 = 100 \text{ Па}$ и $z_0 = 50000 \text{ Па}$ имеем:

$$\begin{aligned} K_{G(z_0=100)}^* &= \text{diag}(-901751, -901696, -798641, -817190, -1774698); \\ K_{G(z_0=50000)}^* &= \text{diag}(3597506, 3367173, 3647782, 3677271, 8797944). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тогда редуцированная модель устойчивости параметрических колебаний гиперболического параболоида примет вид системы несвязанных уравнений вида

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i^2 \dot{y}_i(t) + \tilde{\omega}_{i(z_0)}^2 y_i(t) - \tilde{z}(t) \frac{g_{ii(z_0)}}{z_0} y_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4.10)$$

где $\tilde{\omega}_i = 2\pi\tilde{\nu}_i$ – круговая частота собственных колебаний оболочки, нагруженной постоянной составляющей параметрической нагрузки (c^{-1}); $g_{ii(z_0)}$ – члены редуцированной матрицы геометрической жесткости $K_{G(z_0)}^*$, соответствующие i -той частоте собственных колебаний оболочки и статической составляющей параметрической нагрузки z_0 .

Редуцированные модели (4.4) и (4.10) дадут возможность исследовать устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида во всем диапазоне параметрического нагружения и учесть особенность его динамического поведения, обнаруженного в данной работе.

Заключение.

Представлена численная методика построения редуцированной модели устойчивости параметрических колебаний пологой оболочки отрицательной гауссовой кривизны типа гиперболического параболоида. Формирование редуцированных матриц масс, демпфирования, жесткости и геометрической жесткости выполнено с помощью проце-

дур программного комплекса конечноэлементного анализа. В нелинейной постановке исследовано статическое и динамическое поведение гиперболического параболоида при действии постоянной составляющей параметрической нагрузки. Обнаружено отличие его поведения от поведения пологих оболочек положительной гауссовой кривизны. А именно, в результате анализа влияния постоянной составляющей параметрической нагрузки на собственные частоты колебаний обнаружена потеря устойчивости оболочки в некотором диапазоне нагрузки с последующим выходом в зону устойчивости. Исследование этой особенности авторами предлагается выполнить с помощью дополнительной редуцированной модели, построенной с учетом собственных частот гиперболического параболоида, нагруженного постоянной составляющей параметрической нагрузки.

РЕЗЮМЕ. Представлено чисельну методику побудови редукованої моделі стійкості параметричних коливань пологої оболонки від'ємної гаусової кривини типу гіперболічного параболоїда. Для формування редукованих матриць мас, демпфування, жорсткості та геометричної жорсткості застосовано процедури програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Дослідження статичної і динамічної поведінки гіперболічного параболоїда в нелінійній постановці дозволило виявити відмінність його поведінки від поведінки пологих оболонок позитивної гаусової кривини. А саме, в результаті аналізу впливу постійної складової параметричного навантаження на власні частоти коливань виявлена втрата стійкості оболонки в деякому діапазоні навантаження з подальшим виходом в зону стійкості. Дослідження цієї особливості авторами пропонується виконати за допомогою побудови додаткової редукованої моделі стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда, яку подано в роботі.

1. *Абовский Н.П., Самольянов И. И.* К расчету пологой оболочки типа гиперболического параболоида // *Строит. механика и расчет сооружений.* – 1969, № 6. – С. 7 – 12.
2. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.О.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
3. *Баженов В.А., Дехтярюк С.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 73 – 87.
4. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // *Опір матеріалів і теорія споруд.* К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С. 145 – 185.
5. *Берман Ф.И.* К расчету гиперболической оболочки при действии несимметричной гидростатической нагрузки / Сб. трудов ЦНИИЭПсельстрой, 1973, № 5. – С. 106 – 123.
6. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
7. *Виноградов Г.Г.* Расчет строительных пространственных конструкций. – Л.: Стройиздат, Ленингр. отделение, 1990. – 264 с.
8. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 419 с.
9. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
10. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Физматгиз, 1967. – 784 с.
11. *Гоцуляк Е.О., Дехтярюк С.С., Лук'янченко О.О.* Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині // *Опір матеріалів та теорія споруд.* – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 11 – 19.
12. *Дехтярь А.С., Рассказов А.О.* Экспериментальное исследование несущей способности оболочек типа гиперболического параболоида // *Пространственные конструкции в Красноярском крае,* – Красноярск, 1969. – Вип. IV. – С. 311 – 321.
13. *Журавлев А.А., Ёрж Е.Ю., Журавлев Д.А.* Деревянные конструкции гиперболических оболочек / В сб.: «Легкие строительные конструкции». – Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т, 2000. – С. 4 – 56.
14. *Като В., Нишикура Т.* Покрытие, образуемое сочетанием гиперболических параболоидов // *Большепролетные оболочки.* – М.: Стройиздат, 1969. – С. 167 – 195.
15. *Рассказов А.О.* Расчет оболочек типа гиперболических параболоидов. – К.: КГУ, 1972. – 175 с.
16. *Ржаницын А.Р., Эм В.В.* О расчете упругих тонких оболочек произвольной формы на основе моментной теории оболочек в прямоугольных координатах // *Статика сооружений.* – К., 1978. – С. 88 – 91.
17. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. – М.: ИТ Пресс, 2004. – 552 с.

18. Самольянов И.И. Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. – Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
19. Сунак О.П., Ужегов С.О., Пахолук О.А. До визначення внутрішніх зусиль у пологій оболонці від'ємної гаусової кривини при дії вертикального навантаження // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2012. – Вип. 23. – С. 411 – 16.
20. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1963. – 636 с.
21. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Изд-во «Мир», 1978. – 336 с.
22. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Review of Applications of Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems // Applied Mechanics Review. – 2013. – 65(2). – P. 1 – 20.
23. Beckh M. Hyperbolic Structures: Shukhov's Lattice Towers – Forerunners of Modern Lightweight Construction. – John Wiley & Sons, 2015. – 152 p.
24. Bepalova E.I., Urusova G.P. Dynamic Instability of Shells of Revolution with Alternating Curvature under Periodic Loading // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 5. – P. 521 – 527.
25. Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Melnik V.N., Semenova I.Yu. Problem of the Parametric Oscillations of a Noncylindrical Tank Partially Filled with a Fluid // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 599 – 605.
26. Kurpa L.V., Mazur O.S. Parametric Vibrations of Orthotropic Plates with Complex Shape // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 4. – P. 438 – 449.
27. Labou M. Numerical Schemes for Stability in Probability of Perturbed Dynamical Systems // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 4. – P. 465 – 484.
28. Mars J., Koubaa S., Wali M., Dammak F. Numerical Analysis of Geometrically Non-Linear Behavior of Functionally Graded Shells // Lat. Am. J. Solids Struct. Rio de Janeiro, 14(11), 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253914>.
29. Nayfeh A.H. The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation // J. of Sound and Vibr. – 1983. – 88, N 4. – P. 547 – 557.
30. Panda S.K., Singh B.N. Non-linear free vibration analysis of laminated composite cylindrical / hyperboloid shell panels based on higher-order shear deformation theory using non-linear finite-element method // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: J. of Aerospace Engineering. – 2008. – 222(7). – P. 993 – 1006.
31. «Soviet Applied Mechanics (Contents, 1966 – 1991), International Applied Mechanics (Contents, 1992 – 2005)» – Kyiv: ASK, 2006. – 432 p.
32. Towne B.G. Dynamic Characteristics of a Hyperboloid Shell of Revolution with Application to Flexible Couplings // Thesis. Rochester Institute of Technology. – 2005. – 152 p. <http://scholarworks.rit.edu/theses>.

Поступила 22.10.2017

Утверждена в печать 30.01.2018