

И. В. Янчевский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ

*Киевский национальный технический университет
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua*

Abstract. A problem on the pressure wave propagation in the fluid bounded by two parallel plane boundaries that is generated by the submerged into fluid infinitely long cylindrical electroelastic shell is considered. To describe the shell motion and processes in contacting with its fluid, the equations of the linear theory of shells that are generalized on a case of electromechanics and relations of acoustic mode are used. A technique of solving is based on using the image-source method, a method of separation of variables, and Laplace integral transform on time. By the developed method, this problem is reduced to the infinite system of Volterra integral equations with delay arguments, which is solved numerically using the reduction method and regularizing procedures. The results of calculations of hydrodynamical pressures are presented in the case of applying to the solid shell's electrodes the electric loading of the step-wise form and the case of applying the sine impulse.

Key words: acoustic layer, electroelastic cylindrical shell, Laplace integral transform, method of imaginary sources.

Введение.

Интерес к теоретическим исследованиям в области гидроэлектроупругости определяется широким применением пьезокерамических преобразователей в прикладной гидроакустике. К настоящему времени достаточно детально изучены процессы в системах, содержащих пьезопреобразователи сферической или цилиндрической формы, которые расположены в безграничной акустической среде или вблизи плоской границы. Обширную библиографию, посвященную исследованиям этого направления, можно получить согласно обзорной статье [9] и монографиям [4, 6]. Расширение возможностей пьезопреобразователей за счет их использования в импульсных режимах излучения или приема определяет актуальность исследований, посвященных разработке эффективных методов решения прикладных задач нестационарной гидроэлектроупругости. Задачи данного класса позволяют проследить эволюцию динамического процесса и выявить закономерности поведения пьезопреобразователей при кратковременных электрических или механических воздействиях сложной формы с возможными скачками характеристик на фронтах.

Вопросы излучения и дифракции нестационарных акустических полей, генерируемых электроупругими цилиндрическими / сферическими оболочками в многосвязных областях, с учетом многократного отражения волны от границ области, остаются недостаточно изученными.

Эта тематика активно развивалась в случае точечного источника гармонических акустических волн и за последние годы предложены различные эффективные вычислительные подходы к изучению акустического поля в области сложной геометрии (методы граничных элементов, метод фундаментальных решений, метод конечных разностей). Более подробная информация об этих подходах имеется в монографиях [5, 12] и статьях [11, 13]. Из имеющихся единичных публикаций, посвященным вопросам

излучения и дифракции волн неточечными источниками, отметим [7, 8]. В работе [8], в частности, предложен приближенный алгоритм расчета плоского акустического поля, образованного круговым излучателем первичным полем и дифрагированным от его границы вторичного поля после однократного отражения прямой волны от параллельных границ волновода. Авторами [7] получено аналитическое решение плоской стационарной задачи дифракции акустических волн на упругом цилиндре в плоском волноводе с жесткими границами. В основе предложенных подходов – метод «мнимых источников» (метод изображений) [3, 14], об эффективности которого свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные.

В данной работе на основе интегрального преобразования Лапласа и метода «мнимых источников» предложен численно-аналитический метод решения задачи о нестационарных колебаниях электроупругой оболочки, излучении и дифракции волны давления в акустической области, ограниченной двумя параллельными границами.

1. Постановка задачи.

Исследуем нестационарные процессы в жидкой среде, ограниченной двумя параллельными плоскостями $y = l_1$ и $y = -l_2$ ($l_* > 0$) декартовой системы координат. Среда является идеальной сжимаемой и при моделировании ее движения привлекаются соотношения акустической модели [2]:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_w^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad p = -\rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi. \quad (1)$$

Здесь Φ – потенциал скорости возмущенного движения жидкости; p – гидродинамическое давление; \vec{v} – скорость частиц среды; c_w , ρ_w – скорость распространения звука и плотность среды; t – время; ∇^2 , $\vec{\nabla}$ – операторы Лапласа и Гамильтона.

В предположении, что верхняя граница ($y = l_1$) является свободной поверхностью, а на нижней ($y = -l_2$) среда взаимодействует с жесткой стенкой, граничные условия для потенциальной функции Φ должны обеспечивать равенство нулю давлений на $y = l_1$ и отсутствие нормальных к стенке перемещений на $y = -l_2$:

$$\Phi|_{y=l_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-l_2} = 0, \quad (2)$$

которые дополним условием убывания волны давления на бесконечности –

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (3)$$

В более общем случае на плоских границах можно рассмотреть «импедансные» условия [9]

$$\left(\zeta_{1,j} \Phi + \zeta_{2,j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=(-1)^{j+1} l_{2(1-(j/2))}} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

постоянные $\zeta_{1,j}$ и $\zeta_{2,j}$ которых характеризуют свойства границ слоя. Так, при $\zeta_{1,j} = 0$ следует вариант жесткой стенки, а при $\zeta_{2,j} = 0$ – свободной поверхности. В (4) $\tilde{\epsilon}(x)$ – функция, выделяющая дробную часть числа x .

Источником нестационарных волн в акустической среде является погруженная в нее электроупругая бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, колебания которой обусловлены заданным механическим нагружением $q_0(t)$, равномерно распределенным на внутренней ее поверхности, и/или разностью потенциалов V_0 , подводимого к сплошным токопроводящим ее покрытиям. При этом принято, что оболочка состоит из двух жестко соединенных между собой тонких слоев, внешний слой из кото-

рых имеет постоянную толщину h_m и изготовлен из упругого материала, а внутренний толщиной h_p – из поляризованной по толщине пьезокерамики класса симметрии кристалла 6mm. В предположении, что ось оболочки совпадает с осью аппликата Oz , а картина ее деформирования в нормальных к оси Oz плоскостях одинакова, уравнения движения оболочки в связанных с ней полярной системе координат (r, θ) имеют вид [17]:

$$-\frac{D_N}{R_0^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w \right) + \frac{D_M}{R_0^4} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + q + \frac{e_1}{R_0} V = m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{D_N}{R_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{D_M}{R_0^4} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) = m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Здесь $w(t, \theta)$ – прогиб оболочки; $u_0(t, \theta)$ – перемещения точек поверхности приведения [17] в окружном направлении; $q(t, \theta)$ – нормальная к поверхности приведения нагрузка; $V(t, \theta) = V_0(t)$.

Следует отметить, что система уравнений (5) записана в предположении применимости гипотез Кирхгофа – Лява, обобщенных на случай электромеханики, а используемые в ней обозначения и расчетные выражения для постоянных коэффициентов совпадают с принятыми в работе [17], поэтому в данной работе они не приводятся.

В системе (5) также принято, что внутренний электрод поддерживается на нулевом потенциале, а функция q содержит как известное механическое нагружение оболочки $q_0(t)$, так и неизвестное гидродинамическое нагружение со стороны внешней среды, т.е.

$$q = q_0 - p|_{r=R_0}. \quad (6')$$

На поверхности оболочки ($r = R_0$) также должны быть равны нормальные составляющие скоростей движения частиц среды и оболочки (условие безотрывного контакта) –

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R_0}. \quad (6'')$$

До момента электромеханического возбуждения оболочки ($t = 0$) исследуемая гидроэлектрорупругая система находится в состоянии покоя.

Выполнив обезразмеривание параметров, согласно которому линейные размеры и компоненты вектора перемещений l_* , h_* , R_0 , w и u_0 отнесены к радиусу поверхности приведения оболочки R_0 , а скорость v – к c_w , время t – к R_0/c_w , нагрузки p и q_0 – к $\rho_w c_w^2$, потенциал Φ – к $R_0 c_w$, электрический сигнал V – к $D_N R_0 / e_1$, исходная система уравнений для среды примет вид

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (7)$$

а для оболочки –

$$\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 u_0}{\partial \theta^3} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \beta q + V;$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - (1 + \delta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = 0 \quad (8)$$

(здесь $\alpha^2 = m_h c_w^2 / D_N$; $\beta = \rho_w \alpha^2 / m_h$; $\delta = D_M / D_N$ – постоянные коэффициенты).

Очевидно, что запись граничных условий (2) – (4), (6) останется без изменений.

2. Метод решения.

Задачу решаем с использованием метода «мнимых источников» [3, 14], предполагающего введение в расчетную модель дополнительных источников, которые «формируют» многократно отраженные от граничных поверхностей $y = l_1$ и $y = -l_2$ акустические волны в исследуемом слое. Положение «мнимых источников» выбирается по критерию простоты последующего удовлетворения граничных условий, в частности, на плоских поверхностях $y = l_1$ и $y = -l_2$. В данном конкретном случае принимаем, что первый вспомогательный источник ($j = 1$) расположен симметрично электроупругой оболочке ($j = 0$) относительно плоскости $y = l_1$; источник $j = 2$ – плоскости $y = -l_2$. Последующие «мнимые источники» являются симметричным отражением «мнимых источников» с предшествующими им номерами. Так, источник $j = 3$ предполагается симметричным $j = 2$ относительно $y = l_1$, а $j = 4$ – источнику $j = 1$ относительно $y = -l_2$. Последующая закономерность нумерации осуществляется в соответствии с изложенным выше алгоритмом. Общее количество необходимых «мнимых источников» J определяется временем исследования переходного процесса T и временем прохождения акустической волны от J -го источника до точки исследования ($(r_j - R)/c_w > T$; r_j – расстояние от центра J -го источника до точки исследования). Картину распределения действительного ($j = 0$) и «мнимых» ($j \geq 1$) источников возмущений в среде иллюстрирует рис. 1.

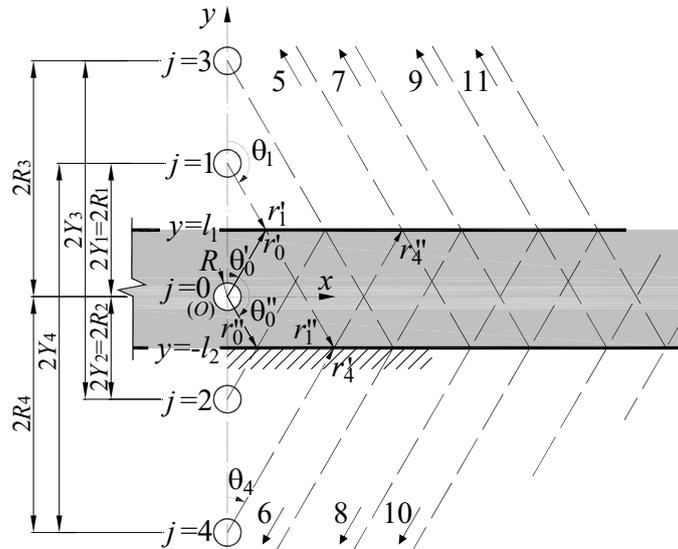


Рис. 1

Акустическое поле в среде, в силу линейности задачи, представим в виде суперпозиции формируемого оболочкой поля и полей от «мнимых источников» –

$$\Phi = \sum_{j=0}^J \varphi_j . \quad (9)$$

Здесь φ_j – потенциалы скоростей прямой волны ($j = 0$) и отраженных ($j \geq 1$).

Как суммарный потенциал скорости Φ , так и каждая из ее составляющих φ_j , должны удовлетворять волновому уравнению (1), общее решение которого в поляр-

ной системе координат выражается через модифицированные функции Бесселя I_n и функции Макдональда K_n . С учетом условия затухания возмущений на бесконечности (3), нулевых начальных условий и симметрии картины акустического поля в среде относительно плоскости $x = 0$ декартовой системы, решения (1) в пространстве изображений по Лапласу [10] представим в виде ряда

$$\varphi_j^L(s, r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,n}^L(s) \frac{1}{s} e^{sR} K_n(sr_j) \cos(n\theta_j). \quad (10)$$

Здесь индексом L обозначены трансформированные по Лапласу функции ($f^L(s, z) = L\{f(t, z)\}$); s – параметр преобразования; $A_{j,n}^L$ – произвольные функции, которые определяются из граничных условий; $R = 1$ – безразмерный радиус оболочки.

В (10) под (r_j, θ_j) подразумеваются полярные координаты системы, центр которой совпадает с центром j -го источника (θ_j – угол между осью y и линией, соединяющей j -ый источник с расчетной точкой). На основании рис. 1 несложно установить соотношения между указанными координатами, некоторые из которых приведены ниже:

$$r'_1 \sin \theta_1 = r'_0 \sin \theta'_0; \quad r'_1 \cos \theta_1 = r'_0 \cos \theta'_0 - 2Y_1; \quad 2Y_1 = 2l_1;$$

$$r'_2 \sin \theta_2 = r''_0 \sin \theta''_0; \quad r'_2 \cos \theta_2 = r''_0 \cos \theta''_0 + 2Y_2; \quad 2Y_2 = 2l_2;$$

$$r'_3 \sin \theta_3 = r''_2 \sin \theta_2; \quad r'_3 \cos \theta_3 = r''_2 \cos \theta_2 - 2Y_3; \quad 2Y_3 = 2Y_1 + 4l_2;$$

$$r'_4 \sin \theta_4 = r''_1 \sin \theta_1; \quad r'_4 \cos \theta_4 = r''_1 \cos \theta_1 + 2Y_4; \quad 2Y_4 = 2Y_2 + 4l_1;$$

$$r''_4 \sin \theta_4 = r'_5 \sin \theta_5; \quad r'_5 \cos \theta_5 = r''_4 \cos \theta_4 - 2Y_5; \quad 2Y_5 = 2Y_3 + 4l_1 \text{ и т.д.}$$

Воспользовавшись равенствами $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\cos \theta_j} \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{1}{r_j \sin \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}$ и соотношениями

$\theta_1 = \pi - \theta'_0$ и $r'_1 = r'_0$; $\theta_2 = \pi - \theta''_0$ и $r'_2 = r''_0$; $\theta_3 = \pi - \theta_2$ и $r'_3 = r''_2$; $\theta_4 = \pi - \theta_1$ и $r'_4 = r''_1$; $\theta_5 = \pi - \theta_4$ и $r'_5 = r''_4$ и т. д., которые справедливы при $y = l_1$ и $y = -l_2$, на основании выражений (9), (10) и (4) получим соотношения между коэффициентами $A_{j,n}^L(s)$ при $j \geq 1$:

$$A_{j,n}^L = (-1)^n \kappa_j A_{\hat{e}[j+4\hat{e}(j/2)-3],n}^L. \quad (11)$$

Здесь $\hat{e}(x) = x \cdot H(x)$; $H(x)$ – единичная функция Хевисайда; $\kappa_j = (\zeta_{2,j} - \zeta_{1,j}) / (\zeta_{2,j} + \zeta_{1,j})$

(в случае классических граничных условий (2) получим $\kappa_j = (-1)^j$).

Для перехода от полярных координат (r_j, θ_j) ($j \geq 1$) к координатам (r_0, θ_0) воспользуемся теоремами сложения цилиндрических функций [3]:

$$K_n(sr_j) e^{in\theta_j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m K_{n-m}(s2R_j) I_m(sr_0) e^{i[(n-m)\Theta_j + m\theta_0]} \text{ при } r_0 < 2R_j;$$

$$K_n(sr_j) e^{in\theta_j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} I_{n-m}(s2R_j) K_m(sr_0) e^{i[(n-m)\Theta_j + m\theta_0]} \text{ при } r_0 > 2R_j,$$

где $(2R_j, \Theta_j)$ – координаты полюса полярной системы (r_0, θ_0) в j -ой системе координат.

В случае, когда $R \leq r_0 < 2R_j$, имеем

$$\begin{aligned} K_n(sr_j) \cos(n\theta_j) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m K_{n-m}(s2R_j) I_m(sr_0) \cos((n-m)\Theta_j) \cos(m\theta_0) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\omega}_m (-1)^{m+(n-m)2\tilde{\epsilon}(j/2)} [K_{n+m}(s2R_j) + K_{n-m}(s2R_j)] I_m(sr_0) \cos(m\theta_0); \end{aligned} \quad (12)$$

$$2R_j = [2l_1 + 2l_2] \cdot \tilde{E}\left(\frac{j-2}{4}\right) + 2l_1 \cdot \delta_{0,\tilde{\epsilon}((j-1)/4)} + 2l_2 \cdot \delta_{0,\tilde{\epsilon}((j-2)/4)}; \quad \Theta_j = \pi \cdot 2\tilde{\epsilon}\left(\frac{j}{2}\right),$$

где $\tilde{E}(x) = x - \tilde{\epsilon}(x)$; $\bar{\omega}_x = 1 - 0,5\delta_{0,x}$; $\delta_{0,x} = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Воспользовавшись выражениями (9), (10) и (12), представим потенциал Φ в координатах (r_0, θ_0) (далее индекс 0 опущен). Эту формулу запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^L &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{0,n}^L(s) \frac{1}{s} e^{sR} K_n(sr) \cos(n\theta) + \\ &+ \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,n}^L(s) \frac{1}{s} e^{sR} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\omega}_m (-1)^{m+(n-m)2\tilde{\epsilon}(j/2)} [K_{n+m}(s2R_j) + K_{n-m}(s2R_j)] I_m(sr) \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

или после изменения порядка суммирования и с использованием обозначений

$$f_{n,m}^L(s, z) = \frac{1}{s^n} e^{-sz} I_m(sz); \quad g_{n,m}^L(s, z) = \frac{1}{s^n} e^{sz} K_m(sz) \quad (14)$$

представим в виде

$$\Phi^L(s, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^L(s, r) \cos(n\theta), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n^L(r, \theta) &= e^{-s(r-R)} A_{0,n}^L(s) g_{1,n}^L(s, r) + \\ &+ \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j-R-r)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\tilde{\epsilon}(j/2)} \times [g_{1,m+n}^L(s, 2R_j) + g_{1,m-n}^L(s, 2R_j)] f_{0,n}^L(s, r) \right\}. \end{aligned}$$

Напомним, что между входящими в эту формулу функциями $A_{j,m}^L(s)$ выполняется рекуррентное соотношение (11).

В результате для возникающего в акустической среде гидродинамического давления p и скорости ее частиц в радиальном направлении v_r с учетом соотношений (7) в пространстве изображений по Лапласу справедливы формулы:

$$p^L(s, r, \theta) = -s \Phi^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^L(s, r) \cos(n\theta); \quad (16)$$

$$v_r^L(s, r, \theta) = \frac{\partial \Phi^L}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^L(s, r) \cos(n\theta). \quad (17)$$

Здесь $p_n^L(s, r) = -e^{-s(r-R)} A_{0,n}^L(s) g_{0,n}^L(s, r) - \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j-R-r)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\tilde{\epsilon}(j/2)} \times [g_{0,m+n}^L(s, 2R_j) + g_{0,m-n}^L(s, 2R_j)] f_{0,n}^L(s, r) \right\}$; $v_n^L(s, r) = e^{-s(r-R)} A_{0,n}^L(s) s G_n^L(s, r) +$

$$+ \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j - R - r)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\tilde{\epsilon}(j/2)} \left[g_{0,m+n}^L(s, 2R_j) + g_{0,m-n}^L(s, 2R_j) \right] s F_n^L(s, r) \right\},$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_0^L(s, z) = -g_{1,1}^L(s, z); \quad G_n^L(s, z) = -g_{1,n-1}^L(s, z) - \frac{n}{z} g_{2,n}^L(s, z) \quad \text{при } n \geq 1;$$

$$F_0^L(s, z) = f_{1,1}^L(s, z); \quad F_n^L(s, z) = f_{1,n-1}^L(s, z) - \frac{n}{z} f_{2,n}^L(s, z) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Общее решение трансформированной по Лапласу системы уравнений (8) ищем в виде ряда по собственным формам колебаний оболочки –

$$w^L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^L(s) \cos(n\theta); \quad u_0^L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^L(s) \sin(n\theta), \quad (18)$$

где $a_n^L(s)$, $b_n^L(s)$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Аналогичное (18) представление имеет место для функций V^L и $q^L = q_0^L - p^L|_{r=R}$, описывающих электрический потенциал на внешнем электроде и механическое нагружение оболочки

$$q^L = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^L(s) - p_n^L|_{r=R}) \cos(n\theta); \quad V^L = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^L(s) \cos(n\theta), \quad (19)$$

коэффициенты которых, исходя из допущений $V(t, \theta) = V_0(t)$ и $q_0(t, \theta) = q_0(t)$, равны

$$c_0^L = q_0^L; \quad d_0^L = V_0^L; \quad c_n^L = d_n^L = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (19'')$$

После подстановки (18) и (19') в трансформированные по Лапласу уравнения (8) получим систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов разложений $a_n^L(s)$ и $b_n^L(s)$

$$a_n^L (\xi_n^{(1)} + \alpha^2 s^2) + b_n^L \xi_n^{(2)} = \beta (c_n^L - p_n^L) + d_n^L; \quad a_n^L \xi_n^{(2)} + b_n^L (\xi_n^{(3)} + \alpha^2 s^2) = 0, \quad (20)$$

где $\xi_n^{(1)} = 1 + \delta n^4$; $\xi_n^{(2)} = n + \delta n^3$; $\xi_n^{(3)} = (1 + \delta) n^2$.

Решение системы (20) с учетом (19'') имеет вид

$$a_0^L = \left(\beta (q_0^L - p_0^L|_{r=R}) + V_0^L \right) \bar{f}^L; \quad a_n^L = -\beta p_n^L \bar{g}^L, \quad b_n^L = \beta \frac{\xi_n^{(2)}}{D_n} p_n^L \quad \text{при } n \geq 1. \quad (21)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{f}^L(s) = (1 + \alpha^2 s^2)^{-1}; \quad \bar{g}^L(s) = (\xi_n^{(3)} + \alpha^2 s^2) / D_n;$$

$$D_n(s) = (\xi_n^{(3)} + \alpha^2 s^2) (\xi_n^{(1)} + \alpha^2 s^2) - \xi_n^{(2)2}.$$

Очевидно, что коэффициенты $a_n^L(s)$ и $b_n^L(s)$ (21) связаны с неизвестными $A_{j,n}^L(s)$ (10) посредством формулы для p_n^L (16). При этом коэффициенты $A_{j,n}^L$ при $j \geq 1$ могут быть выражены через $A_{0,n}^L$ (см. (11)). Для вычисления $A_{0,n}^L$ необходимо подставить полученные результаты в записанное в пространстве изображений по Лапласу условие (6'') –

$$sW^L = v_r \Big|_{r=R}.$$

В результате этой подстановки получим бесконечную систему алгебраических уравнений, связывающую n -ую форму составляющей перемещения $a_n^L(s)$ с формами $A_{0,n}^L(s)$ потенциальной функции Φ^L ($a_n^L = s^{-1} \cdot v_n^L \Big|_{r=R}$):

$$\begin{aligned} & A_{0,0}^L(s) \left[G_0^L(s, R) - \beta g_{0,0}^L(s, R) \bar{f}^L(s) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j - 2R)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) (-1)^{m2\bar{\varepsilon}(\frac{j}{2})} g_{1,m}^L(s, 2R_j) \left[F_0^L(s, R) - \beta f_{0,0}^L(s, R) \bar{f}^L(s) \right] = \\ & = (\beta q_0^L + V_0^L) \bar{f}^L(s); \\ & A_{0,n}^L(s) \left[G_n^L(s, R) - \beta g_{0,n}^L(s, R) \bar{g}^L(s) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j - 2R)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\bar{\varepsilon}(j/2)} \times \right. \\ & \left. \times \left[g_{0,m+n}^L(s, 2R_j) + g_{0,m-n}^L(s, 2R_j) \right] \times \left[F_n^L(s, R) - \beta f_{0,n}^L(s, R) \bar{g}^L(s) \right] \right\} = 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что бесконечная система (22) записана относительно искомым функций $A_{0,n}^L$ параметра преобразования s . Усечение системы и ее решение в явном виде связано с необходимостью раскрытия функциональных определителей, порядок которых соответствует числу удерживаемых собственных форм колебаний. Получаемые в результате такого подхода формулы будут чрезвычайно сложными и громоздкими, что приводит к принципиальным математическим трудностям при переходе в пространство оригиналов. Поэтому согласно предложенному в монографии [2] методу решения нестационарных задач гидроупругости здесь производится непосредственная инверсия системы и граничное условие (6'') удовлетворяется в области оригиналов. Это позволяет свести рассматриваемую задачу нестационарной гидроэлектроупругости к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с запаздывающими аргументами [1, 9], т.е.

$$\begin{aligned} & A_{0,0}(t) \overset{0}{*} \left[G_0(t, R) - \beta g_{0,0}(t, R) \overset{0}{*} \bar{f}(t) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}(t) \overset{2(R_j - R)}{*} \left[(-1)^{m2\bar{\varepsilon}(j/2)} g_{1,m}(t, 2R_j) \overset{0}{*} \left(F_0(t, R) - \beta f_{0,0}(t, R) \overset{0}{*} \bar{f}(t) \right) \right] = \\ & = (\beta q_0 + V_0) \overset{0}{*} \bar{f}(t); \\ & A_{0,n}(t) \overset{0}{*} \left[G_n(t, R) - \beta g_{0,n}(t, R) \overset{0}{*} \bar{g}(t) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}(t) \overset{2(R_j - R)}{*} \left\{ \left(\bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\bar{\varepsilon}(j/2)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[g_{1,m+n}(t, 2R_j) + g_{1,m-n}(t, 2R_j) \right] \right) \overset{0}{*} \left[F_n(t, R) - \beta f_{0,n}(t, R) \overset{0}{*} \bar{g}(t) \right] \right\} = 0 \\ & (n \geq 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь под оператором «*» понимаем свертку оригиналов $(A(t) * B(t) = H(t - t_0) \times \int_0^{t-t_0} A(\tau) B((t-t_0) - \tau) d\tau)$.

Следует отметить, что обращение выполнено аналитически с использованием теорем о свертке оригиналов, запаздывания и подобия [10]. Оригиналы входящих в (23) функций $g_{0,m}(t, z)$, $f_{0,m}(t, z)$ являются табличными [16]:

$$g_{0,m}(t, z) = \frac{\text{ch}(m \cdot \text{arch}(1+t/z))}{z\sqrt{(1+t/z)^2 - 1}}; \quad f_{0,m}(t, z) = H(t)H(t-2z) \frac{\cos(m \cdot \arccos(1-t/z))}{\pi z\sqrt{1-(1-t/z)^2}}.$$

Оригиналы $g_{n,m}(t, z)$ и $f_{n,m}(t, z)$ при $n > 0$ получаем в результате n -кратного интегрирования $g_{0,m}(t, z)$ и $f_{0,m}(t, z)$ (см. [1]). Ядра $G_m(t, z)$ и $F_m(t, z)$ представляют собой линейную комбинацию функций $g_{n,m}(t, z)$ и $f_{n,m}(t, z)$.

Система интегральных уравнений (23) может быть решена численно методом квадратурных формул с применением метода редукции. Порядок ее усечения определяется пробным путем таким образом, чтобы достигнуть достаточную точность удовлетворения граничного условия.

Запаздывающие аргументы у неизвестных позволяют реализовать поэтапное решение системы – на промежутках между выстроенными в порядке возрастания моментах времени $T_j = 2(R_j - R)$ (T_j – время, за которое акустическая волна проходит расстояние от j -го мнимого источника до оболочки, рис. 1). Так, на первом этапе переходного процесса из (23) определяются функции $A_{0,n}(t)$ для $0 < t \leq \min(T_j)$:

$$A_{0,0}(t) * [G_0(t, R) - \beta g_{0,0}(t, R) * \bar{f}(t)] = (\beta q_0 + V_0) * \bar{f}(t); \quad A_{0,n}(t) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Далее полученные значения уже как известные переносятся в правую часть и используются при определении функций $A_{0,n}(t)$ на следующем временном интервале. Входящие в левую часть системы функции $A_{j,n}(t)$ ($j \geq 1$) определяются через $A_{0,n}(t)$ посредством рекуррентных соотношений (11).

Полученные значения $A_{j,n}(t)$ ($j, n \geq 0$) позволяют вычислить гидродинамическое давление p в произвольной точке акустической среды и ее скорость v_r . В частности, определение входящих в ряд Фурье (16) коэффициентов $p_n(t, r) = L^{-1} \{ p_n^L(s, r) \}$ сводится к суммированию следующих интегралов:

$$p_n(t, r) = -A_{0,n}(t) * g_{0,n}(t, r) - \sum_j \bar{p}_{j,n}(t, r),$$

$$\text{где } \bar{p}_{j,n}(t, r) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m} * \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\bar{\varepsilon}(j/2)} [g_{0,m+n}(t, 2R_j) + g_{0,m-n}(t, 2R_j)] * f_{0,n}(t, r) \right\}.$$

Выражение для $\bar{p}_{j,n}(t, r)$ записано при выполнении условия $r > 2R_j - R$. В случае $r > 2R_j + R$ на основании теоремы сложения формула для вычисления $\bar{p}_{j,n}(t, r)$ несколько изменится –

$$\bar{p}_{j,n}(t, r) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m} * \left\{ \bar{\omega}_n (-1)^{(m-n)[1+2\bar{\varepsilon}(j/2)]} [f_{0,m+n}(t, 2R_j) + f_{0,m-n}(t, 2R_j)] * g_{0,n}(t, r) \right\}.$$

Для изучения нестационарных колебаний электроупругой оболочки с учетом взаимодействия с плоскими границами акустического слоя достаточно выполнить инверсию выражения $a_n^L = s^{-1} \cdot v_n^L \Big|_{r=R}$, определяющего коэффициенты $a_n(t)$ радиальных колебаний оболочки $w(t, \theta)$ согласно (18), т.е.

$$a_n(t) = A_{0,n}(t) * G_n(t, R) + \sum_{j=1}^J \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}(t) * \bar{\omega}_n (-1)^{n+(m-n)2\bar{\varepsilon}(j/2)} \left[g_{0,m+n}(t, 2R_j) + g_{0,m-n}(t, 2R_j) \right] * F_n(t, R).$$

Аналогичным образом получим выражения и для других представляющих интерес физических величин.

3. Численные результаты.

При проведении численных экспериментов принято, что акустической средой является вода ($c_w = 1500$ м/с; $\rho_w = 1000$ кг/м³), слой которой имеет безразмерную толщину $l_1 + l_2 = H = 20$. Верхняя граница слоя жидкости – идеально свободная от давления поверхность ($\kappa_j = -1$; $j = 1, 3, 5, \dots$), нижняя граница была отнесена к классу «импедансных» с $\kappa_j = 0,9$ ($j = 2, 4, 6, \dots$). Ось цилиндрической электроупругой оболочки расположена на расстоянии $l_2 = 0,3 H$ от нижней границы. Принято, что оболочка составлена из слоя пьезокерамики марки PZT-5 толщиной $h_p = 0,04$ и слоя титанового сплава ВТ-6 ($h_m = 0,02$), материальные характеристики которых известны [17].

В данном конкретном случае, когда радиус приведения оболочки $R = 1$ значительно меньше расстояния до плоских границ, в первом приближении оболочку можно рассматривать как линейный источник и влиянием отраженных волн на колебания оболочки можно пренебречь. Данное допущение приводит к существенному упрощению расчетной системы уравнений (23), в которой сумму по j следует принять равной 0. При этом получим, что $A_{0,n}(t) = 0$ при $n \geq 1$, а $A_{0,0}(t)$ является решением интегрального уравнения Вольтерры I-го рода, т.е.

$$A_{0,0}(t) * \left[g_{1,1}(t, R) + \beta g_{0,0}(t, R) * \bar{f}(t) \right] = -(\beta q_0(t) + V_0(t)) * \bar{f}(t). \quad (24)$$

О правомерности такого допущения свидетельствуют проведенные автором монографии [1] численные эксперименты, которые показали, что при даже достаточно близком расположении оболочки от плоской границы определенное влияние на ее колебания оказывают волны давления от первого отражения; эффект вторично отраженных волн существенно меньше и с приемлемой точностью расчетов ими можно пренебречь.

Располагая значениями $A_{0,0}(t)$ с использованием соотношений (7), (9) и (10), т.е. без привлечения теоремы сложения, можно вычислить гидродинамическое давление в произвольной точке среды:

$$p^L = -\sum_{j=0}^J A_{j,0}^L(s) e^{-s(r_j-R)} g_{0,0}^L(s, r_j) \Rightarrow p = -\sum_{j=0}^J A_{j,0} * g_{0,0}(t, r_j). \quad (25)$$

Здесь r_j – расстояние до исследуемой точки от полюса j -ой системы координат, связанной с j -ым «мнимым источником».

На рис. 2 представлены вычисленные на основании (25) давления в точках на нижней границе слоя с координатами $(H, -l_2)$ и $(3H, -l_2)$ прямоугольной системы, центр которой совпадает с осью оболочки. На рис. 2 эти результаты обозначены как

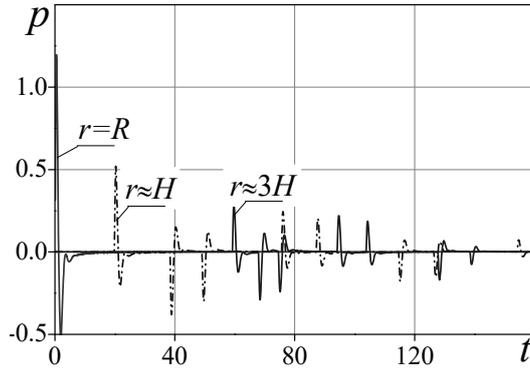


Рис. 2

$r \approx H$ и $r \approx 3H$, соответственно. В полярной системе $(r_0, \theta_0) = (r, \theta)$ координаты указанных точек определяются равенствами $(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi/2) - \arctg(y/x))$. Кривая $r = R$ иллюстрирует профиль давления непосредственно на поверхности излучающей оболочки. При этом принято, что ее колебания обусловлены приложением к электродам ступенчатого электрического сигнала – $V_0(t) = H(t)$, а внутреннее механическое нагружение оболочки отсутствует ($q_0(t) = 0$). Очевидно, что аналогичный результат будет получен при электромеханическом нагружении оболочки, при котором выполняется равенство $\beta q_0(t) + V_0(t) = H(t)$.

Следует отметить, что при решении интегрального уравнения (24) привлекались специальные регуляризирующие алгоритмы. Однако, в данном расчетном примере, когда $\beta q_0(t) + V_0(t) = H(t)$, задачу можно свести к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой применимы традиционные методы. Для этого достаточно воспользоваться равенством $L\{H(t)\} = 1/s$, которое после несложных математических операций приводит к следующему уравнению в пространстве изображений:

$$A_{0,0}^L(s) \left[g_{0,1}^L(s, R) + \frac{\beta}{\alpha} g_{0,0}^L(s, R) \tilde{f}^L(s) \right] = -\bar{f}^L(s).$$

Оригиналы входящих в это уравнение функций $\tilde{f}^L(s) = \alpha s \bar{f}^L(s)$ и $\bar{f}^L(s)$ получаем согласно таблицам операционного исчисления [16]:

$$\bar{f}(t) = L^{-1}\{\bar{f}^L(s)\} = \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{t}{\alpha}\right); \quad \tilde{f}(t) = L^{-1}\{\tilde{f}^L(s)\} = \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Располагая для случая $\beta q_0(t) + V_0(t) = H(t)$ результатами, с помощью интеграла Дюамеля нетрудно определить физические величины для нестационарных нагрузок с произвольным профилем $V_0(t)$ ($q_0(t)$). На рис. 3, в частности, представлены графики давлений в тех же точках слоя при возбуждении оболочки конечным электрическим сигналом с одночастотным заполнением – $V = \sin(\omega t) \cdot H(T_v - t)$ (рис. 3, а). Здесь $T_v = 5.75 \cdot (2\pi/\omega)$ – продолжительность действия сигнала; $\omega = 1/\alpha$ – частота пульсирующих колебаний оболочки в вакууме.

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что при приложении нагрузки ступенчатого профиля давление на поверхности оболочки резко возрастает, однако за всплеском давления следуют осцилляции, имеющие небольшую амплитуду и быстро затухают. Сформировавшийся профиль акустического импульса распространяется в

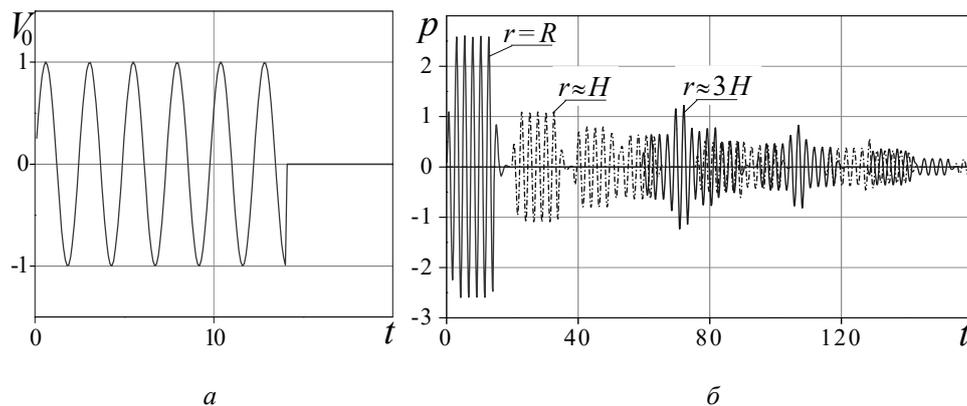


Рис. 3

среде со скоростью c_w , при этом амплитуда волны (в соответствии с общеизвестными законами акустики) снижается пропорционально квадратному корню расстояния ($\sqrt{1/r}$). Наложение акустических импульсов от действительного источника и «мнимых» определяет более сложные характеры изменения профилей давления в исследуемых точках. Некоторые из подобных эффектов показаны в публикациях [1, 15], посвященных вопросам колебаний упругих и электроупругих оболочек в безграничной акустической среде и в акустическом полупространстве. При возбуждении оболочки гармоническим сигналом с резонансной частотой (рис. 3, а) ее колебания достаточно быстро переходят на установившийся режим, при котором амплитуды волн давления, излучаемых во внешнюю среду, остаются неизменными (рис. 3, б). После завершения приложения нагрузки имеют место незначительные колебания оболочки за счет инерциальных ее свойств. И если при достаточно коротком акустическом импульсе максимальные значения давления уменьшаются с удалением точки исследования от источника возмущений, то увеличение продолжительности импульса обуславливает отклонение от данной закономерности (рис. 3, б). Так, в точке $(3H, -l_2)$ наложение прямой и двух отраженных волн ($j = \overline{0,2}$) приводит к тому, что максимальное значение давления приблизительно на 6% больше, чем в точке $(H, -l_2)$, которая примерно в 3 раза ближе к источнику (кривые $r \approx H$ и $r \approx 3H$).

Заключение.

В работе представлен метод численно-аналитического решения задачи о нестационарных колебаниях бесконечно длинной цилиндрической электроупругой оболочки в акустическом слое постоянной толщины. Задача сформулирована в рамках классической теории тонких оболочек, основанных на обобщенных на случай электромеханики гипотезах Кирхгофа – Лява, и акустического приближения. Для плоских поверхностей слоя записаны импедансные граничные условия, позволяющие моделировать различные комбинации свойств этих поверхностей. Разработанным методом задача сведена к поэтапному по известным временным интервалам численному решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра I-го рода.

Численные эксперименты выполнены для случая, когда расстояние от центра оболочки до ближайшей границы акустической среды значительно превышает радиус оболочки. И как отмечается в ряде публикаций, при таком соотношении расстояний влиянием отраженных волн в среде на колебания оболочки можно пренебречь. Расчетная модель при этом существенно упрощается и при построении картины акустического поля можно воспользоваться фундаментальными результатами в области гидроэлектроупругости [1, 2], принципом суперпозиций и методом «мнимых источников» [3]. Показано, что при достаточно продолжительном акустическом сигнале возможны ситуации, когда гидродинамическое давление в отдаленных точках получаем несколько большим, чем в точках, которые ближе расположены к источнику возмущенного движения среды.

Изложенный подход может быть развит на случай непараллельных границ акустического слоя. Результаты также могут быть использованы при решении прикладных задач, относящихся к классу обратных задач гидроэлектроупругости; в частности, задач идентификации положения источника возмущений в слое или конфигурации излучаемого им нестационарного акустического сигнала.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про поширення хвилі тиску в обмеженій двома паралельними плоскими межами рідині, генератором якої є занурена в неї нескінченно довга циліндрична електропружна оболонка. При описанні руху оболонки та процесів у контактуючій з нею рідині використовуються співвідношення лінійної теорії оболонок, узагальнені на випадок електромеханіки, та рівняння акустичної моделі. Методику розв'язання засновано на використанні методу «уявних джерел», методу розділення змінних та інтегрального перетворення Лапласа за часом. Розробленим методом задачу зведено до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерри із запізнюваними аргументами, яка розв'язується чисельно із залученням методу редукції та регуляризованих процедур. Наведено результати розрахунків гідродинамічних тисків у випадку підведення до суцільних електродів оболонки електричного навантаження східчастого профілю і у вигляді синусоїдального імпульсу.

1. *Бабаев А.Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Методы расчета оболочек: [в 5 т.] / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
3. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. *Дереза А.В., Лейко А.Г., Меленко Ю.Я.* Основы военно-технических исследований. Теория и приложения: монография. Т. 8. – К.: Изд. дом Д. Бураго, 2016. – 399 с.
5. *Завадский В.Ю.* Моделирование волновых процессов. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
6. *Савин В.Г., Збруцкий А.В., Морзун И.О.* Нестационарная гидроэлектроупругость сферических пьезоэлектрических преобразователей. – К.: НТУУ «КПИ», 2013. – 241 с.
7. *Толоконников Л.А.* Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки. – 2015. – Вып. 2. – С. 76 – 83.
8. *Шарфарец Б.П.* К вопросу о приближенном методе решения задач множественного рассеяния. Решение на примере идеального волновода // Научное приборостроение. – 2014. – 24, N 3. – С. 80 – 86.
9. *Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E.* Dynamics of Shell Systems Interacting with a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 3. – P. 260 – 301.
10. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Operational calculus in two variables and its applications. – N.-Y.: Dover Publ., Inc, 2017. – 176 p.
11. *Etter P.C.* Advanced applications for underwater acoustic modeling // Advances in Acoustics and Vibration. – 2012. – ID 214839. – 28 p.
12. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* Computational ocean acoustics. – N.-Y.: Springer, 2011. – 794 p.
13. *Loer K., Meles G.A., Curtis A.* Automatic identification of multiply diffracted waves and their ordered scattering paths // J. Acoust. Soc. Am. – 2015. – 137, N 4. – P. 1834 – 1845.
14. *Lurton X.* An introduction to underwater acoustics: Principles and Applications. – London: Springer, 2002 – 347 p.
15. *Matsenko G.L.* Transient Oscillations of a Multimode Cylindrical Piezoelectric Transducer with a Disconnected Electrode Section // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, N 4. – P. 391 – 397.
16. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and series [in 5 v.]. Vol. 5: Inverse Laplace Transforms. – New York: Gordon and Breach, 1992. – 595 p.
17. *Yanchevskii I.V.* Nonstationary Deformation of an Electroelastic Nonclosed Cylindrical Shell under Mechanical and Electric Loading // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 4. – P. 475 – 481.

Поступила 12.07.2017

Утверждена в печать 30.01.2018