

А. С. Хорошун

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВРАЩЕНИЕМ ЭКСЦЕНТРИКОВОГО МАХОВИКА¹

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. A control by eccentric balance wheel rotation is built which provides the globally asymptotically stability of equilibrium of the translational oscillator with rotating actuator. It is shown that such control is robust. A way of estimating the region of robustness in the space of the system parameters of mechanical system is suggested. The obtained results are illustrated on an example of the concrete model.

Key words: translational oscillator with rotating actuator, underactuated mechanical system, dynamic surface control, sliding surface, low-pass filter, slow-fast system.

Введение.

Спутники с двойным вращением являются одним из основных типов беспилотных космических аппаратов. Приближенно такой спутник можно представить в виде двух твердых тел, платформы и ротора, соединенных жестким валом. После доставки на орбиту, спутник движется без взаимного вращения его частей друг относительно друга, как одно твердое тело. Задача состоит в том, чтобы обеспечить невращение платформы, например, для проведения исследований или фотосъемки в заданном направлении. Для этого электродвигатель, расположенный на платформе, вращает посредством вала ротор в направлении, совпадающем с направлением начального вращения. Таким образом, угловая скорость платформы стремится к нулю, а момент импульса ротора становится равным начальному моменту системы. Известно, однако, см. [3], что в ходе такого маневра спутник может «прокинуться» из-за увеличения угла нути или скорость вращения ротора начнет неограниченно возрастать, что приведет к значительному отклонению движения космического аппарата от желаемого. В работе [15] для исследования этих негативных режимов было предложено использовать механическую модель, которая получила название TORA (Translational Oscillator with Rotating Actuator), имеющую сходную математическую природу с моделью спутника с двойным вращением. Отметим, что кроме приложения к космическим аппаратам, TORA представляет и самостоятельный интерес. В частности, в работе [2] предложено использовать TORA в виде модели активного гашения вибраций вращением эксцентрикового маховика (см. также [16] и библиографию там).

TORA может быть отнесен к классу т.н. малоприводных механических систем (англ. underactuated mechanical system), которые характеризуются тем, что количество входов управления в них меньше, чем количество переменных, описывающих поведение системы. Системы такого класса широко используются при конструировании различных роботов, аэрокосмических и морских аппаратов, см. [8, 9], поскольку имеют преимущество в меньшем потреблении энергии и меньшей стоимости по сравнению с механическими системами с большим количеством входов управления. В работе [9] также можно найти список работ, посвященных основным подходам к построению

¹ Публикация содержит результаты исследований, проведенных согласно гранта Президента Украины по конкурсному проекту Ф70/141-2017 Государственного фонда фундаментальных исследований.

нию управления TORA. Упомянем работы [10], [14], где с помощью преобразования переменных исходная система дифференциальных уравнений, которая описывает поведение TORA, сводится к т.н. «каскадному виду». Из условия глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия этой системы получен закон управления, обеспечивающий такой же тип устойчивости TORA. Отметим чрезвычайно громоздкий вид полученного закона управления, что делает его применение на практике затруднительным.

Эффективным методом построения закона управления для нелинейных систем является т.н. Dynamic Surface Control (DSC), см. [12, 13]. Одной из его особенностей является то, что управление, построенное с его помощью, обеспечивает стремление траекторий исследуемой системы дифференциальных уравнений не к равновесным значениям переменных, а к некоторым наперед заданным траекториям, стремление которых к равновесным значениям переменных постулируется. Также особенностью данного метода является применение фильтров, которые позволяют избежать нарастания сложности элементов системы дифференциальных уравнений, в том числе и закона управления, хотя и увеличивают ее размерность. Кроме того, поскольку временные константы фильтров могут быть выбраны фиксированными, но как угодно малыми положительными числами, то исходная система дифференциальных уравнений естественным образом может быть представлена в виде быстро-медленной. Подобный подход к построению управления TORA частично реализован в работе [11]. Следует отметить, что полностью решить вопрос с громоздкостью управления не удалось. Также выбор параметров управления и временных констант фильтров производится лишь исходя из общих рекомендаций, на интуитивном уровне.

В данной работе развивается применение техники DSC к построению управления TORA. Предлагаемый закон управления обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость соответствующих состояний равновесия как колебаний платформы, так и вращения эксцентрикового маховика. Также устанавливается робастность построенного управления и определяется область такой робастности в пространстве параметров модели.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим конструкцию TORA. Основой его является прикрепленная к стене посредством пружины тележка, центр масс которой может двигаться в вертикальной плоскости XOY вдоль горизонтальной оси OX. На тележке расположен несущий точечную массу симметричный относительно центра маховик, с осью вращения перпендикулярной плоскости движения тележки, вокруг которой он может поворачиваться в ту или иную сторону. Маховик приводится в движение электродвигателем, статор которого жестко скреплен с тележкой, а ось ротора жестко соединена с осью маховика. На рис. 1 изображена схема TORA, где q_1 – горизонтальное смещение центра маховика C от его положения равновесия O , q_2 – угол отклонения точечной массы от вертикали.

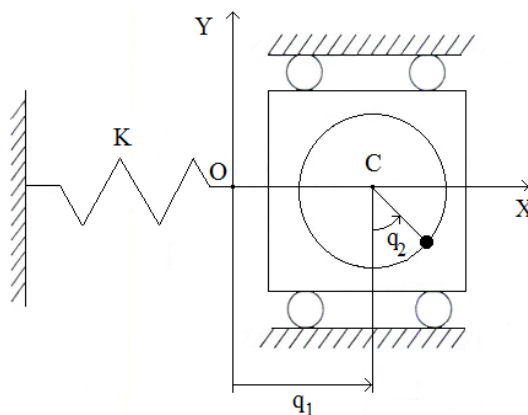


Рис. 1

Управление TORA происходит с помощью вращения эксцентрикового маховика, которое задается электродвигателем, поэтому управляющим параметром в системе принимаем момент электромагнитных сил, приложенных к ротору со стороны статора. Задача управления состоит в стабилизации TORA в его положении равновесия $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. В работе будет предложено управление, которое реализует поставленную задачу вне зависимости от начальных отклонений модели от ее равновесного положения и при наличии неточности в параметрах модели. Область такой стабилизации в пространстве параметров модели также будет определена.

2. Вывод уравнений движения.

Введем обозначения: m – точечная масса, M – масса тележки, мотора и маховика, r – расстояние между центром маховика и точечной массой, I – момент инерции маховика, K – жесткость пружины, Δ – момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя со стороны статора.

Используя метод Лагранжа, уравнения движения TORA получим в виде (см. [10])

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{q}_1 + mr(\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) + Kq_1 &= 0; \\ (I + mr^2)\ddot{q}_2 + mr \cos(q_2)\ddot{q}_1 + mgr \sin(q_2) &= \Delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения. Отметим, что в ряде работ, см. например [14], уравнения движения TORA рассматривались без слагаемого $mgr \sin(q_2)$, что соответствует нахождению спутника на орбите. Однако, в данной работе уравнения движения используются в отсутствие этого предположения, что позволит применить полученные результаты как для спутника, так и для модели активного гашения вибраций, на чем был сделан акцент во введении.

Принимаем, что некоторые или, возможно, все параметры модели заданы неточно, т.е. они непрерывно зависят от векторного параметра, принадлежащего замкнутому множеству. Под «параметрами модели» понимаются числовые величины, от которых зависят коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1). В таком случае, систему дифференциальных уравнений (1) будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} (M(p) + m(p))\ddot{q}_1 + m(p)r(p)(\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) + K(p)q_1 &= 0; \\ (I(p) + m(p)r^2(p))\ddot{q}_2 + m(p)r(p) \cos(q_2)\ddot{q}_1 + m(p)gr(p) \sin(q_2) &= \Delta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p \in P \subset R^n$, $n \in N$.

Замечание 1. Предполагаем, что область P содержит только допустимые значения параметров. Допустимыми считаем те значения параметров, при которых не возникает противоречия с физической природой входящих в состав модели величин, т.е. с положительностью жесткости пружины, массы, длины, осевого момента инерции.

Введя безразмерные переменные, см. [7],

$$\tilde{q}_1 = q_1 \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}}, \quad v = \frac{M(p) + m(p)}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \Delta, \quad \tau = t \sqrt{\frac{K(p)}{M(p) + m(p)}}$$

и обозначив $\varepsilon(p) = \frac{m(p)r(p)}{\sqrt{(I(p) + m(p)r^2(p))(M(p) + m(p))}}$, получим безразмерную систему дифференциальных уравнений, эквивалентную системе дифференциальных уравнений (2):

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_1 + \tilde{q}_1 - \varepsilon(p)(\dot{q}_2^2 \sin(q_2) - \ddot{q}_2 \cos(q_2)) &= 0; \\ \ddot{q}_2 + \varepsilon(p) \cos(q_2)\ddot{\tilde{q}}_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p))}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \sin(q_2) &= v, \end{aligned} \quad (3)$$

где дифференцирование ведется по обобщенному времени τ .

Следуя [10] воспользуемся преобразованием управления и координат по таким правилам:

$$\begin{aligned} v &= \alpha(p, q_2)u + \beta(p, \tilde{q}_1, q_2, \dot{q}_2); \quad \eta_1 = \tilde{q}_1 + \varepsilon(p) \sin(q_2); \\ \eta_2 &= \dot{\tilde{q}}_1 + \varepsilon(p) \dot{q}_2 \cos(q_2); \quad \eta_3 = q_2; \quad \eta_4 = \dot{q}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(p, q_2) &= 1 - \varepsilon^2(p) \cos^2(q_2); \quad \beta(p, \tilde{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \\ &= \varepsilon^2(p) \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \varepsilon(p) \cos(q_2) \tilde{q}_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p))}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \sin(q_2). \end{aligned}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p) \sin(\eta_3); \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4; \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \quad (5)$$

Так как в положении равновесия TORA $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ и скорости \dot{q}_1 , \dot{q}_2 также равны 0, то задача стабилизации этого положения равновесия управлением Δ вне зависимости от величины начальных отклонений переменных от их равновесных значений эквивалентна задаче построения управления u , которое обеспечит глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$, $\eta_4 = 0$ системы дифференциальных уравнений (5).

Замечание 2. С учетом Замечания 1, очевидно, что $0 < \varepsilon(p) < 1$ и, поэтому, $\alpha(p, q_2) > 0$ для всех p из P и q_2 из R . Поэтому преобразование (4) невырождено.

3. Построение управления.

Для построения управления, которое обеспечит глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (5), используем технику, предложенную в [13], т.н. Dynamic Surface Control. Рассмотрим подсистему

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p) \sin(\eta_3) \end{cases} \quad (6)$$

системы дифференциальных уравнений (5). Пусть переменная η_3 изменяется по закону $\tilde{\eta}_3 = -\arctan\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{1 + \eta_1^2 + \eta_2^2}}\right)$. Тогда нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p) \sin(\tilde{\eta}_3), \end{cases} \quad (7)$$

глобально асимптотически устойчиво. Этот факт легко установить, рассмотрев вспомогательную функцию $V(\eta_1, \eta_2) = (\eta_1^2 + \eta_2^2) / 2$ и ее производную по времени в силу (7) $\dot{V}(\eta_1, \eta_2)|_{(7)} = \varepsilon(p) \eta_2 \sin(\tilde{\eta}_3)$, которые удовлетворяют всем условиям теоремы Барбашина – Красовского, см. [1], о глобальной асимптотической устойчивости. Учтено, что $\varepsilon(p) > 0$ для всех $p \in P$. Очевидно, что если переменная η_3 асимптотически стремится к $\tilde{\eta}_3$, то переменные η_1 и η_2 , которые задаются (6), асимптотически стремятся к нулю вне зависимости от своих начальных значений.

Обозначим величину S_1 следующим образом:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \quad (8)$$

где $\bar{\eta}_3$ – результат применения фильтра к $\tilde{\eta}_3$, т.е.

$$\tau_1 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3; \quad \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \quad (9)$$

где τ_1 – произвольная как угодно малая положительная константа. Дифференцируя (8) по времени, получим, учитывая (5), что $\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3$, откуда следует, что если переменная η_4 асимптотически стремится к $\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3$, где $c_1 > 0$ некоторая константа, то величина S_1 асимптотически стремится к нулю вне зависимости от своего начального значения.

Поступая аналогично, обозначим величину S_2 следующим образом:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \quad (10)$$

где $\bar{\eta}_4$ – результат применения фильтра к $\tilde{\eta}_4$, т.е.

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4; \quad \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \quad (11)$$

где τ_2 – произвольная, как угодно малая положительная константа. Дифференцируя (10) по времени, получим, учитывая (5), что

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4.$$

Выбрав управление

$$u = \dot{\bar{\eta}}_4 - c_2 S_2, \quad (12)$$

где $c_2 > 0$ – некоторая константа, обеспечим асимптотическое стремление к нулю величины S_2 при любом ее начальном значении.

Пусть

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \quad (13)$$

и

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \quad (14)$$

– погрешности фильтров. Тогда из (8) с учетом (13) следует, что

$$\eta_3 = S_1 + \bar{\eta}_3 = S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_3. \quad (15)$$

Продолжим преобразование \dot{S}_1 и \dot{S}_2 . Для производной S_1 по времени, с учетом значения $\tilde{\eta}_4$ и соотношения (14), получим:

$$\dot{S}_1 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3 = (\eta_4 - \bar{\eta}_4) + (\bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4) + \tilde{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_3 = -c_1 S_1 + S_2 + z_2, \quad (16)$$

а для производной S_2 по времени, с учетом выбранного управления в виде (12), справедливо:

$$\dot{S}_2 = -c_2 S_2. \quad (17)$$

Само же управление, с учетом (11) и (14), представим в следующем виде:

$$u = \dot{\bar{\eta}}_4 - c_2 S_2 = \frac{\tilde{\eta}_4 - \bar{\eta}_4}{\tau_2} - c_2 S_2 = -\frac{z_2}{\tau_2} - c_2 S_2. \quad (18)$$

Определим производные по времени погрешностей фильтров. Принимая во внимание (9), дифференцирование (13) по времени дает следующее значение для \dot{z}_1 :

$$\dot{z}_1 = \dot{\bar{\eta}}_3 - \dot{\tilde{\eta}}_3 = -\frac{z_1}{\tau_1} - \dot{\tilde{\eta}}_3. \quad (19)$$

Учитывая значение $\tilde{\eta}_4$ и используя соотношения (9), (11), (14), (16), (19) уравнение, определяющее поведение \dot{z}_2 , получим дифференцируя равенство (14) по времени:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 = \dot{\tilde{\eta}}_4 - \dot{\tilde{\eta}}_4 &= -\frac{z_2}{\tau_2} + c_1 \dot{S}_1 - \ddot{\tilde{\eta}}_3 = -\frac{z_2}{\tau_2} + c_1(-c_1 S_1 + S_2 + z_2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{z_1}{\tau_1} \right) = \\ &= -\frac{z_2}{\tau_2} - c_1^2 S_1 + c_1 S_2 + c_1 z_2 - \frac{z_1}{\tau_1^2} - \frac{\dot{\tilde{\eta}}_3}{\tau_1}.\end{aligned}\quad (20)$$

Таким образом, динамика отклонения траекторий системы дифференциальных уравнений (5) при управлении (12) от траекторий этой системы, которые асимптотически стремятся к нулевому состоянию равновесия, описывается дифференциальными уравнениями (6), (15) – (17), (19), (20), образующими систему:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p) \sin(S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_3); \\ \dot{S}_1 = -c_1 S_1 + S_2 + z_2; \\ \dot{S}_2 = -c_2 S_2; \\ \dot{z}_1 = -\frac{z_1}{\tau_1} - \dot{\tilde{\eta}}_3; \\ \dot{z}_2 = -\frac{z_2}{\tau_2} + c_1 S_2 + c_1 z_2 - c_1^2 S_1 - \frac{z_1}{\tau_1^2} - \frac{\dot{\tilde{\eta}}_3}{\tau_1}.\end{cases}\quad (21)$$

Очевидно, что глобальная асимптотическая устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (5) при управлении (12) следует из такого же типа устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (21).

Поскольку τ_1 и τ_2 могут быть произвольными положительными как угодно малыми величинами, то заменой переменных $(\eta_1, \eta_2, S_1, S_2, z_1, z_2)^T \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2)^T = (x, y)^T$ система дифференциальных уравнений (21) может быть сведена к быстро-медленному виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(p) \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right); \\ \dot{x}_3 = -c_1 x_3 + x_4 + y_2; \\ \dot{x}_4 = -c_2 x_4; \\ \tau_1 \dot{y}_1 = -y_1 + \tau_1 F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p); \\ \tau_2 \dot{y}_2 = -y_2 + \tau_2 F_2(x, y, p),\end{cases}\quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}G(x_1, x_2, p) &= 1 + x_1^2 + x_2^2; \quad F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p) = \frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p) + x_2^2} \times \\ &\times \left[\frac{-x_1 + \varepsilon(p) \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right)}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right]\end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\varepsilon(p)x_2^2 \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right)}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p)} \right)^3} \right];$$

$$F_2(x, y, p) = c_1 x_4 + c_1 y_2 - c_1^2 x_3 - \frac{y_1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p).$$

Исследованию свойств устойчивости нулевого состояния равновесия этой системы дифференциальных уравнений и будет посвящен следующий раздел.

4. Исследование устойчивости.

Рассмотрим скалярную функцию $V(x, y, p): R^4 \times R^2 \times R^n \rightarrow R$, $V(0, 0, p) = 0$, вида

$$V(x, y, p) = 2\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)} - 2 + \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2), \quad (23)$$

$$\text{где } V_1(x_1, x_2, p) = \frac{\Psi(p)}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}; \quad \Psi(p) = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon(p)} + \frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}}.$$

Так как

$$\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon(p)} + \frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon(p)} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon(p)} + \frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}} \right) > 3,$$

то

$$V_1(x_1, x_2, p) \geq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}} \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}},$$

причем равенство достигается только при $x_1 = x_2 = 0$. Следовательно, функция $V_1(x_1, x_2, p)$ принимает неотрицательные значения во всех точках пространства $R^4 \times R^2 \times R^n$, причем равенство нулю достигается только при $x_1 = x_2 = 0$, т.е. функция (23) положительно определена.

Определим производную функции $V(x, y, p)$ по времени в силу системы дифференциальных уравнений (22):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x, y, p)}{dt} \right|_{(22)} &= \left[\Psi(p)(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) + \frac{\dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} - \frac{x_1 x_2 (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2)}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p)} \right)^3} \right] \frac{1}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}} + \\ &\quad + x_3 \dot{x}_3 + x_4 \dot{x}_4 + y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2 = \\ &= \frac{x_2^2}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)} \sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \left[1 - \psi(p) \varepsilon(p) \sqrt{\frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p) + x_2^2}} \right] + \\ &\quad + \psi(p) \varepsilon(p) \frac{\cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right)}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}} (x_2 x_3 + x_2 y_1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x_1^2}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} + \frac{1-\frac{x_2^2}{G(x_1, x_2, p)}}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \times \\
& \times \left[\frac{-\varepsilon(p)x_1x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)+x_2^2}} + \varepsilon(p) \cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) \right] (x_1x_3 + x_1y_1) \Big] - \\
& -c_1x_3^2 + x_3x_4 + x_3y_2 - c_2x_4^2 - \frac{y_1^2}{\tau_1} + \frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p)+x_2^2} \left[\frac{-x_1y_1}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} + \frac{1-\frac{x_2^2}{G(x_1, x_2, p)}}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{-\varepsilon(p)x_2y_1}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)+x_2^2}} + \varepsilon(p) \cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) \right) (x_3y_1 + y_1^2) \right] \Big] - \quad (24) \\
& -\frac{y_2^2}{\tau_2} + c_1x_4y_2 + c_1y_2^2 - c_1^2x_3y_2 - \frac{y_1y_2}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1} \frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p)+x_2^2} \left[\frac{-x_1y_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} + \frac{1-\frac{x_2^2}{G(x_1, x_2, p)}}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{-\varepsilon(p)x_2y_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)+x_2^2}} + \varepsilon(p) \cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) \right) (x_3y_2 + y_1y_2) \right] \Big].
\end{aligned}$$

Здесь использована формула конечных приращений Лагранжа

$$\begin{aligned}
& \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) = \\
& = \sin \left(-\arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) + \cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) (x_3 + y_1);
\end{aligned}$$

где \hat{x}_3 и \hat{y}_1 – некоторые точки из R . Также учтено, что

$$\sin \left(-\arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) = -\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)+x_2^2}}.$$

Воспользовавшись неравенством $-az^2 + bz \leq -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}$, которое верно для всех $a, b, z \in R$, $a > 0$, из соотношения (24) получим оценку для производной функции (23) по времени в силу системы (22):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dV(x, y, p)}{dt} \right|_{(22)} & \leq \frac{-x_1^2}{32\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} - \frac{A(p)}{16} \frac{x_2^2}{\sqrt{1+V_1(x_1, x_2, p)}\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} - \\
& - \frac{c_1 - B(p)}{8} x_3^2 - \frac{c_2 - \frac{1}{2(c_1 - B(p))}}{2} x_4^2 - \frac{\frac{1}{\tau_1} - D(p, c_1)}{2} y_1^2 - \left(\frac{1}{\tau_2} - E(p, c_1, \tau_1, \tau_2) \right) y_2^2, \quad (25)
\end{aligned}$$

где

$$A(p) = -1 + \frac{\varepsilon(p)\Psi(p)}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon^2(p)}{2}; \quad B(p) = \frac{\varepsilon^2(p)\Psi^2(p)}{2A(p)} + \varepsilon^2(p);$$

$$D(p, c_1) = \varepsilon(p) + 2\varepsilon^2(p) + 4\sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} + \frac{\varepsilon^2(p)\Psi^2(p)}{A(p)} + \frac{\varepsilon^2(p)}{A(p)}(1 + \Psi(p)) + \frac{2\varepsilon^2(p)}{c_1 - B(p)};$$

$$E(p, c_1, \tau_1) = c_1 + \frac{8}{\tau_1^2} \sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} + \frac{2\varepsilon^2(p)}{A(p)\tau_1^2}(1 + \Psi(p)) +$$

$$+ \frac{\left(1 + c_1^2 + \frac{\varepsilon(p)}{\tau_1}\right)^2}{c_1 - B(p)} + \frac{c_1^2}{2\left(c_2 - \frac{1}{2(c_1 - B(p))}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{\varepsilon(p)}{\tau_1}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\tau_1} - D(p, c_1)\right)},$$

если $c_1 > B(p)$, $c_2 > \frac{1}{2(c_1 - B(p))}$, $\tau_1 < \frac{1}{D(p, c_1)}$.

Тут учтено, что

$$\left| \cos \left(\hat{x}_3 + \hat{y}_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right) \right| \leq 1, \text{ для всех } \hat{x}_3, \hat{y}_1, x_1, x_2 \text{ из } R, p \text{ из } R^n;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p)}\right)^n} \leq 1, \quad \frac{1}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p)} + x_2^2\right)^n} \leq 1, \quad \left| 1 - \frac{x_2^2}{G(x_1, x_2, p)} \right|^n \leq 1 \text{ для всех } x_1, x_2$$

из R , p из R^n , n из N ;

$$-\sqrt{\frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p) + x_2^2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p)}}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \leq \frac{\Psi(p)+1}{2}, \quad \frac{1}{\left(\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p)}\right)^n} \leq 1,$$

$$\frac{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}}{\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p)}} \leq 1 \text{ для всех } x \text{ из } R^4, y \text{ из } R^2, p \text{ из } R^n \text{ и } n \text{ из } N.$$

Сформулируем и докажем теорему, которая содержит основной результат данной работы.

Теорема. Для всех значений параметра p из области P , которая выбрана согласно Замечанию 1, существуют такие константы управления $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и такие константы фильтров $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, что управление вида (12) глобально асимптотически стабилизирует положение равновесия системы дифференциальных уравнений (5).

Доказательство. Так как из глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (22) следует аналогичный тип устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (5) при управлении (12), что было показано выше, то для доказательства утверждения теоремы достаточно показать существование для всех значений p из области P таких величин $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, при которых нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (22) глобально асимптотически устойчиво.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (22) при произвольном значении параметра p из области P . Как было показано выше, функция (23) является положительно определенной. Кроме того, она, очевидно, бесконечно большая и спадающая в целом. Для ее производной по времени в силу системы дифференциальных уравнений (22) имеет место оценка (24), из которой следует оценка (25) и отрицательная определенность указанной производной, если для величин c_1, c_2, τ_1, τ_2 выполняются следующие соотношения:

$$A(p) > 0, c_1 - B(p) > 0, c_2 - \frac{1}{2(c_1 - B(p))} > 0, \frac{1}{\tau_1} - D(p, c_1) > 0, \frac{1}{\tau_2} - E(p, c_1, \tau_1) > 0. \quad (26)$$

Легко показать, что система неравенств (26) совместна для выбранного p , с учетом того, что $A(p) = 1$ при выбранном значении $\Psi(p)$, если

$$c_1 > B(p); c_2 > \frac{1}{2(c_1 - B(p))}; \tau_1 < \frac{1}{D(p, c_1)}; \quad (27)$$

$$\tau_2 \leq \tau_2^* < \frac{1}{E(p, c_1, \tau_1)}. \quad (28)$$

Таким образом, если выбрать c_1, c_2 и τ_1 согласно соотношениям (27), то из (28) определяется величина τ_2^* такая, что для всех $\tau_2 \in (0, \tau_2^*]$ система неравенств (26) совместна. Значит, для рассматриваемого значения параметра p и c_1, c_2, τ_1, τ_2 , выбранных согласно (27), (28), производная функции (23) по времени в силу системы дифференциальных уравнений (22) отрицательно определена. То есть функция (23) является функцией Ляпунова, которая в силу теоремы 12.1, см. [1], позволяет установить глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (22).

Поскольку p является произвольным значением параметра из P , то утверждение теоремы полностью доказано.

Замечание 3. Доказанная теорема для всех значений параметра p из области P постулирует существование управления вида (12), которое обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (5). Пусть для некоторого значения параметра p^* из области P такое управление построено, т.е. выбраны константы $c_1^* > 0, c_2^* > 0, \tau_1^* > 0, \tau_2^* > 0$. При выполнении неравенств

$$c_1^* > \max_{p \in P_1} (B(p)); c_2^* > \frac{1}{2 \left(c_1^* - \max_{p \in P_1} (B(p)) \right)}; \tau_1^* < \frac{1}{\max_{p \in P_1} (D(p, c_1^*))}; \tau_2^* < \frac{1}{\max_{p \in P_1} (E(p, c_1^*, \tau_1^*))} \quad (29)$$

построенное управление, очевидно, будет глобально асимптотически стабилизировать нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (5) для всех значений параметра p из области $P_1, P_1 \subseteq P, p^* \in P_1$, т.е. управление (12) робастно относительно области P_1 . Следует отметить, что вследствие непрерывной зависимости от p соответствующих функций и выполнения неравенств (29) при значении параметра p^* , такая область всегда может быть установлена. Таким образом, неравенства (29) можно использовать для определения области P_1 суть области робастности управления (12).

5. Пример.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере конкретной модели. Пусть параметры модели таковы: $M = 10$ кг, $m = 1$ кг, $r = 1$ м, $I = 1 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $K = 5$ Н/м. Принимаем, что величины измерены точно, т.е. не зависят от параметра. В этом случае, согласно соотношениям (27), (28), параметры управления могут быть выбраны такими: $c_1^* = 25$, $c_2^* = 10^5$, $\tau_1^* = 0,04$, $\tau_2^* = 10^{-5}$. Согласно теореме, нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (22) при выбранных значениях параметров будет глобально асимптотически устойчиво или, что то же, управление вида (12) глобально асимптотически стабилизирует положение равновесия системы дифференциальных уравнений (5).

Эволюция переменных q_1 , q_2 , их скоростей изменения \dot{q}_1 , \dot{q}_2 и управления Δ при начальных значениях $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ представлена на рис. 2 – 6. Как видим, управление Δ решает поставленную задачу стабилизации.

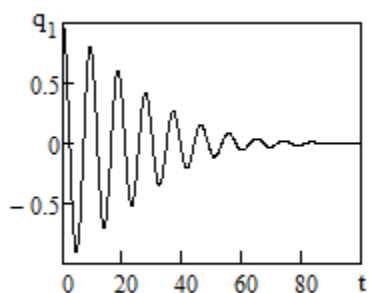


Рис. 2

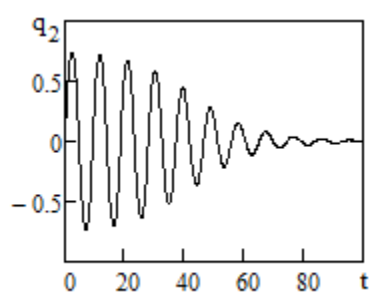


Рис. 3

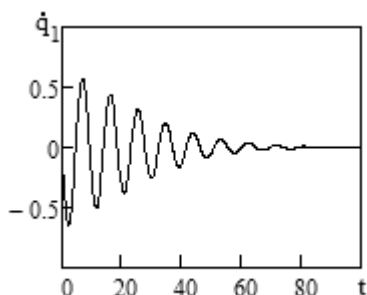


Рис. 4

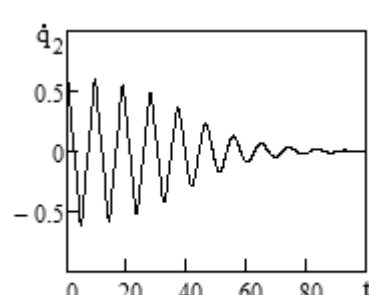


Рис. 5

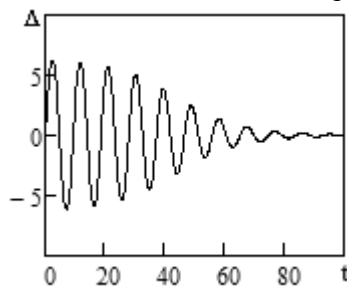


Рис. 6

Предположим, что, например, масса M задана неточно. В этом случае, примем ее значение зависящим от параметра: $M = (10 + p)$ кг. Установим область P изменения параметра p , чтобы построенное управление глобально асимптотически стабилизировало нулевое состояние равновесия модели при всех значениях параметра p из

области P . Воспользовавшись соотношениями (29), такая область определена в виде интервала $p \in (-10, 17]$. На рис. 7 – 11 представлено поведение модели при значении параметра $p = -9$ и начальных значениях переменных $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$. Как видно из рисунков, при меньшей массе M стабилизация указанным управлением происходит значительно быстрее.

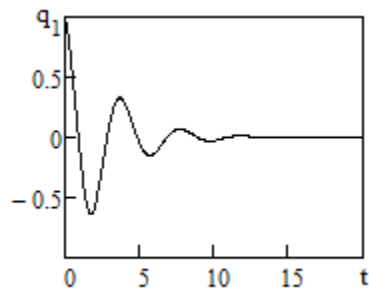


Рис. 7

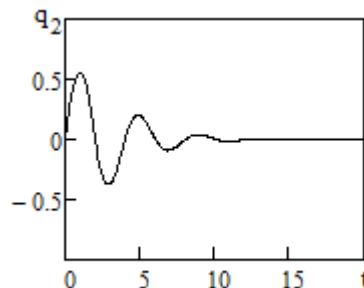


Рис. 8

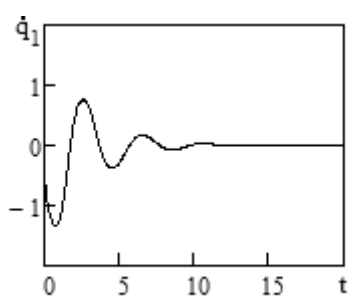


Рис. 9

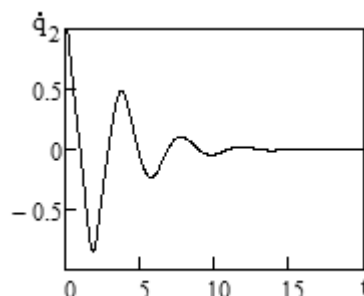


Рис. 10

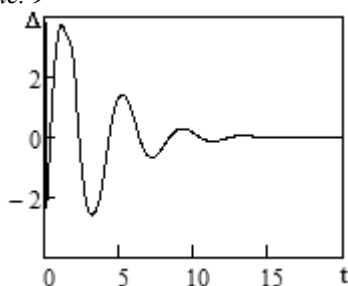


Рис. 11

Заключительные замечания.

В работе, используя технику DSC, получен закон управления вращением эксцентрикового маховика, который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия TORA. Отметим, что модель TORA получена в предположении, которое позволяет использовать ее как для спутника с двойным вращением на орбите, так и для модели активного гашения вибраций. Доказательство устойчивости проводится с помощью метода функций Ляпунова, что позволяет не разделять исходную систему дифференциальных уравнений, которая имеет вид быстро-медленной, на «быструю» и «медленную» подсистемы. Хотя данная система и допускает подобное разделение, установить устойчивость состояния равновесия «медленной» подсистемы достаточно трудно, так как она существенно нелинейна, а ее линеаризация, в контексте искомой глобальной устойчивости, смысла не имеет. Кроме того, функция Ляпунова, построенная для полной системы дифференциальных уравнений, позволяет, исходя из условий отрицательной определенности ее производной по

времени в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, получить ограничение на величину параметров, которые входят в управление. Отметим относительную простоту полученного закона управления по сравнению, например, с [10], [14], что имеет важность для его практического применения. Этого удалось достичь, поскольку применение техники DSC позволяет избежать значительного возрастания сложности элементов системы дифференциальных уравнений и закона управления. Также в работе указаны оценки, которые позволяют выбрать параметры управления и константы фильтров так, чтобы полученное управление стабилизировало положения равновесия TORA. Показана робастность такого управления и предложен способ оценки области робастности в пространстве параметров механической системы, что представляет значительный интерес, так как реальные механические системы всегда зависят от неточных параметров, см. [6, 7]. Полученные результаты проиллюстрированы на примере конкретной механической модели.

Р Е З Ю М Е . Побудовано керування обертанням ексцентрикового маховика, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість положення рівноваги трансляційного осцилятора з обертовим актуатором. Показано робастність такого керування і запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів механічної системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі конкретної моделі.

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. Bupp R.T., Bernstein D.S., Coppola V.T. Vibration suppression of multi-modal translational motion using a rotational actuator // Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA. – 1994. – P. 4030 – 4034.
3. Hall C. D. Resonance capture in axial gyrostats // J. of the Astronautical Sciences. – 1995. – 43. – P. 127 – 138.
4. Kinsey R. J., Mingori D. L., Rand R. H. Nonlinear controller to reduce resonance effects during despun of a dual-spin spacecraft through precession phase lock // Proceedings of the Conference on Decision and Control, Tucson, AZ. – 1992. – P. 3025 – 3030.
5. Kinsey R. J., Mingori D. L., Rand R. H. Spinup Through Resonance of Rotating Unbalanced Systems with Limited Torque // Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Washington, DC. – 1990. – P. 805 – 813.
6. Khoroshun A.S. Stability of the Horizontal Flight of an Airplane // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – P. 432 – 436.
7. Khoroshun A.S. Stability and Speed Control of a Series-Wound DC Motor // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 122 – 129.
8. Khoroshun A.S. Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 5. – P. 547 – 556.
9. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. – 2013. – 7, iss.7. – P. 921 – 935.
10. Reza Olfati-Saber. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. – Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, USA(2001).
11. Qaiser N., Hussain A., Iqbal N., Qaiser N. Dynamic surface control for stabilization of the oscillating eccentric rotor // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. – 2007. – 221(3). – P. 311 – 319.
12. Song B., Hedrick J.K. Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. – London: Springer-Verlag, 2011. – P. 268.
13. Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – 45, N 11. – P. 1893 – 1899.
14. Wan C.-J., Bernstein D.S., Coppola V.T. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor // Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA. – 1994. – P. 4024 – 4029.
15. Yee R. K. Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque // Master's Thesis, UCLA, 1981.
16. Zhang Y., Li L., Cheng B., Zhang X. An active mass damper using rotating actuator for structural vibration control // Advances in Mechanical Engineering. – 2016. – 8(7). – P. 1 – 9.

Поступила 31.10.2017

Утверждена в печать 22.05.2018