

В. А. Баженов^{1,2}, М. О. Вабищевич¹,
И. И. Солодей^{1,2}, Е. А. Чепурная¹

**О ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ**

¹ Киевский национальный университет строительства и архитектуры;

² Научно-исследовательский институт строительной механики,
пр-т Воздухофлотский, 31, 03680, Киев, Украина; e-mail: isolodey@gmail.com

Abstract. Basing on the semi-analytical finite element method, the effective approach to modeling the crack type damages is developed. Also the algorithms are offered that permit to determine the fracture strength parameters in problems of fracture of elastic spatial bodies of revolution and prismatic bodies under action of the non-stationary forces of different level of intensity and duration in time. A theory and features of fracture mechanics parameters calculation are presented basing on an energy approach using a special prismatic and ring finite elements with crack in conditions of dynamical loadings. An analysis of effectiveness of proposed algorithms is carried out.

Key words: dynamics, crack, dynamic stress intensity factor, J-integral, prismatic body, body of revolution, semi-analytical finite element method.

Введение.

Стремление к увеличению срока эксплуатации ответственных объектов современной техники обуславливает необходимость обоснования прочности и сопротивления разрушению конструктивных элементов и деталей при наличии в них трещиноподобных дефектов. Во многих случаях исследуемые конструкции находятся под действием произвольно распределенных в пространстве и времени нестационарных динамических нагрузок различной длительности. Определение параметров трещиностойкости данных объектов является одним из решающих факторов получения адекватных результатов расчетной оценки конструкционной прочности и предотвращения возможных аварийных ситуаций.

Учитывая технические трудности и высокую стоимость проведения натурных испытаний, решение указанной проблемы с привлечением экспериментальных методов является крайне сложным, а иногда невозможным. В связи с этим, возникает необходимость более глубокого теоретического изучения особенностей поведения таких конструкций и создания соответствующих численных средств по определению динамических параметров механики разрушения.

Многие узлы и детали, используемые в машиностроении, энергетике и других отраслях техники, представляют собой пространственные тела вращения или призматические тела сложной формы. К ним относятся элементы крепежных систем, демпферных устройств, сосуды давления, образцы для определения динамических параметров механики разрушения и т.д.

Отметим, что наиболее распространенным и универсальным численным методом исследования данного класса объектов является полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ) [3, 6 – 8]. Основные положения, современные подходы решения задач механики разрушения и связанные с ними аспекты численной реализации рассмотрены в [1, 9 – 11, 13 – 16]. Широко представлены вычислительные алгоритмы и результаты определения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для двумерных и пространственных задач теории трещин при статическом нагружении.

Целью данной работы является развитие полуаналитического метода конечных элементов в задачах механики разрушения для призматических тел и тел вращения при анализе переходных динамических процессов нагружения.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим однородные изотропные тела вращения и призматические тела, находящиеся под действием произвольной импульсной нагрузки или смещений, на некотором интервале времени.

Описание геометрических и механических характеристик, начальных и граничных кинематических условий, внешних нагрузок осуществляется в ортогональной круговой цилиндрической или декартовой системе координат, которую в дальнейшем называем базисной. Для представления напряженно-деформированного состояния тела (далее НДС) со сложной формой поперечного сечения вводится местная криволинейная система координат, которая связана с геометрией тела. Принимаем, что в произвольной точке тела известна однозначная связь между базисной и местной системами координат, которая определяется с помощью тензоров преобразования координат [5]:

$$c_{,j}^{i'} = \frac{\partial Z^{i'}}{\partial x^j}; \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial Z^{j'}}; \quad g_{ij} = c_{,i}^{m'} c_{,j}^{n'} g_{m'n'}; \quad g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}.$$

Здесь и далее, индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3; греческими – 1, 2; запятая перед индексом показывает операцию дифференцирования; $A(g_{ij})$ – алгебраическое дополнение к элементу g_{ij} , $g = \det [g_{ij}]$ – определитель матрицы.

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, определяющие масштабы базисных векторов, имеют такой вид:

ортогональной цилиндрической системе координат –

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1; \quad g_{3'3'} = (Z^{2'})^2;$$

декартовой системе –

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = g_{3'3'} = 1.$$

Ненулевые символы Кристоффеля второго рода $\Gamma_{l'm'}^{k'}$ в ортогональной цилиндрической системе координат имеют вид

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}; \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}},$$

а в декартовой системе –

$$\Gamma_{l'm'}^{k'} = 0.$$

Компоненты тензора деформаций в местной системе координат через компоненты перемещений в базисной $u_{k'}$ представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k',i} c_{,j}^{k'} + u_{k',j} c_{,i}^{k'}) - u_{k'} c_{,i}^{m'} c_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{k'}. \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений в местной системе координат представим через компоненты тензора деформаций на основе обобщенного закона Гука [5], т.е.

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}).$$

В каждый момент времени упруго-деформированное состояние удовлетворяет вариационному уравнению движения, которое, согласно принципу Лагранжа – Даламбера, представим в виде

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V f^i \delta u_i dV - \int_{S_p} p^i \delta u_i dS = 0.$$

Начальные условия формулируем в виде распределения перемещений и скоростей в фиксированный момент времени t_0 , который принимаем за начало временной координаты, т.е. $u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i)$, $\dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i)$, $Z^i \in V$.

При этом предполагаем, что на части поверхности S_u заданы кинематические граничные условия $u(Z^i, t) = \tilde{u}(Z^i, t)$, $Z^i \in S_u$, а на поверхности S_p с нормалью $\bar{n} = n_j e^j$ – произвольно ориентированная в пространстве и во времени система нагрузок

$$z^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t); \quad Z^{k'} \in S_p.$$

Для прямолинейных призматических тел и тел вращения рассмотрим трещины, фронт которых совпадает по направлению с образующей тела. Фрагменты тел с трещинами показаны на рис. 1.

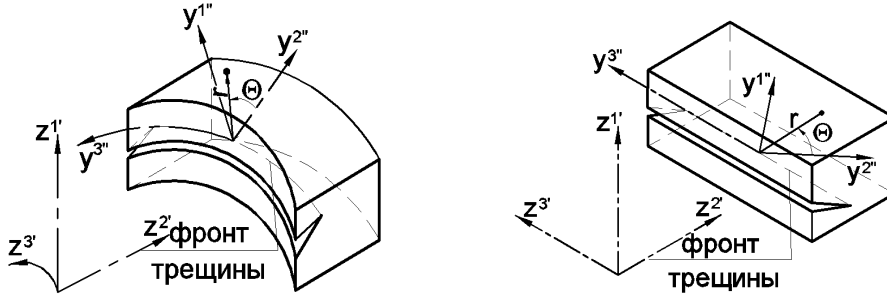


Рис. 1

Выделяют три типа трещин: нормального отрыва, поперечного и продольного смещения. В зависимости от типа трещины формулы связи между компонентами тензора напряжений, вектора перемещений и значениями динамического КИН имеют следующий вид:

трещина нормального отрыва (тип I) –

$$\sigma^{i'j'}(t) = K_I(t) \overset{\sigma}{H}_I^{i'j'}(r, \theta); \quad i'', j'' = 1, 2; \quad (2)$$

$$u_{i'}(t) = K_I(t) \overset{u}{H}_I^{i'}(r, \theta); \quad (3)$$

трещина поперечного сдвига (тип II) –

$$\sigma^{i'j'}(t) = K_{II}(t) \overset{\sigma}{H}_{II}^{i'j'}(r, \theta); \quad i'', j'' = 1, 2; \quad (4)$$

$$u_{i'}(t) = K_{II}(t) \overset{u}{H}_{II}^{i'}(r, \theta); \quad (5)$$

трещина продольного сдвига (тип III) –

$$\sigma^{i'j'}(t) = K_{III}(t) \overset{\sigma}{H}_{III}^{i'j'}(r, \theta); \quad i'', j'' = 1, 3; \quad (6)$$

$$u_{i'}(t) = K_{III}(t) \overset{u}{H}_{III}^{i'}(r, \theta), \quad (7)$$

где H – известные функции асимптотических формул компонент тензора напряжений и перемещений вблизи вершины трещины [13].

Для формулирования J-интеграла в задаче динамики используем определение:

$$J_k(t) = \frac{1}{\Delta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left[\{W(t) + T(t)\} n_{(3-k)} - \sigma^{ij}(t) \frac{\partial u_i(t)}{\partial y^{(3-k)j}} n_j \right] dS \quad (k=1, 2), \quad (8)$$

где W – потенциальная; T – кинетическая энергии соответственно; S_ε – поверхность малого объема, охватывающего сегмент фронта трещины (рис. 2) протяженностью Δ ; n_j – компоненты вектора внешней нормали к поверхности F ; u_i , σ^{ij} – перемещения и напряжения; y^i – локальная система координат трещины. Сегмент фронта трещины для тел вращения и прямолинейных призматических тел представлен на рис 2, а, б.

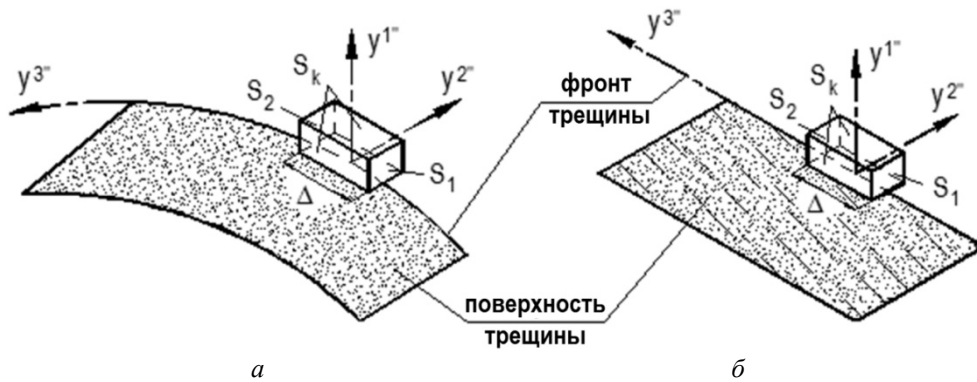


Рис. 2

Далее для удобства представления опускаем индекс времени.

Согласно работе [13] связь между КИН и J-интегралом (8) имеет вид:

$$J_1 = \frac{1}{H} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2, \quad J_2 = -\frac{2}{H} K_I K_{II}, \quad \text{при этом } J_1 = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad \text{где } G_I, G_{II}, G_{III} \text{ – интенсивности освобождения упругой энергии.}$$

Следует также отметить, что

$$K_I = \sqrt{\tilde{E} G_I}; \quad K_{II} = \sqrt{\tilde{E} G_{II}}; \quad K_{III} = \sqrt{2\mu G_{III}} \quad \text{или}$$

$$K_{I/II} = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{E}} (\sqrt{J_1 - J_2 - G_{III}} \pm \sqrt{J_1 + J_2 - G_{III}}),$$

где $\tilde{E} = E$ – в случае плоского напряженного состояния, $\tilde{E} = E/(1-\nu^2)$ – при плоской деформации.

Для моделирования трещины вводится тонкий контактный слой, в пределах которого НДС описывается в дополнительной системе координат y^{i*} , связанной с конфигурацией фронта трещины (рис. 3). Толщина слоя конечных элементов должна удовлетворять двум условиям. С одной стороны, она должна иметь относительно небольшую величину по сравнению с габаритными размерами объекта, поскольку слой вводится фиктивно с целью упрощения численного моделирования трещины; с другой – численная устойчивость результатов расчета зависит от соотношения сторон конечного элемента.

Рассмотрим специальные призматический (рис. 3, а) и кольцевой замкнутый (рис. 3, б) конечные элементы (КЭ) с поперечным сечением (рис. 3, в) в виде криволинейного четырехугольника произвольного очертания, который разрезан трещиной (рис. 3). Полагаем, что область, которую занимает элемент, отображается на квадрат с единичными сторонами, внутренние свойства которого определяются механическими и геометрическими характеристиками элемента.

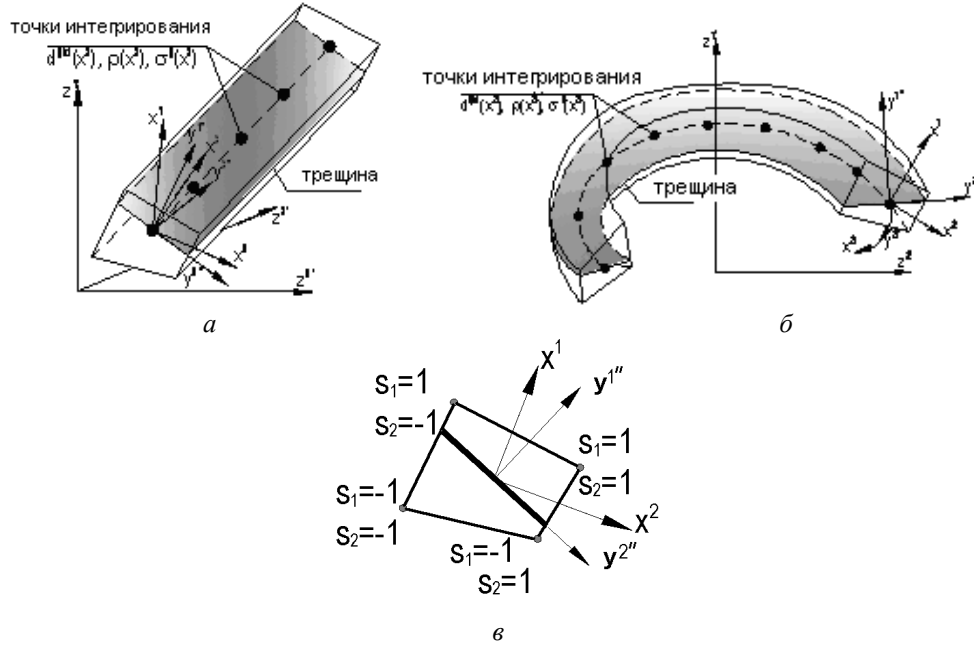


Рис. 3

Специальные конечные элементы с трещиной (СКЭТ) построены на основе замкнутого кольцевого и призматического КЭ полуаналитического метода конечных элементов [12].

Для учета отрезка трещины, которая проходит через поперечное сечение КЭ, должны дополнительно выполняться условия $\sigma^{1'1'} \leq 0$, $\sigma^{1'2'} = 0$, $\sigma^{1'3'} = 0$.

Решение задачи динамики для тел с трещинами требует введения в уравнения движения ограничений от взаимного проникновения берегов трещины $\sigma^{1'1'} \leq 0$, поскольку нестационарные задачи предусматривают наличие силовых факторов различных знаков. Подобный аспект возникает также и в задачах статики; например, при рассмотрении изгиба пластины со сквозной трещиной, когда ее берега стремятся раскрыться на растянутой стороне пластины и сомкнуться на стороне сжатия. СКЭТ обеспечивает естественно легкое решение этой проблемы варьированием напряжений $\sigma^{1'1'}$, нормальных к поверхности контакта берегов трещины.

Необходимость выполнения условий равенства нулю напряжений на поверхности трещины приводит к коррекции тензора упругих констант $\sigma^{mn} = d_*^{mnst} \varepsilon_{st}$.

Составляющие корректирующих членов тензора упругих констант

$$d_*^{mnst} = d^{mnst} - d_p^{mnst} - d_c^{mnst} - d_q^{mnst} \quad (9)$$

вычисляются через коэффициенты Ляме и тензоры преобразований, которые определяют связь между базисной системой координат $Z^{i'}$ и системой координат трещины $y^{i''}$.

$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + \lambda/2\mu} S^{mn} S^{st}; \quad S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + c_{1''}^m c_{1''}^n;$$

$$d_c^{mnst} = \mu(r_{1''}^{ns} r_{2''}^{mt} + r_{1''}^{ms} r_{2''}^{nt} + r_{1''}^{nt} r_{2''}^{ms} + r_{1''}^{mt} r_{2''}^{ns}); \quad d_q^{mnst} = \mu(r_{1''}^{ns} r_{3''}^{mt} + r_{1''}^{ms} r_{3''}^{nt} + r_{1''}^{nt} r_{3''}^{ms} + r_{1''}^{mt} r_{3''}^{ns});$$

$$c_{i''}^m = c_{k'}^m c_{i''}^{k'}; \quad r_{i''}^{ms} = c_{(i'')}^m c_{(i'')}^s; \quad c_{k'}^m = \partial x^m / \partial Z^{k'}; \quad c_{i''}^{k'} = \cos \beta; \quad \beta \equiv (Z^{k'} \wedge y^{i''}).$$

Для тел вращения: $c_{3'}^\alpha = c_{\alpha'}^3 = 0$, $c_{3'}^3 = 1$, а для призматических тел: $c_{3'}^\alpha = c_{\alpha'}^3 = 0$, $c_{3'}^3 = 1/a$.

Важным преимуществом предложенного подхода, основанного на изменении соответствующим образом физико-механических характеристик материала, является то, что система деформируемых тел аппроксимируется как единое тело с помощью разработанных типов КЭ. При этом, вычисление коэффициентов эффективной матрицы жесткости специального конечного элемента выполняется по тем же формулам, что и для обычных КЭ, ограничиваясь коррекцией элементов матриц упругих постоянных.

В силу замкнутости кольцевого КЭ, постоянства его геометрических параметров вдоль окружной координаты и для обеспечения выполнения граничных условий для шарнирно опертых призматических тел, распределение неизвестных (перемещения, скорости, ускорения) в направлении x^3 (рис. 3) проводится 2π -периодическими функциями x^3 и их узловые значения представляются отрезками тригонометрических рядов Фурье

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{(k')}^l, \quad (10)$$

где: для кольцевого КЭ – $\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3$, $\psi_{3'}^l = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$;

для призматического КЭ – $\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$, $\psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$, $l_0 = 1$, $0 \leq x^3 \leq 2$.

Компоненты тензоров деформаций и напряжений в центре КЭ определяем согласно формул:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{3'}^l; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} &= \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_{3'}^l; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l &= \overset{\circ}{B}_{ij}^{k'(S_1, S_2)} u_{k'(S_1, S_2)}^l; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l &= \overset{\circ}{B}_{ij,\alpha}^{k'(S_1, S_2)} u_{k'(S_1, S_2)}^l; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l &= \overset{\circ}{B}_{ij}^{k(S_1, S_2)} u_{k(S_1, S_2)}^l; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l &= \overset{\circ}{B}_{ij,\alpha}^{k(S_1, S_2)} u_{k(S_1, S_2)}^l; \\ \overset{\circ}{\sigma}^{ij} &= \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \psi_{3'}^l; & \overset{\circ}{\sigma}^{ij,\alpha} &= \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}^{ij,\alpha} \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}^{ij,\alpha} \psi_{3'}^l; \\ \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l; & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} &= d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l; & \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l; & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} &= d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты матриц $[B]$ вычисляем в соответствии с формулами (1) и использованием разложения (10).

Построение амплитудной обобщенной матрицы жесткости для 2-х типов КЭ осуществляется на основе выражения для вариации потенциальной энергии –

$$\delta W = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Представив компоненты тензоров напряжений и деформаций через разложения в ряд Маклорена и выполнив интегрирование по x^1 , x^2 , учитывая, что коэффициенты разложения напряжений связаны с коэффициентами разложения приращений деформаций законом Гука, получим

$$\delta W = \int_{x^3} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \overset{\circ}{\sigma}^{ij,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} \right) \sqrt{g} dx^3.$$

Учитывая зависимости между коэффициентами разложения приращений деформаций и коэффициентами разложения перемещений, представим выражение вариации энергии КЭ в амплитудном виде (на основе рядов Фурье) т.е.

$$\delta W = \sum_{l=l_0}^L \delta W_l; \quad \delta W_l = \left[\overset{\circ}{\sigma}_i^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l + \overset{\circ}{\sigma}_i^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \right) \right] \sqrt{g}.$$

Выполнив численное интегрирование по направлению x^3 для обобщенной амплитудной матрицы жесткости обоих КЭ, получим

$$[K]_{ll} = \left[\sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_l^T [D_\beta] [B_\beta]_l + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_\beta]_{\alpha l}^T [D_\beta]_\alpha [B_\beta]_{\alpha l} \right] \sqrt{g}.$$

Заметим, что матрица $[D_\beta]$ корректируется в соответствии с выражением (9).

Вариация кинетической энергии в местной системе координат описывается соотношением

$$\delta T = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Если использовать предположение об усреднении массы в окрестности узла, и учесть, что каждая узловая масса соответствует части масс элементов, примыкающих к рассматриваемому узлу сетки, вариацию кинетической энергии представим в виде:

$$\delta T = \frac{1}{4} \int_{x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^3.$$

С учетом (10) имеем:

$$\delta T = \sum_{l=l_0}^L \delta T_l,$$

$$\text{где } \delta T_l = \frac{1}{4} \rho \ddot{u}_{k'(s_1, s_2)}^l \delta u_{k'(s_1, s_2)}^l \mathcal{G}_{(s_1, s_2)}^{k'k'} \sqrt{g}.$$

Тогда выражение для обобщенной амплитудной матрицы масс принимает вид

$$[M]_{ll} = \frac{1}{4} \rho \sqrt{g} [g^{k'k'}].$$

Интегрирование уравнений движения по времени выполняем с помощью двух известных подходов: метода Ньюмарка или разложения решения по формам собственных колебаний конструкции, модификации которых записываются в амплитудных подсистемах ПМКЭ.

Специфика ПМКЭ такова, что за неизвестные принимаются амплитудные компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений. При этом задача их определения для однородных в направлении образующей тел сводится к решению системы независимых обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для момента времени τ , которая записывается в форме

$$[M]_{ll} \{\ddot{U}\}^{l,\tau} + [K]_{ll}^{\tau} \{U\}^{l,\tau} = \{Q\}_l^{\tau} \quad (l = l_0, \dots, L), \quad (12)$$

где $\{Q\}$ – вектор усилий, определяемый на основе вариации работы внутренних и внешних сил.

Следуя общему подходу метода Ньюмарка [4], неизвестные значения амплитудных перемещений и скоростей в момент времени $t + \Delta t$ представим через значения этих же параметров на предыдущем шаге по времени в соответствии с конечно-разностными формулами:

$$[\tilde{K}]_{ll}^{t+\Delta t} \{U\}^{l,t+\Delta t} = \{\tilde{Q}\}_l^{t+\Delta t},$$

где

$$[\tilde{K}]_{ll}^{t+\Delta t} = [K]_{ll}^{t+\Delta t} + a_0 [M]_{ll}; \quad \{\tilde{Q}\}_l^{t+\Delta t} = \{Q\}_l^{t+\Delta t} + [M]_{ll} \{a_0 \{U\}^{l,t} + a_2 \{\dot{U}\}^{l,t} + a_3 \{\ddot{U}\}^{l,t}\}.$$

Решая систему уравнений, получаем амплитудные значения перемещений в момент времени $t + \Delta t$, по которым вычисляем амплитуды скоростей и ускорений для момента времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^{l,t+\Delta t} &= a_0 (\{U\}^{l,t+\Delta t} - \{U\}^{l,t}) - a_2 \{\dot{U}\}^{l,t} - a_3 \{\ddot{U}\}^{l,t}; \\ \{\dot{U}\}^{l,t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^{l,t} + a_6 \{\dot{U}\}^{l,t} + a_7 \{\ddot{U}\}^{l,t+\Delta t}, \end{aligned}$$

где $a_0 = 1/(\alpha \Delta t^2)$, $a_2 = 1/(\alpha \Delta t)$, $a_3 = 1/2\alpha - 1$, $a_6 = \Delta t(1 - \beta)$, $a_7 = \beta \Delta t$, $\beta \geq 0,5$, $\alpha \geq 0,25(0,5 + \beta)^2$ – условия, определяющие устойчивость схемы интегрирования.

Рассмотрим алгоритм разложения по формам собственных колебаний. Переход к нормальным координатам осуществляется в результате линейного преобразования

$$\{U\}^{l,\tau} = [\Phi]_{lr} \{X\}_r^{l,\tau} \quad (r = 1, \dots, \Omega). \quad (13)$$

Здесь $\{\Phi\}_r^l$ – амплитуда r собственной формы дискретной модели, вычисленной с помощью модального анализа; $x_r(t)$ – неизвестные весовые коэффициенты, решенные для r собственной формы; Ω – число собственных форм, удерживаемых при линейном преобразовании.

Выполнив подстановку (13) в (12) и умножив слева на $[\Phi]_{lr}^T$, получим систему уравнений, которая с учетом ортогональности собственных форм

$$[\Phi]_{lr}^T [M]_{ll} [\Phi]_{lr} = [I]_{rr}; \quad [\Phi]_{lr}^T [K]_{ll} [\Phi]_{lr} = [\Lambda]_{rr},$$

превращается в ряд независимых дифференциальных уравнений вида

$$[I]_{rr} \{\ddot{X}\}_r^{l,\tau} + [\Lambda]_{rr} \{X\}_r^{l,\tau} = [\Phi]_{lr}^T \{Q\}_r^{l,\tau}, \quad (14)$$

с такими начальными условиями:

$$\{X_0\}_{r,Z^r}^l = [\Phi]_{lr}^T [M]_{ll} \{U_0\}_{Z^r}^l; \quad \{\dot{X}_0\}_{r,Z^r}^l = [\Phi]_{lr}^T [M]_{ll} \{\dot{U}_0\}_{Z^r}^l.$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка (14) представим интегралом Дюамеля:

$$\{X\}_r^{l,t} = [CC]^t \{X\}_r^{l,t_0} + [SS]^t \{\dot{X}\}_r^{l,t_0} + \int_{t_0}^t [SS]^{t-\tau} [\Phi]_{lr}^T \{Q\}_r^{l,\tau} d\tau,$$

где

$$[CC]^r = \text{diag}[\cos \theta_r \tau]; \quad [SS]^r = \text{diag} \left[\frac{\sin \theta_r \tau}{\theta_r} \right]; \quad \theta_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

Интегрирование выполним численно на основе формулы прямоугольников.

Используя формулы (2) – (7) в качестве начальных и принимая во внимание разложения (10) и (11), можно получить формулы для вычисления амплитудных значений КИН для каждой из подсистем ПМКЭ, т.е.

$$K_{\zeta}^l = \frac{\overset{\circ}{\sigma}_l^{i'j'} \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}_l^{i'j'} \psi_{3'}^l}{\overset{\circ}{H}_{\zeta}^{i'j'}(r, \theta)}; \quad K_{\zeta}^l = \frac{u_l^i \psi_{1'}^l}{H_{\zeta}^{i'}(r, \theta)}.$$

Координатные величины определяются по формулам

$$\bar{K}_\zeta^\sigma = \sum_{l=l_0}^L \bar{K}_\zeta^{l,\sigma}; \quad \bar{K}_\zeta^u = \sum_{l=l_0}^L \bar{K}_\zeta^{l,u}; \quad \zeta = I, II, III.$$

Конечное расчетное значение КИН вычисляем усреднением по области 6×6 элементов (рис. 4):

$$K_\zeta = \sum_{l=l_0}^L K_\zeta^l; \quad K_\zeta^l = \frac{1}{2} \left(\bar{K}_\zeta^{l,\sigma} + \bar{K}_\zeta^{l,u} \right),$$

где \bar{K} – КИН по напряжениям, \bar{K} – по перемещениям. Кружками обозначены точки определения КИН по напряжениям, крестиками – по перемещениям.

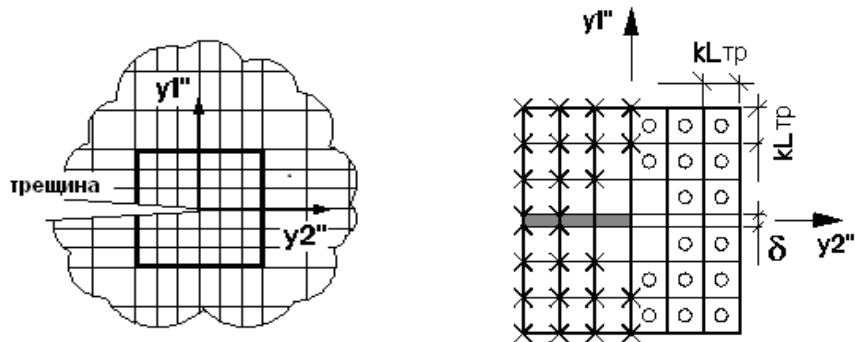


Рис. 4

Рис. 5 отображает схему проведения численных исследований при изменении параметра k в части зоны, граничащей с поверхностью трещины, и соответствует ранее приведенной методике вычисления КИН. На основе полученных решений построен график изменения погрешности ψ вычисления КИН прямым методом для задачи динамики, который уточняет оптимальный показатель размера стороны КЭ $k = 1/15 \dots 1/20$ по сравнению с вариантом статической нагрузки [3].

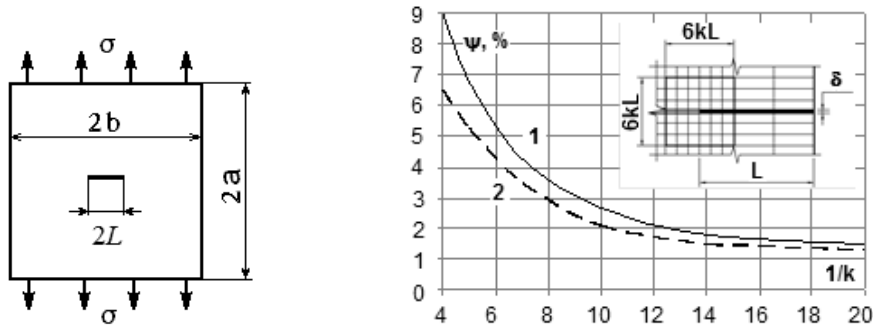


Рис. 5

Традиционно для вычисления энергетического интеграла в пределах сеточных методов используется формулировка (15, см. выше). Принимается, что трещина связана с системой координат x^α (рис. 6), где индекс α определяет продольное направление трещины, N_j – стороны выбранного контура интегрирования.

$$\sum_{j=1}^{N_3} (W + T)_\alpha ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (W + T)_\alpha ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j. \quad (15)$$

В данной статье используем метод реакций [2], в соответствии с которым все члены, входящие в (15), определяются с помощью узловых реакций и перемещений сечной области для момента времени $\tau = t + \Delta t$. Представим компоненты из (15) через амплитудные значения:

$$(W^l + T^l) dS_j = \frac{\{u\}_{lj}^T \{R\}_{lj}}{2(\Delta x_\alpha)_j}; \quad R_{l2-4}^k = \frac{n_i \sigma_{l2-4}^{ik} dS}{2}; \quad R_{l1-3}^k = \frac{n_i \sigma_{l1-3}^{ik} dS}{2};$$

$$R_{l2-4}^k = \frac{1}{2} (R_{l2}^k + R_{l4}^k); \quad \zeta_{2-4}^{kl} = \left(\frac{\partial u_{li}}{\partial x^k} \right)_{2-4} = \frac{1}{\Delta x_\alpha} (u_{l4}^k - u_{l2}^k);$$

$$R_{l1-3}^k = \frac{1}{2} (R_{l1}^k + R_{l3}^k); \quad \zeta_{1-3}^{kl} = \left(\frac{\partial u_{li}}{\partial x^k} \right)_{1-3} = \frac{1}{\Delta x_\alpha} (u_{l3}^k - u_{l1}^k).$$

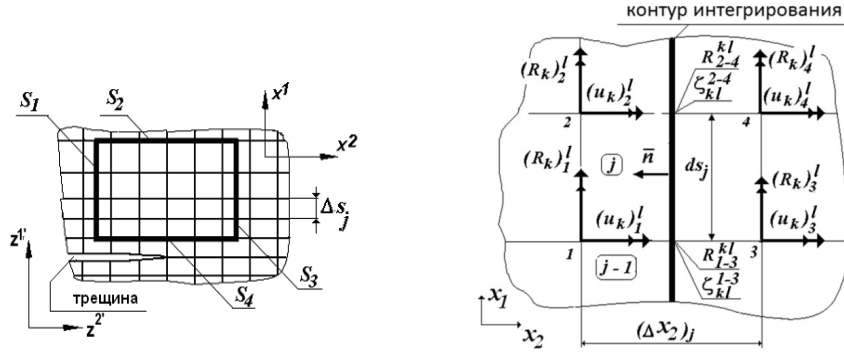


Рис. 6

Таким образом, окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^T \{R\}_{lj} - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^T \{R\}_{lj} - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(\frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left(\frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j. \end{aligned}$$

Формулы для вычисления амплитудных значений узловых реакций зависят от алгоритма решения уравнений движения.

В соответствии с формулировкой метода Ньюмарка [4] систему уравнений (12) можно представить в виде

$$\{R_w\}_l^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_l^{t+\Delta t} = \{Q\}_l^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_l^t,$$

где

$$\{R_w\}_l^{t+\Delta t} = [K]_{ll} \{U\}_l^{l,t+\Delta t}; \quad \{\bar{R}_\rho\}_l^{t+\Delta t} = a_0 [M]_{ll} \{U\}_l^{l,t+\Delta t};$$

$$\{\bar{R}_\rho\}_i^t = [M]_{ii} \{a_0 \{U\}^{t,t} + a_2 \{\dot{U}\}^{t,t} + a_3 \{\ddot{U}\}^{t,t}\}.$$

Исходя из этого, узловые реакции для задачи динамики с трещиной при использовании прямого метода интегрирования уравнений движения будем вычислять на основе выражения

$$\{R\}_i^\tau = \{R_w\}_i^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_i^{t+\Delta t} - \{\bar{R}_\rho\}_i^t. \quad (16)$$

и включать статическую и динамическую составляющие.

Следует отметить, что для различных методов прямого интегрирования уравнений движения (Вилсона, Хоболта и др.) динамическая составляющая реакции (16) не будет однозначной, и она определяется в соответствии с выбранным подходом.

В случае, когда динамическое решение задачи формируется на основе собственных форм конструкции, узловые реакции вычисляются по формуле

$$\{R\}_i^\tau = \{R_w\}_i^\tau - \{R_\rho\}_i^\tau,$$

где

$$\{R_w\}_i^\tau = [K]_{ii} \{U\}^{t,\tau}; \quad \{R_\rho\}_i^\tau = \lambda_r [M]_{ii} \{U\}^{t,\tau}.$$

Результаты решения задачи о динамическом растяжении прямоугольной пластины с центральной трещиной выявили хорошую сходимость решений на основе предложенного подхода (рис. 7). Исследования проведено для различных длин трещин, результаты для двух из них представлены в виде графиков сходимости по погрешности ψ определения КИН.

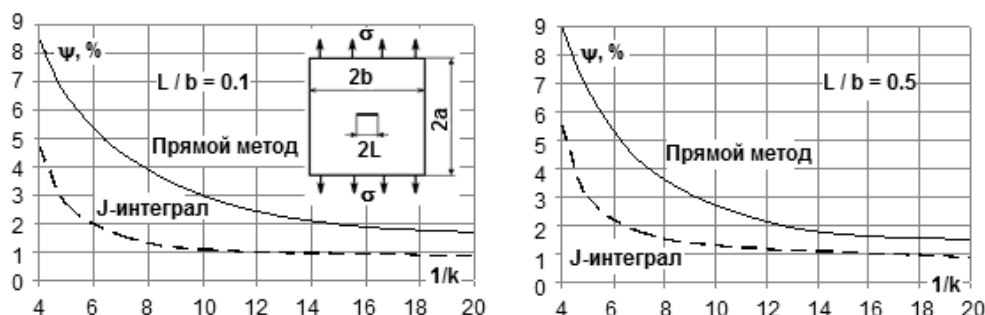


Рис. 7

Следует отметить, что решение на основе метода реакций сходится значительно быстрее и требует меньшего сгущения сетки вблизи вершины трещины.

Заключение.

На основе полуаналитического метода конечных элементов предложен подход, позволяющий рассматривать задачи линейной механики разрушения для пространственных тел вращения и призматических тел с трещинами, которые находятся под действием динамического нагружения.

Предложена комбинация специального конечного элемента с трещиной, как модели с прямой коррекцией тензора напряжений обычного КЭ, и алгоритма усреднения полученных решений по эффективной привершинной подобласти, что позволяет сохранить регулярную структуру дискретной модели и значительно уменьшить вычислительные расходы.

Разработан подход к определению энергетического интеграла в дискретных моделях ПМКЭ на основе метода реакций для задач динамики.

РЕЗЮМЕ. На основі напіваналітичного методу скінченних елементів розроблено ефективний підхід моделювання пошкоджень типу тріщин, а також алгоритми визначення параметрів тріщиностійкості в задачах руйнування пружних просторових тіл обертання і призматичних тіл під дією нестационарних навантажень різного рівня інтенсивності та тривалості у часі. Викладено теорію та особливості обчислення параметрів механіки руйнування на основі енергетичного підходу із використанням спеціальних призматичного та кільцевого скінчених елементів з тріщиною в умовах динамічних навантажень. Проведено аналіз ефективності запропонованих алгоритмів.

1. *Атдури С.* Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: Мир, 1990. – 392с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Метод реакцій для обчислення J -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування// Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 79. – С. 3 – 17.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: Випол, 1993, 376 с.
4. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447с.
5. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. – 1964. – 483 с.
6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 539 с.
7. *Золотов А.Б.* Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве / Научное издание – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
8. *Кантор Б.Я., Гнизько В.И.* Об одном методе изучения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций вращения, циклически неоднородных в окружном направлении // Харьков: ИПМаш АН УССР, 1982, препринт – 171. – 20 с.
9. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 2007. – 256 с.
10. *Неклассические проблемы механики разрушения / В четырех томах под общей редакцией академика АН Украины А.Н.Гузя – К.: Наук. думка, 1993. – 237с.*
11. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
12. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного методу скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, Вип. 82, 2008. – С. 154 – 163.
13. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
14. *Численное моделирование напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины в компактном образце для испытаний на растяжение [на англ.яз.] / А.А.Котляренко, Т.А.Прач, В.В.Харченко, А.Ю.Чирков // Пробл. прочности. – 2009. – № 1. – С. 134 – 140.*
15. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 3 – 89.
16. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks // J. Appl. Mech. – 1968. – **35**, №2. – P. 379 – 386.

Поступила 22.0.2016

Утверждена в печать 22.05.2018