

А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru*

Abstract. A problem on the stress-strain state of quadrangular plates of complex shape is considered. The main feature of this study is comparison of the boundary problem solutions obtained by different numerical approaches. The first approach is based on using the discrete-continuous methods. It assumes writing the resolving system of equations in the new coordinates basing on changes that take into account the plate geometry. By use of the spline-collocations, the obtained two-dimensional boundary problem for the system of partial differential equations is reduced to the one-dimensional one that is solved by the numerical method of discrete orthogonalization. The second (discrete) approach is based on the finite elements method. A comparison of numerical results for plates in the form of trapezium based on the different approach ss carried out. The obtained values of displacements are consistent with high accuracy.

Key words: stress-strain state; plates of different shapes; coordinate transformation; discrete-continuous method, finite elements method, comparison the result calculations.

Введение.

Методы и подходы для решения задач об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин разрабатываются уже многие десятилетия. К настоящему времени многие задачи для пластин относительно простой формы получили свои аналитические или полуаналитические решения, включающие использование разложений в ряды и сплайн-аппроксимацию [6, 16]. Много работ посвящено численным методам анализа пластин в виде параллелограмма [5, 8, 14, 15, 20] при различных условиях закрепления и нагружения.

Специальные численные подходы, как правило, учитывают наличие симметрии либо используют для описания исходной области параметризацию [12, 19]. Использование преобразования координат также обсуждалось в [13, 18].

В работе [10] приведен подход к решению задач о НДС четырехугольных пластин в уточненной постановке с использованием метода сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации.

Этот подход сводится к переходу от произвольной четырехугольной области к прямоугольной [4, 17]. В [9] подобное преобразование использовано для определения собственных частот пластин и мембран. В [12] определяется напряженное состояние трапециевидных пластин и пластин в форме параллелограммов, но область параметризуется другими методами.

Очевидно, что данную задачу можно легко решить, используя коммерческие компьютерные пакеты, в основе которых лежит метод конечных элементов (МКЭ). Однако, следует заметить, что в этом случае возникает существенный вопрос о достоверности полученных результатов расчетов. Применению МКЭ для расчета пластин посвящена монография [7].

Основной целью данного сообщения является проведение сравнительного анализа расчетов НДС пластин сложной формы (в данном случае под этим термином будем понимать четырехугольные пластины с выпуклой геометрией) на основании подхода предложенного авторами, который базируется на последовательном применении таких методов: сплайн-коллокация, дискретная ортогонализация и МКЭ.

1. Исходные уравнения.

Для простоты изложения рассмотрим изотропные пластинки постоянной толщины в уточненной постановке с учетом гипотез С.П.Тимошенко [2] в декартовой системе координат x, y .

Представим деформации изгиба и кручения $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ и углы поворота прямолинейного элемента γ_x, γ_y через полные углы поворота ψ_x, ψ_y и прогиб w :

$$\kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}; \quad \gamma_x = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_y = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1)$$

Соотношения упругости для моментов M_x, M_y, M_{xy} и перерезывающих усилий Q_x, Q_y в случае изотропной пластины записываем так [2]:

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y); \quad M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x); \quad M_{xy} = \frac{Gh^3}{6}\kappa_{xy}; \quad Q_x = \frac{5}{6}Gh\gamma_x; \quad Q_y = \frac{5}{6}Gh\gamma_y, \quad (2)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; h – толщина пластины.

Уравнения равновесия пластины, нагруженной равномерно распределенной по поверхности поперечной нагрузкой q , имеют вид:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0. \quad (3)$$

Подставляя (1) в (2) и (2) в (3), получаем разрешающие уравнения для углов поворота и прогиба:

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{6q}{5Gh};$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh}{6} \left(\frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x \partial y} \right] - 5 \left[\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right) = 0; \quad (4)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh}{6} \left(\frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x \partial y} \right] - 5 \left[\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right) = 0.$$

Потенциальную энергию деформации пластины для решения задачи МКЭ запишем в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy} + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y - 2qw) dx dy, \quad (5)$$

где S – площадь пластины.

Используя (1) и (2), можно получить энергию деформации в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] + \frac{Gh^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{5Gh}{6} \left[\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 2qw \right\} dx dy. \quad (6)$$

Для определения неизвестных прогиба и углов поворота к (4) и (6) необходимо добавить граничные условия на контуре пластины.

2. Методы решения задачи.

2.1. *Преобразование координат.* Метод сплайн-коллокации в использовании совместно с методом дискретной ортогонализации можно применять, только для прямоугольных областей. Поэтому для преобразования заданной четырехугольной области в прямоугольную используем новые координаты ξ, η , которые связаны с x, y выражениями [4]:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta; \quad y = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta. \quad (7)$$

Коэффициенты a_i, b_i получаем из системы 8 линейных уравнений подстановкой в (6) четырёх точек (x_i, y_i) в старой системе и четырёх (ξ_i, η_i) – в новой.

Например, если $(\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, \pm 1)$, то преобразование (6) записывают в виде

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i N_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i N_i, \quad (8)$$

где N_i – функции формы четырехугольного конечного элемента первого порядка [1]: $N_i = (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) / 4$.

Далее, выразим все производные по x, y через производные по ξ, η . Для первых производных произвольной функции f формулы перехода будут иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) / J; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) / J, \quad (9)$$

где J – якобиан преобразования (7). Используя (9), можно получить явные выражения и для вторых производных.

2.2. *Метод сплайн коллокации.* Будем отображать исходный четырехугольник на квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$, как это описано в [10] и подставим в (4) выражения для производных по x, y через производные по ξ, η . Получим уравнения такого вида:

$$L\bar{u} = 0, \quad (10)$$

где L – линейный дифференциальный оператор второго порядка в области ξ, η , а $\bar{u} = \{w, \psi_x, \psi_y\}$ – искомый вектор. Граничные условия жесткого закрепления можно записать в виде $\bar{u} = \bar{0}$. Если контур свободный и расположен параллельно оси Oy , то граничные условия имеют вид $M_x = 0; Q_x = 0; M_{xy} = 0$.

В соответствии с идеей метода сплайн-коллокации представим решение краевой задачи (10) в виде:

$$w = \sum_{i=0}^N w_i(\xi) \varphi_i(\eta); \quad \psi_x = \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(\xi) \varphi_{2i}(\eta); \quad \psi_y = \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(\xi) \varphi_{3i}(\eta), \quad (11)$$

где w_i, ψ_{xi} и ψ_{yi} – неизвестные функции координаты ξ , φ_i – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени, изначально удовлетворяющие граничным условиям на краях $\eta = \text{const}$. Подставив выражения (11) в (10) и граничные условия, требуя их удовлетворения в $N+1$ точке коллокации, получим одномерную краевую задачу, которую решим методом дискретной ортогонализации [1, 11].

2.3. *Метод конечных элементов.* Для аппроксимации решения выберем те же функции, что и для аппроксимации координат (7) и для простоты будем использовать четырехузловые конечные элементы:

$$w = \sum_{i=1}^4 w_i N_i; \quad \psi_x = \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} N_i; \quad \psi_y = \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} N_i, \quad (12)$$

где w_i, ψ_{xi} и ψ_{yi} – прогиб и полные углы поворота в узловых точках.

Подставив (12) в (5) и применив метод Ритца, т.е. продифференцировав по w_j, ψ_{xj} и ψ_{yj} , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения значений прогиба и углов поворота в узлах для элемента с площадью S_k :

$$\begin{aligned} & \iint_{S_k} \left(\frac{5}{3} Gh(\psi_{xi} N_i + w_i N_{xi}) N_{xj} + \frac{5}{3} Gh(\psi_{yi} N_i + w_i N_{yi}) N_{yj} - 2q N_j \right) dx dy = 0; \\ & \iint_{S_k} \left\{ D(\psi_{xi} N_{xi}) N_{xj} + Dv(\psi_{yi} N_{yi}) N_{xj} + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{xi} N_{yi} + \psi_{yi} N_{xi}) N_{yj} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{6} Gh(\psi_{xi} N_i + w_i N_{xi}) N_j \right\} dx dy = 0; \\ & \iint_{S_k} \left\{ D(\psi_{yi} N_{yi}) N_{yj} + Dv(\psi_{xi} N_{xi}) N_{yj} + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{xi} N_{yi} + \psi_{yi} N_{xi}) N_{xj} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{6} Gh(\psi_{yi} N_i + w_i N_{yi}) N_j \right\} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) предполагаем суммирование по парным индексам (знаки суммирования по i опущены). $N_{xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, $N_{yi} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$ определяются с помощью (9). Для вычисления

интегралов методом Гаусса в (13) необходимо также использовать преобразование (8), так как $\iint_{S_k} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) J d\xi d\eta$. Следует отметить, что (13) можно

также получить, применив метод Галеркина к (5). Отметим, что согласно (5) и (13) разрешающие уравнения метода Ритца и Галеркина в этом случае совпадают. Вычислив коэффициенты систем для всех k элементов и составив из них ансамбль, получим разрешающую систему для всей области.

3. Числовые результаты.

С использованием описанных подходов исследовано НДС пластин, общие очертания которых и распределения прогиба wE/q показаны на рис. 1 – 4. Первая пластина – квадрат со стороной 2, следующие 2 – равнобедренные трапеции, их вершины заданы так, что площадь четырехугольника остается постоянной. Для трапеции, показанной на рис. 2, основания равны 1 и 3, а на рис. 3 – 0,2 и 3,8. Координаты вершин фигур, описывающих форму срединной поверхности пластин, приведены в табл. 1.

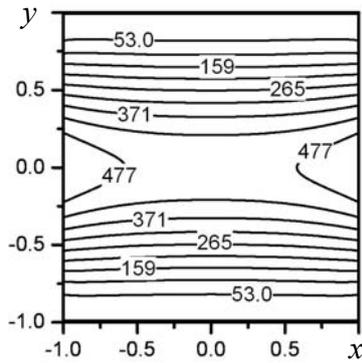


Рис. 1

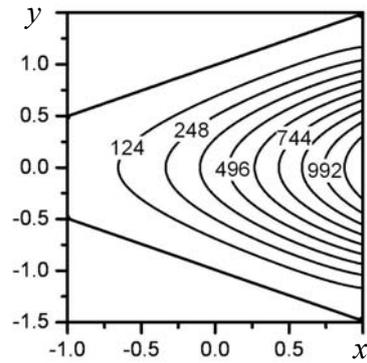


Рис. 2

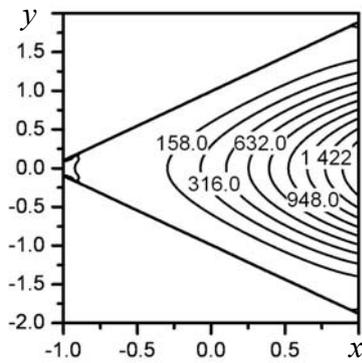


Рис. 3

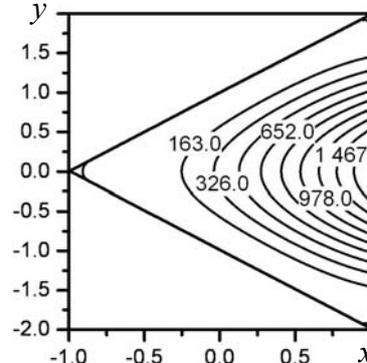


Рис. 4

Таблица 1

№ пластины	Координаты точек, задающих форму пластин							
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
2	-1	0,5	-1	-0,5	1	-1,5	1	1,5
3	-1	0,1	-1	-0,1	1	-1,9	1	1,9
4	0	1	-1	0	1	-2	1	2
5	0	1	4	0	4	4	0	4
6	0	1	4	0	4	4	0	5
7	0	1	4	0	4	4	0	3,5
8	0	1	4	0	4	4	0	4,25

Для расчетов выбраны следующие параметры: $h = 0,1$, $\nu = 0,3$. Основания трапеций – свободны, а боковые стороны – жестко закреплены. На рисунках представлены результаты, полученные методом сплайн-коллокации совместно с методом дискретной ортогонализации. При расчетах использовано 60 точек коллокации и 1500 точек интегрирования.

При использовании МКЭ квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ был разделен на элементы размера $[0; 1/200] \times [0; 1/200]$ и с помощью (7) были получены координаты узлов конечных элементов в координатах x, y . В этом случае размерность разрешающей матрицы – $3 \times 201 \times 201$, а ширина ленты – 3×203 . Таким способом удалось получить совпаде-

ние результатов (табл. 2) с методом сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации, используя для решения полученных систем линейных алгебраических уравнений обычный метод Гаусса. Сравнение максимальных значений wE/q для первых четырех пластин, которые в этом случае, очевидно, наблюдаются в точке $x = 1, y = 0$, полученных указанными двумя методами, приведено в табл. 2. Расчет прогиба трапеции, очень близкой к треугольнику, а именно с основаниями 0,02 и 3,98, с помощью первого подхода провести не удалось. С применением МКЭ эта задача была решена, при этом максимальное значение прогиба ($wE/q = 1617,7$) отличается от трапеции (пластина № 3) незначительно.

Интересно также отметить, что было определено НДС треугольника (пластина № 4) с помощью двух подходов. Для этого три точки из четырех были размещены на одной прямой, тогда четырехугольник вырождается в треугольник. В данном случае, если первая вершина имеет координаты $(-1; 0)$, то следующие вершины «четырёхугольника» (против часовой стрелки) $(-1; -2)$, $(1; 2)$ и, например, $(0; 1)$. О точности и корректности этого расчета можно судить, сравнивая значения максимумов, полученных для пластины № 3 и трапеции с основаниями 0,02 и 3,98.

Также были определены прогибы пластин 5 – 8, представленных на рис. 5 – 8, координаты вершин которых указаны в табл. 1. Первые три точки общие – для всех пластин, а четвертая смещается вдоль прямой $x = 0$. При этом сторона $x = 0$ – свободна, а остальные – жестко закреплены. Максимумы прогиба и точки, где они достигаются, полученные разными методами, представлены в табл. 3.

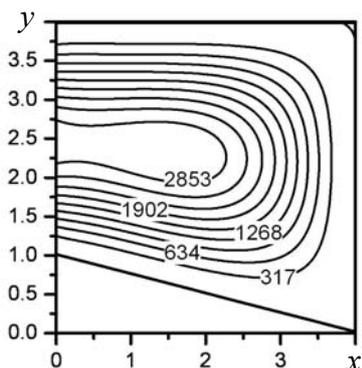


Рис. 5

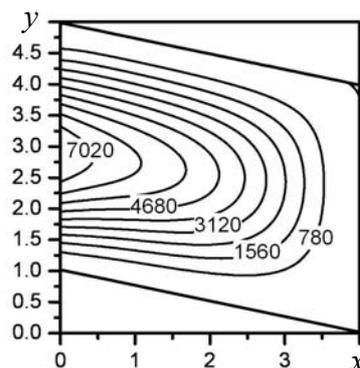


Рис. 6

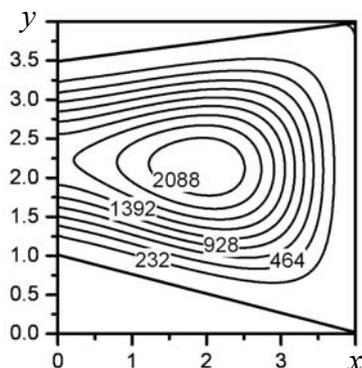


Рис. 7

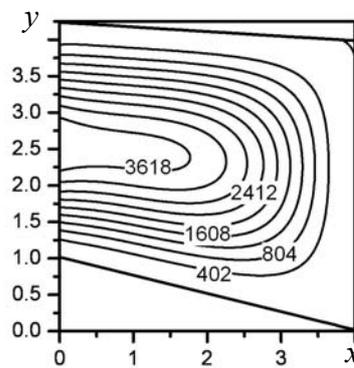


Рис. 8

Таблица 2

№ пластины	1	2	3	4
$w_{\max}E/q$, спл. колл. / ДО	529,34	1235,6	1576,7	1628,5
$w_{\max}E/q$, МКЭ	527,75	1231,6	1570,8	1622,2

Таблица 3

№ пластины	метод расчета	$w_{\max}E/q$	x	y
5	спл./ДО	3161,5	1,5226	2,3299
	МКЭ	3144,1	1,52	2,3269
6	спл./ДО	7790,9	0	2,8746
	МКЭ	7736,4	0	2,88
7	спл./ДО	2315,6	1,9413	2,1480
	МКЭ	2303,3	1,94	2,1449
8	спл./ДО	4016,4	0	2,5578
	МКЭ	3990,9	0	2,56

Из рис. 5 – 8 следует, что форма поверхности прогиба значительно зависит от формы и площади пластины при данных условиях закрепления краев. Максимальный прогиб для пластины 6 с наибольшей площадью (рис. 6) превышает прогиб в пластине 7 с наименьшей площадью (рис. 7) более, чем в три раза. На основе табл. 2 и 3 можно заключить, что относительное отличие результатов, полученных двумя методами, не превышает 1%.

Заключение.

Рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии четырехугольных пластин сложной формы. Основной особенностью исследования является сравнение решений краевой задачи, полученных с использованием различных численных подходов. Первый подход основан на использовании дискретно-континуальных методов. Он предполагает запись разрешающей системы уравнений в новых координатах на основе изменений, учитывающих геометрию пластины. При помощи сплайн-коллокации полученная двумерная краевая задача для системы уравнений в частных производных сводится к одномерной, которая, в свою очередь, решается численным методом дискретной ортогонализации. Второй (дискретный) подход основан на использовании метода конечных элементов. Проведено сравнение результатов расчетов для пластин в виде трапеций, полученных применением обоих подходов. Найденные значения перемещений согласуются с высокой точностью.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про напружено-деформований стан чотирикутних пластин складної форми. Основною особливістю дослідження є порівняння розв'язків крайової задачі, отриманих з використанням різних чисельних підходів. Перший підхід оснований на використанні дискретно-континуальних методів. Він передбачає запис розв'язувальної системи рівнянь в нових координатах на основі змін, що враховують геометрію пластины. За допомогою сплайн-колокації отримана двовимірна крайова задача для системи рівнянь з частинними похідними зводиться до одновимірної, яка, в свою чергу, розв'язується чисельним методом дискретної ортогоналізації. Другий (дискретний) підхід засновано на використанні методу скінченних елементів. Проведено порівняння результатів розрахунків для пластин у вигляді трапецій, що отримано застосуванням обох підходів. Знайдені значення переміщень узгоджуються з високою точністю.

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.

4. Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Смигирев В.Ф. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
5. Alwar R.S., Ramachandra Rao N. Nonlinear analysis of orthotropic skew plates // *AIAA J.* – 1973. – **11**, N 4. – P. 495 – 498.
6. Birman V. Plate Structures. – New York: Springer, 2011. – 298 p.
7. Blaauwendraad J. Plates and FEM. Surprises and Pitfalls. – New York: Springer, 2010. – 414 p.
8. Buragohain D.N., Patodi S.C. Large deflection analysis of skew plates by lumped triangular element formulation. // *Computers and Struct.* – 1978. – **9**. – P. 183 – 89.
9. Civalek Ö., Gürses M. Frequency Analysis of Trapezoidal Plates and Membrane Using Discrete Singular Convolution // *Asian J. of Civil Engineering (Building and Housing)*. – 2009. – **9**, N 6. – P. 593 – 605.
10. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 326 – 333.
11. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – К: Academperiodika, 2009. – 550 p.
12. Kryukov N.N. Design of Oblique and Trapezoidal Plates with the Use of Spline Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **53**, N 5. – P. 414 – 417.
13. Li W.Y., Cheung Y.K., Asce F., Tham L.G. Spline Finite Strip Analysis of General Plates // *J. Eng. Mech.* – 1986. – **112**. – P. 43 – 54.
14. Malekzadeh P., Fiouz A.R. Large deformation analysis of orthotropic skew plates with nonlinear rotationally restrained edges using DQM // *Composite Structures*. – 2007. – **80**, N 2. – P. 196 – 206.
15. Malekzadeh P., Karami G. Differential quadrature nonlinear analysis of skew composite plates based on FSDT. // *Engineering Structures*. – 2006. – **28**. – P. 1307 – 1318.
16. Mohajerani P. The Thick Orthotropic Plates Analysis Methods, Part I: A Review // *IOSR J. of Mech. and Civil Eng.* – 2015. – **12**, N 2. – Ver. III. – P. 69 – 77.
17. Paimushin V.N., Andreev S.V. Numerical Study of the Stress-Strain State of One- and Three-Layer Plates and Shells of Complex Geometry // *Soviet Appl. Mech.* – 1983. – **19**, N 7. – P. 583 – 588.
18. Shahidi A.R. et al. Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2007. – **12**. – P. 832 – 848.
19. Shufrin I. et al. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates. // *Int. J. of Mech. Sci.* – 2010. – **52**. – P. 1588 – 1596.
20. Srinivasan R.S., Ramachandran S.V. Large deflection of clamped skew plates. // *Computer Methods in Appl. Mechanics and Engineering*. – 1976. – **7**. – P. 219 – 233.

Поступила 29.01.2018

Утверждена в печать 22.05.2018