

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ  
НА КВАЗИЛЭМБОВСКИЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ  
«ПОЛУПРОСТРАНСТВО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ – УПРУГИЙ СЛОЙ»**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

**Abstract.** The problem of quasi-Lamb wave propagation in a pre-deformed elastic layer interacting with a half-space of viscous compressible fluid is considered. The study is carried out basing on the three-dimensional linearized equations of theory of elasticity of finite deformations for the elastic layer and the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for viscous compressible fluid. A problem statement and approach are used that are based on using the representations of general solutions of the linearized equations of elastic body and fluid. The dispersion equations describing propagation of quasi-Lamb waves in hydroelastic systems are obtained over wide range of frequencies. An effect of initial stresses as well as thickness of elastic layer and half-space of viscous compressible fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of quasi-Lamb modes are analyzed. An approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits of applicability of the models for wave processes, based on different versions of the theory of small initial deformations, the classical theory of elasticity and the model of ideal fluid. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

**Key words:** elastic layer, half-space of viscous compressible fluid, initial stresses, quasi-Lamb waves.

**Введение.**

Усовершенствование существующих классических материалов, создание новых композиционных и наноматериалов, а также изготовление различных деталей требуют разработки ультразвуковых неразрушающих методов, позволяющих выявлять дефекты и определять напряжения в материалах и элементах конструкций. Указанным методам посвящена обширная библиография. Среди многочисленных работ отметим лишь некоторые статьи, опубликованные сравнительно недавно [7, 8, 18, 19, 25, 26, 28 – 32, 34 – 36]. Эффективность разрабатываемых методов зависит от знания закономерностей распространения акустических волн, являющихся их основой. В связи с этим возникает необходимость изучения свойств этих волн с привлечением моделей, более полно учитывающих свойства реальных упругих и жидких сред. Одной из таких моделей является модель, основанная на линеаризованной теории гидроупругости [3 – 9, 20 – 24]. Она позволяет учесть такие факторы, как начальные напряжения в упругих телах и вязкость жидкости. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в упругих телах начальных напряжений, а в жидкости – вязкости жидкости, приведены в [3 – 17, 20 – 24, 27, 33].

В данной работе для исследования распространения квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства жидкости и упругого слоя, привлечены модели предварительно напряженного тела и вязкой сжимаемой жидкости. При этом использованы трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости [3 – 9, 20 – 24]. Предполагается, что жидкость является

ньютоновской, находится в состоянии покоя, а тепловые эффекты не учитываются. При этом в качестве подхода приняты постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линеаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и предварительно напряженного упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 20 – 24].

### §1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Ниже рассмотрены такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т. е. возмущения деформаций, значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом примем, что упругое тело находится в начальном состоянии. Заметим, что в отличие от твердых тел, соотношения которых записаны в лагранжевых координатах, равенства для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, введенных в естественном состоянии жидкости. Отметим, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуем распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому в дальнейшем не делаем различия между лагранжевыми и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

Далее предполагаем, что изотропный нелинейно-упругий слой, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем  $(-\infty < z_1 < \infty, -h \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$  и контактирует с полупространством вязкой сжимаемой жидкости  $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 < \infty, -\infty < z_3 < \infty)$ . Принимаем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при таких динамических

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0 \quad (1.1)$$

и кинематических

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (1.2)$$

граничных условиях.

В равенствах (1.1), (1.2) введены следующие обозначения:  $\tilde{Q}_i, \tilde{P}_i$  – составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

### §2. Методика решения.

Постановка задач линеаризованной теории гидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой жидкости, а также представления общих решений, предложены в работах [3 – 9, 20 – 24]. В дальнейшем исследуем волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с вязкой жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3 – 9, 20 – 24]

1) для упругого слоя из несжимаемого материала –

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[ \lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$+ \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала –

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

3) для полупространства вязкой сжимаемой жидкости –

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

1) для упругого слоя из несжимаемого материала –

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right. \\ \left. + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала –

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

3) для полупространства вязкой сжимаемой жидкости –

$$\left[ \left( 1 + \frac{4v^*}{3a_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - v^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Здесь и выше введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [3, 4, 6 – 8, 11];  $\lambda_i$  – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  ( $s_{ii}^0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0 / \lambda_i^2$ ) – начальные напряжения;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$  относительно состояния покоя;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $v^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости.

Заметим, что для упругих тел приведенные соотношения относительно возмущений являются линейными, а величины начального состояния, входящие в них, определяются из общих нелинейных уравнений. В связи с этим, несмотря на то, что основные соотношения приведены в координатах начального деформированного со-

стояния  $z_i$  и все величины отнесены к размерам тела в этом состоянии, общая постановка задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями в координатах  $z_i$  по форме аналогична формулировке линейных задач классической теории гидроупругости. Однако есть и существенные различия, которые относятся к структуре уравнений и граничных условий, входящих в нее.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн  $\chi_j = X_j(z_2) \times \exp[i(kz_1 - \omega t)]$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что принятый в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. В дальнейшем для каждой из гидроупругих систем решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1.1) и (1.2) получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиальных решений этих систем, получаем дисперсионные уравнения. Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из несжимаемого материала, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\det \left\| \theta_{lm}(c, \gamma, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, \mu, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}). \quad (2.1)$$

Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из сжимаемого материала, аналогичное уравнение будет таким:

$$\det \left\| \tilde{\theta}_{lm}(c, \gamma, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, \sigma_{ii}^0, \rho, \lambda, \mu, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (2.2)$$

где  $c$  – фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с предварительно напряженным упругим слоем;  $\gamma$  – коэффициенты затухания квазилэмбовских мод;  $h$  – толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) – скорость волны сдвига в материале ненапряженного упругого тела;  $\mu$  – модуль сдвига материала упругого тела.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Отметим, что дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) не зависят от формы упругого потенциала и получены для несжимаемых и сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Они являются наиболее общими и из них можно получить соотношения для ряда частных случаев [1, 3 – 8, 10, 11, 16, 27]. Если положить  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$  и  $\bar{\mu}^* = 0$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли – Шольте и Лэмба [1].

### §3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. *Первая* состоит из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбираем следующими: упругий слой –  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; полупространство вязкой жидкости –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,

$a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым, мягким и несжимаемым. Вторая система представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругий слой –  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) является сжимаемым и относится к разряду жестких.

Заметим, что уравнения (2.1), (2.2) выведены без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому они справедливы для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе при численном решении уравнения (2.1) для описания упругих свойств резины (несжимаемый материал) применяем потенциал Трелоара [4, 6 – 8, 11]. Для стали (жесткий материал) использован потенциал Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [4, 6 – 8, 11, 23, 26]. При рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнения (2.2) учтено то обстоятельство, что сталь, не разрушаясь, не допускает больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определены в рамках линейного акустического приближения [4, 6 – 8, 11, 26]. Результаты вычислений представлены ниже в виде графиков (рис. 1 – 15). На рис. 1 – 5 приведены графики, полученные для гидроупругой системы, состоящей из слоя резины (податливый материал) и воды. В частности, графики на рис. 1 отражают влияние вязкой жидкости на волновой процесс, где приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских волн  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$  и отсутствии начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ). При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе. Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

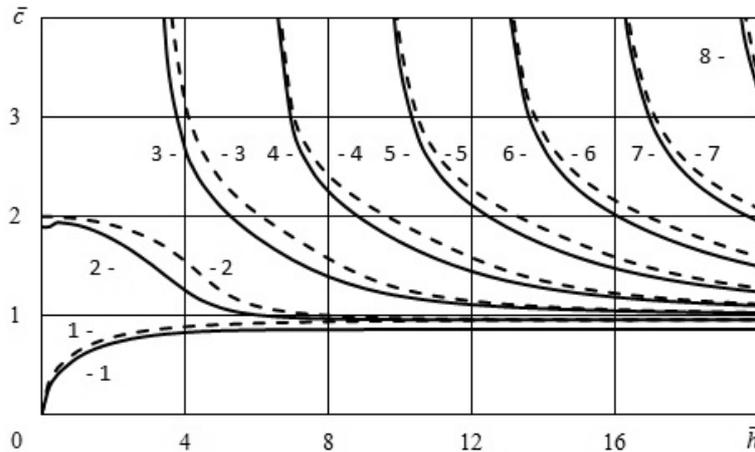


Рис. 1

Графики, представленные на рис. 2, 3, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из податливого упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). Они иллюстрируют зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 2) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 3) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной попереч-

ной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной волны 1 (рис. 1). Эти графики получены для первой нижней квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ .

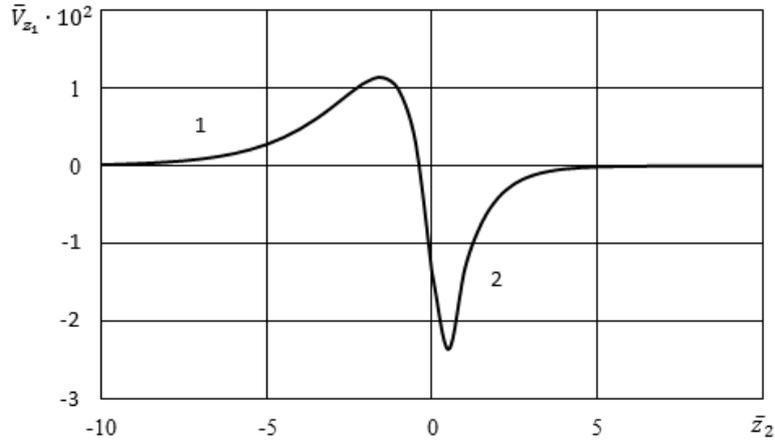


Рис. 2

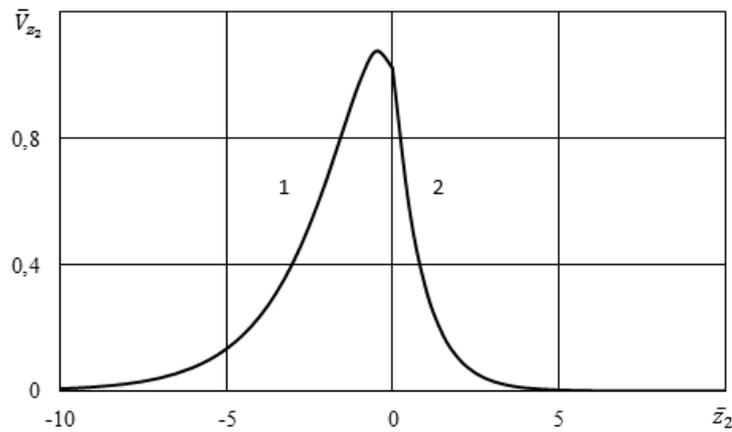


Рис. 3

Из анализа графиков рис. 1 следует, что для чисто упругого волновода (штриховые линии) скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба, распространяющихся вдоль нижней и верхней свободных поверхностей слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды — соответственно, к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху.

В гидроупругом волноводе (сплошные линии) при росте толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость первой моды, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,857938$ ). Относительно поведения этой моды в высокочастотной части спектра необходимо отметить следующее. Как следует из кинематических характеристик (рис. 2, 3), при выбранных механических параметрах системы «упругий слой (податливый материал) – вода»  $\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_R = 0,955317$  квазиповерхностная мода 1 (волна типа Стоунли) локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого тела. При этом, как видно из графиков, глубина

проникновения ее в упругий слой больше глубины проникновения в жидкость. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955317$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с увеличением толщины, как известно [1], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхностей внутрь слоя и локализуются в его толще.

Характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на скорости квазилэмбовских волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 4. На этом рисунке сплошные линии соответствуют гидроупругой системе с упругим слоем, подвергнутому начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для ненапряженного упругого слоя. Графики получены для жидкости с вязкостью  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

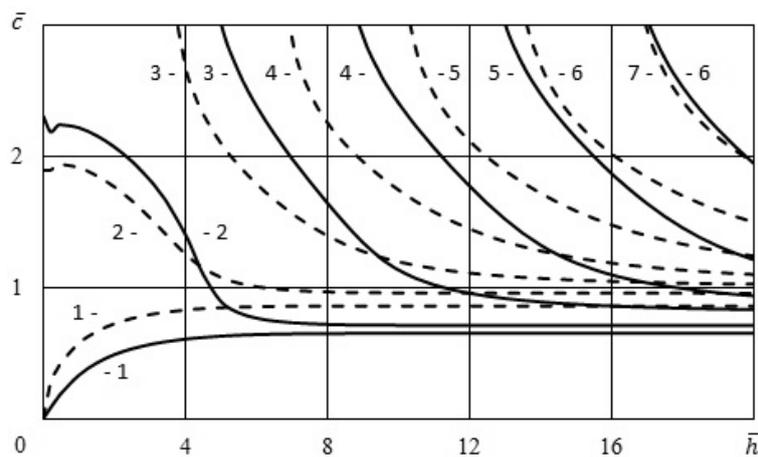


Рис. 4

Как видно из графиков для гидроупругого волновода, представленных на рис. 4, скорости первых мод (волны типа Стоунли) стремятся к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,857938$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,649541$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) снизу, а скорости вторых мод (волны типа Рэлея) – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955317$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) сверху. Из графиков, приведенных на рис. 4, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. Нетрудно видеть, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых (сплошные линии) в коротковолновую часть спектра. При этом на определенном отрезке частотного спектра происходит уменьшение количества распространяющихся квазилэмбовских мод.

На рис. 5 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На этом рисунке сплошные линии соответствуют гидроупругой системе с упругим слоем, подвергнутому начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены аналогичные кривые для ненапряженного упругого слоя.

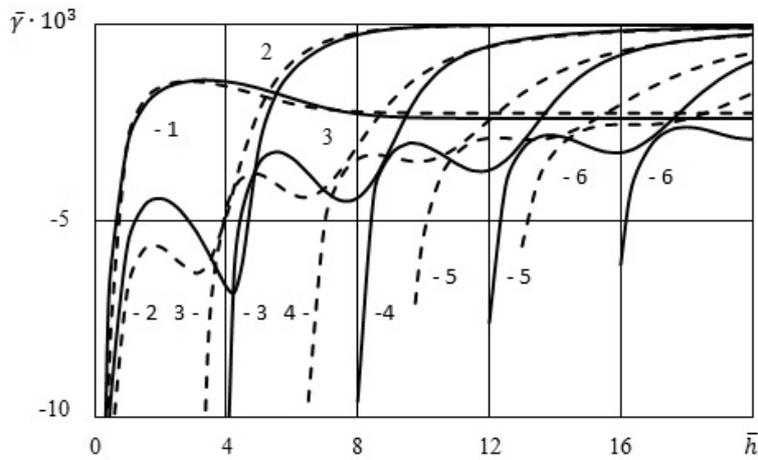


Рис. 5

Из графического материала, представленного на рис. 5, следует, что влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. С увеличением толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  воздействие вязкости на величины коэффициентов затухания  $\bar{\gamma}$  всех мод (кроме первой) уменьшается.

На рис. 6 – 15 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из упругого слоя из стали (жесткий материал) и воды.

На рис. 6 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  [4, 6 – 8, 11] при отсутствии начальных напряжений ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$ ). На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты)  $\bar{h}$ .

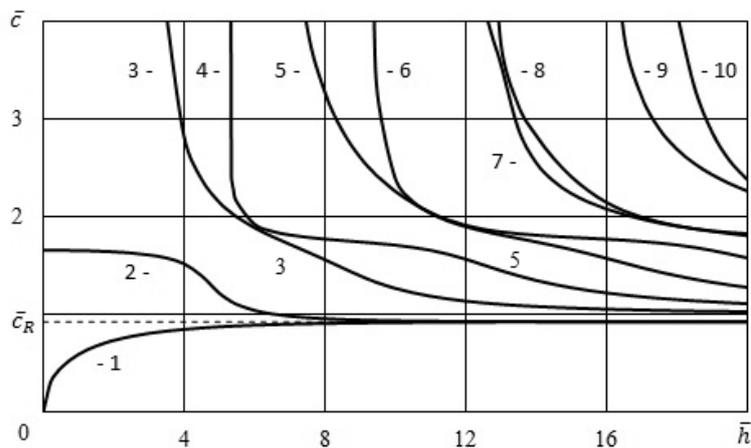


Рис. 6

Из графиков этого рисунка [1, 4, 6 – 8, 11] следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ )

сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

На рис. 7 для упругого слоя, взаимодействующего с полупространством идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ), приведен график зависимости безразмерной величины фазовой скорости существующей единственной низшей моды  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость этой моды при возрастании толщины  $\bar{h}$ .

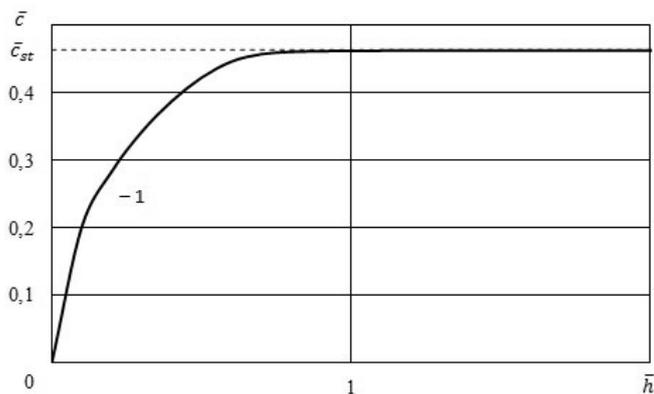


Рис. 7

Из этого графика следует, что, если между механическими параметрами компонентов гидроупругой системы выполняется условие  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923008$ ), то в упругом слое (жесткий материал), взаимодействующем с идеальным жидким полупространством, без демпфирования распространяется лишь одна низшая мода. Скорость этой квазиповерхностной волны с ростом толщины упругого слоя (частоты) стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

Влияние вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости квазилэмбовских мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 8. Они представляют зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских волн  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой, второй и третьей мод при возрастании толщины.

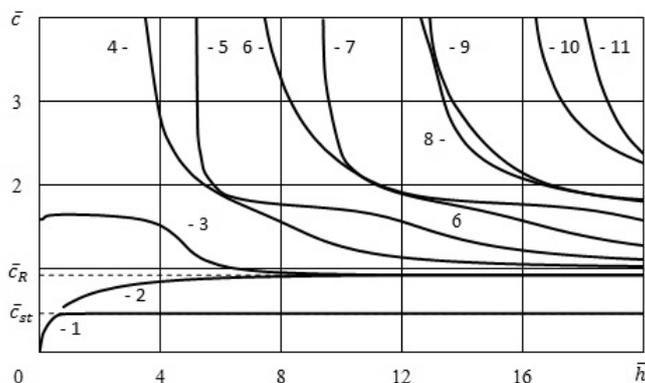


Рис. 8

Графики на рис. 9, 10 иллюстрируют распределение безразмерных амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из стального (жесткий материал) упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). Как и в предыдущем случае, они получены для первой низшей квазиповерхностной моды 1 (рис. 8) в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ .

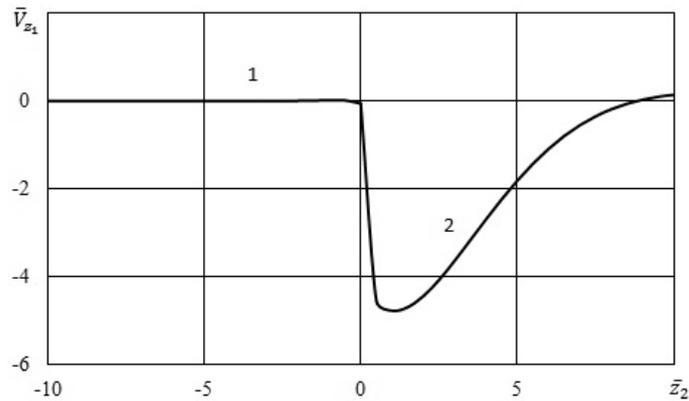


Рис. 9

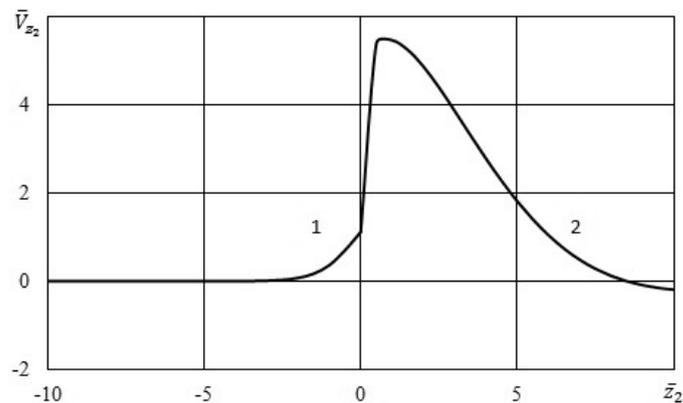


Рис. 10

Из графиков, представленных на рис. 8, следует, что в случае взаимодействия упругого слоя из жесткого материала с вязким жидким полупространством в гидроупругой системе распространяются не только низшая первая мода, но и весь спектр квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом с увеличением толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) снизу. Как уже упоминалось, в рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «сталь (жесткий материал) – вода» таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазиэрлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ). Из графиков кинематических характеристик, приведенных на рис. 9, 10, видно, что продольные смещения  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) незначительные, а поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения быстро убывают с глубиной. Для жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ), наоборот, характерна концентрация волновых движений. При этом продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и попереч-

ные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения медленно убывают с глубиной. Это свидетельствует о том, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае жесткого материала (сталь) с механическими параметрами системы  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,922506$  происходят в отличие от податливого упругого слоя, преимущественно, в жидкости, т.е. мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, преимущественно, в приконтактной области жидкого полупространства. Вследствие того, что низшая мода не проникает в твердое тело в приконтактной области упругого слоя, граничащей с жидкостью, распространяется мода 2. Скорость этой моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующего с жидкостью. Скорость моды 3, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела и, как указывалось выше, их движения локализуются в толще упругого слоя. Характерной особенностью всех мод, возникающих при взаимодействии упругого слоя с полупространством вязкой жидкости, отличающих их от системы с идеальной жидкостью, является то, что они распространяются с затуханием.

На рис. 11, 12 для гидроупругой системы «полупространство воды – упругий слой из стали (жесткий материал)» приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания  $\bar{\gamma}$  квазилэмбовских мод от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$  и отсутствии начальных напряжений ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$ ).

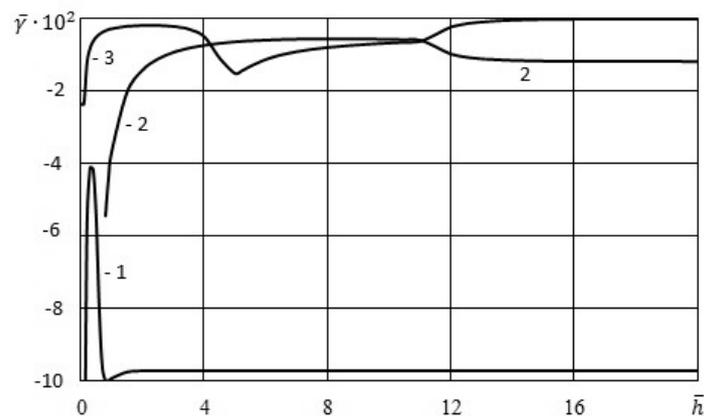


Рис. 11

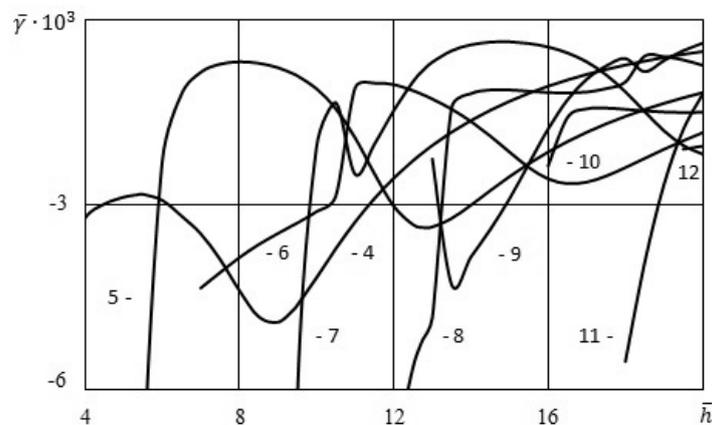


Рис. 12

Графики, приведенные на рис. 11, 12, показывают, что в этой гидроупругой системе так же, как и в случае упругого слоя из податливого материала, влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. Для всех мод (кроме первой и второй) с увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на величины их коэффициентов затухания уменьшается.

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости квазилэмбовских волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 13, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\varepsilon$  [ $c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  – фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое,  $c$  – фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций] от толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

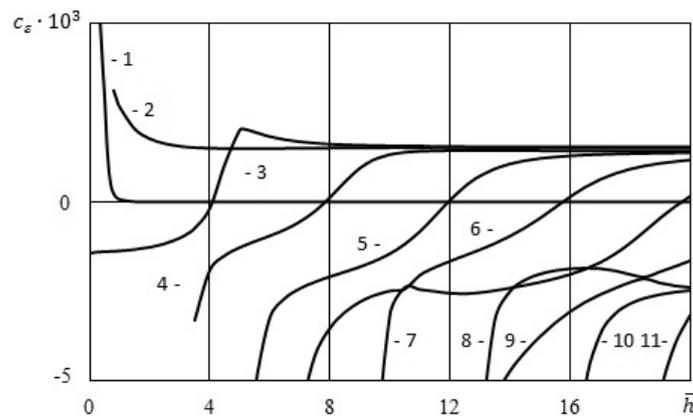


Рис. 13

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на коэффициенты затухания мод в упругом слое, взаимодействующем с полупространством вязкой жидкости, иллюстрируют графики на рис. 14 и 15, на которых представлены зависимости относительных изменений величин коэффициентов затухания мод  $\gamma_\varepsilon$  [ $\gamma_\varepsilon = (\gamma_\sigma - \gamma)/\gamma$ ,  $\gamma_\sigma$  – коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе, упругий слой которой подвержен начальным деформациям,  $\gamma$  – коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе при отсутствии начальных деформаций] от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

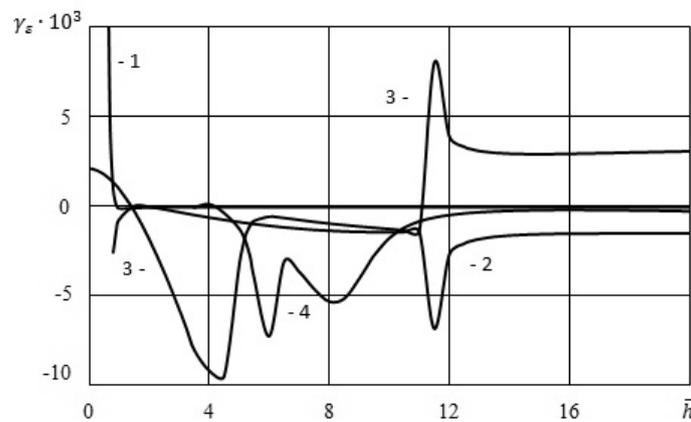


Рис. 14

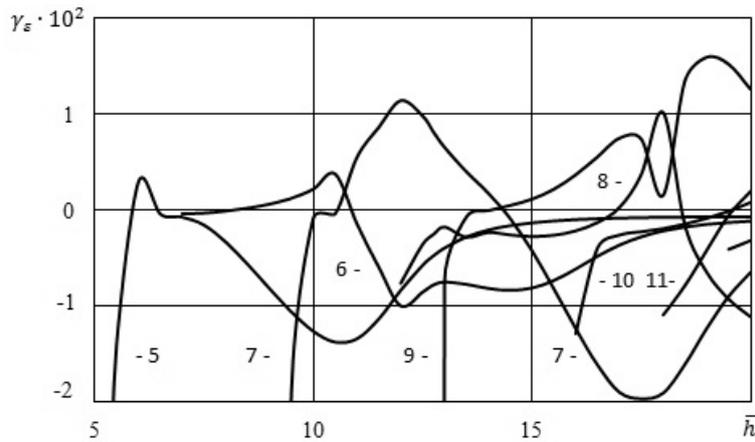


Рис. 15

Из графиков, приведенных на рис. 13 – 15, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых мод высокого порядка (начиная с третьей) в низкочастотную часть спектра. Предварительное деформирование повышает величины фазовых скоростей первой и второй мод во всем диапазоне изменения толщин упругого слоя.

#### §4. Свойства локализации низших мод в гидроупругих волноводах.

Проведенный выше анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе с упругим слоем из податливого материала при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды высокого порядка, распространяются в упругом слое (рис. 2, 3). При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы «сталь (жесткий материал) – вода» (рис. 9, 10) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазиэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ). В связи с этим согласно результатам, приведенным на рис. 9, 10, в этой упруго-жидкостной системе при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  первая мода не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы раздела сред в приконтактной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения низшей квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) и переноса волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

#### §5. Особенности влияния вязкости жидкости на дисперсию и фазовые скорости квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.

Графики, приведенные на рис. 1 – 5, 8 – 12, отражают особенности волновых движений в упругом слое, взаимодействующем с вязким жидким полупространством. Как отмечено выше, движения в модах, распространяющихся в упругом слое (начиная с третьей для податливого материала и с четвертой для жесткого материала), с возрастанием толщины упругого слоя удаляются от поверхностей и локализуются в его толще. Это является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьшению величин коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка движения в моде 1 (как для податливого материала, так и для жесткого материала) с возрастанием толщины устремляются к границе раздела сред. Моды 1 для обоих упругих слоев становятся квазиповерхностными волнами типа Стоунли. Этим объясняется характер влияния

вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении величин фазовых скоростей и увеличением коэффициентов затухания этих мод. Движения в квазиповерхностной моде 2 (волна типа Рэлея) в случае системы с упругим слоем из жесткого материала (рис. 8, 11) с ростом толщины, распространяясь в упругом слое, устремляются к поверхности раздела сред. Этим обусловлено влияние вязкости жидкости на кинематические характеристики этой моды во всем диапазоне частот. Кроме того, анализ также показывает, что в тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями, соответственно, и влияние вязкости наименьшее. Из графиков также следует, что вязкость жидкого полупространства, как отмечалось ранее, вызывает изменение критических частот мод и смещение их дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это приводит к значительному изменению фазовых скоростей мод в окрестности величин толщин, при которых они зарождаются.

Проведенные отдельно расчеты и анализ графика, представленного на рис. 7, показывают, что в случае взаимодействия упругого слоя с идеальным жидким полупространством соотношение между величиной скорости волны звука в жидкости и величиной скорости квазирэлееской волны может служить критерием, определяющим возможность существования квазилэмбовских мод высокого порядка в гидроупругой системе. Для системы с податливым упругим слоем имеет место соотношение  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ . В этом случае, как показали расчеты, жидкость не препятствует обмену волновой энергии между поверхностями податливого упругого слоя, что способствует возникновению в гидроупругой системе нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка. В случае упругого слоя из жесткого материала при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  (рис. 7) идеальная жидкость ( $\bar{\mu}^* = 0$ ) препятствует обмену волновой энергии между его поверхностями. Это приводит к тому, что в упругом слое не формируются нормальные волны высокого порядка и в гидроупругой системе не возникает полный спектр квазилэмбовских мод, распространяющихся без демпфирования. Как видим, при взаимодействии упругих слоев как из податливого (рис. 1), так и из жесткого (рис. 8) материалов с вязким жидким полупространством в гидроупругих системах при любых соотношениях между указанными механическими параметрами возникают квазилэмбовские волны высокого порядка, распространяющиеся с затуханием. При этом для стали первая мода (волна типа Стоунли, рис. 8) распространяется в приповерхностной области жидкого полупространства (рис. 9, 10), а моды высокого порядка – в упругом слое. В этом случае (рис. 8) в отличие от системы с идеальной жидкостью (рис. 7) волноводом служит не только приконтактная область жидкости, но и упругий слой.

#### **§6. Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.**

Как показано в работе [11], в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод Лэмба в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше величин фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено появление в спектре упругого волновода частот (толщин), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полугораниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [11] для сжимаемого упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью.

Из графиков, приведенных на рис. 4 для гидроупругой системы с несжимаемым упругим слоем (податливый материал), следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. Как уже отмечалось, начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу

критических частот и дисперсионных кривых (сплошные линии) в коротковолновую часть спектра. Из графиков этого рисунка также видно, что сплошные и штриховые линии, отвечающие дисперсионным кривым одноименных мод, пересекаются. Это свидетельствует о том, что для всех квазилэмбовских мод, кроме первой, существуют упругие слои определенных толщин  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ). По-видимому, эта закономерность, как уже отмечалось ранее, впервые выявленная для сжимаемых тел и описанная в работе [11], носит более общий характер и присуща частотным спектрам упругих волноводов не только из разных материалов (сжимаемые и несжимаемые), но и гидроупругим волноводам. Как ранее указывалось, в этой упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на величины фазовых скоростей всех мод.

Графики, представленные на рис. 13, позволяют заключить, что в случае взаимодействия упругого слоя из стали (жесткий материал) с вязким жидким полупространством начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя оказывает влияние на величину фазовой скорости моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом толщины упругого слоя влияние предварительных деформаций на скорость этой квазиповерхностной волны (волна типа Стоунли) ослабевает. Связано это с тем, что в данной упруго-жидкостной системе низшая мода 1, возникающая в результате взаимодействия упругого слоя с жидким полупространством, не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы раздела сред, преимущественно, в приконтактной области жидкости. Этим объясняется незначительное влияние упругого слоя и начальных напряжений на фазовую скорость, а также на дисперсию этой моды. Из графиков, приведенных на рис. 13, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Из графиков этого рисунка также видно, что дисперсионные кривые мод высокого порядка пересекают ось абсцисс. Это свидетельствует о том, что для всех квазилэмбовских мод, кроме первой и второй, в гидроупругом волноводе существуют упругие слои определенных толщин  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ).

#### **Заключение.**

В рамках трехмерных уравнений линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости даны постановка и решение задачи о распространении квазилэмбовских волн в системе «жидкое полупространство – предварительно напряженный упругий слой». С использованием представлений общих решений получены характеристические уравнения и построены дисперсионные кривые для мод в широком диапазоне частот.

Установлено, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра.

Показано, что локализация низших квазилэмбовских мод в упруго-жидкостной системе зависит от механических параметров ее компонентов и определяется соотношением между величинами скоростей волны звука в жидкости и квазирэлееской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

Анализ полученных результатов показал, что основным критерием существования нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе «идеальное жидкое полупространство – упругий слой» является соотношение между величинами скоростей волны звука в жидкости и квазирэлееской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

Особенность влияния вязкой жидкости на волновой процесс в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, состоит в том, что она в отличие от идеальной жидкости независимо от соотношения между механическими параметрами системы всегда способствует обмену волновой энергии между поверхностями упругого слоя. Это обуславливает формирование в упругом слое нормальных волн высокого порядка и возникновение в гидроупругой системе полного спектра квазилэмбовских мод, распространяющихся с демпфированием.

Установлено, что в гидроупругой системе начальное растяжение вызывает изменение конфигурации дисперсионных кривых квазилэмбовских мод и смещение их в длинноволновую часть спектра, а сжатие – наоборот, в коротковолновую часть спектра.

Для гидроупругих систем обнаружено существование упругих слоев, определенной толщины, при которых начальные деформации не влияют на фазовые скорости определенных мод.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при проведении расчетов для реальных жидких сред применение модели идеальной жидкости к гидроупругому волноводу с упругим слоем из сильно жесткого материала (металлы) может привести к получению весьма неточных не только количественных, но и качественных результатов.

Предложенный подход и полученные результаты, позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости и модели идеальной жидкости.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу про поширення квазілэмбовских хвиль у попередньо деформованому пружному шарі, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для пружного шару та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для півпростору в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійні рівняння, які описують поширення квазілэмбовских хвиль у гідропружних системах у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень, а також півпростору в'язкої стисливої рідини та товщини пружного шару на фазові швидкості та коефіцієнти згасання квазілэмбовских мод. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити границі застосування моделей, що базуються на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, класичній теорії пружності та моделі ідеальної рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // *Акуст. журн.* – 1988. – 34, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Гузь А.Н., Багно А.М.* Влияние начальных напряжений на скорости волн в предварительно деформированном сжимаемом слое, контактирующим с жидким полупространством // *Докл. Акад. наук.* – 1993. – 329, № 6. – С. 715 – 717.
11. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.

12. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
13. Babich S. Yu., Guz A. N., Zhuk A. P. Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 4. – P. 277 – 291.
14. Bagno A.M. Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 133 – 139.
15. Bagno A.M. Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 139 – 148.
16. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
17. Bagno A.M., Guz A.N. Effect of Prestresses on the Dispersion of Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 333 – 341.
18. Drinkwater B.W., Wilcox P.D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT & E Int. – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
19. Gibson A., Popovics J. Lamb wave basis for impact-echo method analysis // J. Engineering Mechanics. – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
20. Guz A. N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
21. Guz A.N. Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
22. Guz A.N. The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
23. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
24. Guz A.N. Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
25. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
26. Guz A. N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
27. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
28. Jhang K.Y. Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing. – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
29. Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // Smart Materials and Structures. – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
30. Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H. Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // Int. J. of Plasticity. – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
31. Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K. Ultrasonic Lamb wave tomography // Inverse Problems. – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
32. Liu L., Ju Y. A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // NDT & E Int. – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
33. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
34. Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C. V. Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (A<sub>0</sub>) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // Smart Materials and Structures. – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
35. Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // Materials & Design. – 2012. – **35**. – P. 572 – 588.
36. Spies M. Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // Ultrasonics. – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 15.06.2016

Утверждена в печать 22.05.2018