

Н. П. Семенюк<sup>1</sup>, В. М. Трач<sup>2</sup>, А. В. Подворный<sup>3</sup>

**УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ  
ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВЫХ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗОК  
В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ**

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: mikolasem@ukr.net*

<sup>2</sup>*Warsaw University of Life Sciences,  
ul. Nowoursynowska 166, 02-787, Warszawa, Polska; e-mail: trach-vm@ukr.net*

<sup>3</sup>*Национальный университет водного хозяйства и природопользования,  
ул. Соборная, 11, 33028, Ровно, Украина; e-mail: andrei\_podvornyi@ukr.net*

**Abstract.** An approach is developed to solving the problems on the stress-strain state and stability of the layered cylindrical anisotropic shells in a three-dimensional statement. An anisotropy under consideration is characterized by a single plane of elastic symmetry. A numerical realization of the proposed approach is obtained by a combination of Bubnov – Galerkin method, discrete Fourier transform and discrete orthogonalization method. The obtained numerical results agrees good with the known solutions of the simpler problems. A new problem on stability for the three-layered shell is solved.

**Key words:** stress-strain state, stability, anisotropic shells, Bubnov – Galerkin method, discrete Fourier transform method, discrete orthogonalization method, three-dimensional formulation.

**Введение.**

Задачи устойчивости оболочек из композитов в большинстве случаев решаются на основе двумерных классических или уточненных теорий. Теории, представленные в [2, 4, 7, 10, 11, 20], как правило, не учитывают низкую сдвиговую жесткость и неоднородность по толщине, присущую конструкциям, изготовленным из композитных материалов. Уточненные же теории, основанные на использовании соответствующих гипотез [1, 3, 23, 224], позволяют лишь в некоторой мере эти особенности учитывать. Кроме того, геометрические параметры нового класса оболочек не всегда удовлетворяют условиям применимости не только классического, но и уточненного вариантов теории оболочек. В связи с этим, представляется целесообразным и актуальным проведение исследований устойчивости композитных элементов оболочечных конструкций в пространственной постановке [8, 9].

Однако, в большинстве работ [5, 6, 8, 9, 12], посвященных развитию трехмерных подходов к решению задач прочности и устойчивости оболочечных конструкций, основное внимание сосредоточено на ортотропных оболочках. Это существенно ограничивает класс анизотропии композиционных материалов, образующихся при изготовлении оболочек. Необходимо усовершенствование методов решения задач устойчивости на основании уравнений теории упругости. Полученные при помощи трехмерного подхода решения таких задач могут быть использованы также при оптимизации структуры из пространственно-армированных композитов.

Расчет докритического напряженно-деформированного состояния толстостенных анизотропных композитных оболочек является наименее исследованным из-за слож-

ности построения методов расчетов таких трехмерных систем. Во многих из перечисленных в этой работе трехмерных подходов к решению задачи устойчивости докритического напряженного состояния учитывалось, как правило, с помощью методики, предложенной в монографии [13].

В данной работе развит подход к решению задачи устойчивости цилиндрических анизотропных оболочек в трехмерной постановке на основе нелинейных соотношений теории упругости анизотропного тела, представленных в работе [15]. Они используются при вычислении параметров докритического деформирования и при определении критических напряжений. Решение задачи о докритическом напряженно-деформированном состоянии основано на использовании метода прямых. Задача устойчивости решена с помощью сочетания методов дискретной ортогонализации [7, 16], конечных разностей, Бубнова – Галеркина и дискретного преобразования Фурье [17]. В работе исследована устойчивость толстостенных цилиндрических анизотропных оболочек из материала с одной плоскостью упругой симметрии под действием осевых сжимающих нагрузок.

### §1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим упругие анизотропные композитные оболочки, отнесенные к цилиндрической системе координат  $(r, z, \theta)$ ; ( $r$  и  $\theta$  являются полярными координатами кругового поперечного сечения цилиндра,  $z$  – нормальная к этому сечению ось, начало которой совпадает с центром одного из торцов оболочки). Материал оболочек имеет одну плоскость упругой симметрии. Ниже учитывается, что такая анизотропия обусловлена несовпадением главных направлений упругости исходного ортотропного материала с геометрическими осями цилиндра (рис. 1). Геометрия цилиндра определяется длиной его образующей  $L$ , а также радиусами внутренней  $r_1$  и внешней  $r_2$  поверхностей. Оболочка нагружена осевыми сжимающими напряжениями.

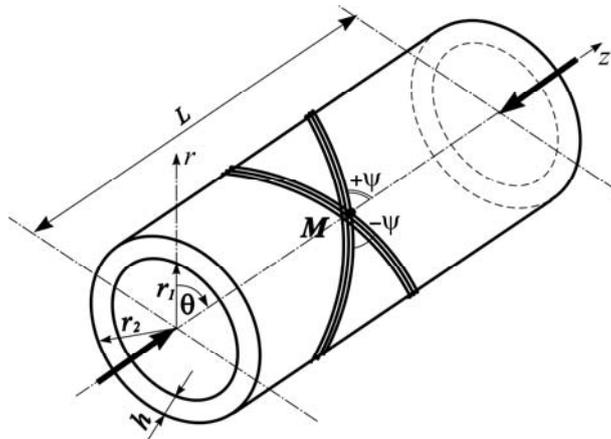


Рис. 1

В нелинейной теории упругости [15] условия равновесия элемента при использовании цилиндрической системы координат сводятся к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{\theta r}) - \hat{\sigma}_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\tau}_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\sigma}_{zz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{\theta z}) + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\tau}_{r\theta} + \hat{\tau}_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\sigma}_{\theta\theta}) + r F_\theta \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $F_r, F_z, F_\theta$  – проекции вектора удельных объемных сил на направления касательных к координатным линиям  $r, z, \theta$ . Компоненты тензора напряжений  $\hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{z\theta}, \hat{\sigma}_{zr}, \hat{\sigma}_{\theta z}, \hat{\sigma}_{\theta\theta}, \hat{\sigma}_{\theta r}, \hat{\sigma}_{rz}, \hat{\sigma}_{r\theta}, \hat{\sigma}_{rr}$  – суть их проекции на оси принятой криволинейной системы координат до деформации [15]:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{zz} &= (1 + e_{zz})\sigma_{zz} + \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} - \omega_r\right)\tau_{z\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{zr} + \omega_\theta\right)\tau_{zr}; \\
\hat{\sigma}_{z\theta} &= \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} + \omega_z\right)\sigma_{zz} + (1 + e_{\theta\theta})\tau_{z\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} - \omega_z\right)\tau_{zr}; \\
\hat{\sigma}_{zr} &= \left(\frac{1}{2}e_{zr} - \omega_\theta\right)\sigma_{zz} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} + \omega_z\right)\tau_{z\theta} + (1 + e_{rr})\tau_{zr}; \\
\hat{\sigma}_{\theta z} &= (1 + e_{zz})\tau_{z\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} - \omega_r\right)\sigma_{\theta\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{zr} + \omega_\theta\right)\tau_{\theta r}; \\
\hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} + \omega_z\right)\tau_{z\theta} + (1 + e_{\theta\theta})\sigma_{\theta\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} - \omega_z\right)\tau_{\theta r}; \\
\hat{\sigma}_{\theta r} &= \left(\frac{1}{2}e_{zr} - \omega_\theta\right)\tau_{z\theta} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} + \omega_z\right)\sigma_{\theta\theta} + (1 + e_{rr})\tau_{\theta r}; \\
\hat{\sigma}_{rz} &= (1 + e_{zz})\tau_{zr} + \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} - \omega_r\right)\tau_{\theta r} + \left(\frac{1}{2}e_{zr} + \omega_\theta\right)\sigma_{rr}; \\
\hat{\sigma}_{r\theta} &= \left(\frac{1}{2}e_{z\theta} + \omega_z\right)\tau_{zr} + (1 + e_{\theta\theta})\tau_{\theta r} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} - \omega_z\right)\sigma_{rr}; \\
\hat{\sigma}_{rr} &= \left(\frac{1}{2}e_{zr} - \omega_\theta\right)\tau_{zr} + \left(\frac{1}{2}e_{\theta r} + \omega_z\right)\tau_{\theta r} + (1 + e_{rr})\sigma_{rr}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Компоненты деформации и углы поворота бесконечно малого объемного элемента оболочки выражаются через перемещения с помощью следующих зависимостей [15]:

$$\begin{aligned}
e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r; \quad e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
e_{z\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\
\omega_z &= \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2r} u_\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \omega_r = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь  $u_z, u_\theta, u_r$  – перемещения точек цилиндра в направлениях осей  $z, \theta, r$ , соответственно.

Соотношения обобщенного закона Гука [13], которые связывают компоненты деформаций и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
e_{zz} &= a_{11}\sigma_{zz} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + a_{13}\sigma_{rr} + a_{14}\tau_{r\theta} + a_{15}\tau_{rz} + a_{16}\tau_{z\theta}; \\
e_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{zz} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + a_{23}\sigma_{rr} + a_{24}\tau_{r\theta} + a_{25}\tau_{rz} + a_{26}\tau_{z\theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= a_{13}\sigma_{zz} + a_{23}\sigma_{\theta\theta} + a_{33}\sigma_{rr} + a_{34}\tau_{r\theta} + a_{35}\tau_{rz} + a_{36}\tau_{z\theta}; \\
e_{r\theta} &= a_{14}\sigma_{zz} + a_{24}\sigma_{\theta\theta} + a_{34}\sigma_{rr} + a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz} + a_{46}\tau_{z\theta}; \\
e_{rz} &= a_{15}\sigma_{zz} + a_{25}\sigma_{\theta\theta} + a_{35}\sigma_{rr} + a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz} + a_{56}\tau_{z\theta}; \\
e_{z\theta} &= a_{16}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{\theta\theta} + a_{36}\sigma_{rr} + a_{46}\tau_{r\theta} + a_{56}\tau_{rz} + a_{66}\tau_{z\theta},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,6}$ ) – механические константы материала. В случае поворота главных направлений упругости изначально ортотропного материала относительно оси  $z$  получаем соотношения для оболочечной конструкции, степень анизотропии материала которой характеризуется одной плоскостью упругой симметрии и, соответственно,  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 4, 5$ ),  $a_{46}$ ,  $a_{56}$  в (1.4) равны нулю.

Связь между механическими константами материала, имеющего одну плоскость упругой симметрии, и константами материала, оси ортотропии, которые совпадают с координатными, принимаем согласно [13].

## §2. Методика решения задачи.

Соотношения обобщенного закона Гука, для материалов с одной плоскостью упругой симметрии (1.4), запишем в обратном виде, который используем для решения системы (1.1):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= b_{11}e_{zz} + b_{12}e_{\theta\theta} + b_{16}e_{z\theta} + c_1\sigma_{rr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = b_{12}e_{zz} + b_{22}e_{\theta\theta} + b_{26}e_{z\theta} + c_2\sigma_{rr}; \\
\tau_{z\theta} &= b_{16}e_{zz} + b_{26}e_{\theta\theta} + b_{66}e_{z\theta} + c_3\sigma_{rr}; \quad e_{rr} = -c_1e_{zz} - c_2e_{\theta\theta} - c_3e_{z\theta} + c_4\sigma_{rr}; \\
e_{rz} &= a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz}; \quad e_{r\theta} = a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ),  $c_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) – характеристики, которые определяются с использованием механических констант  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,3,6}$ ) материала оболочки [5].

**2.1. Исследование докритического напряженно-деформированного состояния.** Для решения задачи о докритическом осесимметричном напряженно-деформированном состоянии (НДС) цилиндрических слоистых анизотропных оболочек используем линеаризованные уравнения равновесия (1.1) и соотношения (1.2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}) - \sigma_{\theta\theta} + rF_r \right]; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) + rF_z \right]; \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta} + \tau_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}) + rF_\theta \right].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Разрешающую систему уравнений, описывающую докритическое осесимметричное деформирование оболочек вращения из анизотропных материалов с одной плоскостью упругой симметрии, получим, используя систему (2.2) с учетом зависимостей (1.3) и (2.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - F_r; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - F_z; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{2}{r} \tau_{r\theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - F_\theta;
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = a_{55} \tau_{rz} + a_{45} \tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = a_{45} \tau_{rz} + a_{44} \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} u_\theta.$$

Решение системы (2.3) получим, используя граничные условия:

– на внутренней ( $r = r_1$ ) и внешней ( $r = r_2$ ) поверхностях оболочки

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \quad (2.4)$$

– на торцах

$$\sigma_{zz} = \sigma'_{zz}, \quad u_r = u_\theta = 0, \quad (2.5)$$

что соответствует наличию на торцах конструкции диафрагмы, абсолютно жесткой в своей плоскости и гибкой из нее [5].

Одним из подходов, который позволяет решить систему (2.3) и определить компоненты НДС оболочек, является метод прямых [6, 7]. В соответствии с ним двумерную систему неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных (2.3) приведем к одномерной системе обычных дифференциальных уравнений путем замены производных по координате  $z$  разностными соотношениями. Для этого разбиваем интервал изменения производных по координате  $z$  на  $n-1$  равных отрезков при помощи  $n$  равноотстоящих точек, т.е.

$$\frac{\partial x(r, z_i)}{\partial z} \approx \frac{1}{2(z_{i+1} - z_i)} (x(r, z_{i+1}) - x(r, z_{i-1}));$$

$$\frac{\partial^2 x(r, z_i)}{\partial z^2} \approx \frac{1}{(z_{i+1} - z_i)^2} (x(r, z_{i+1}) - 2x(r, z_i) + x(r, z_{i-1})). \quad (2.6)$$

Здесь  $x$  – компоненты НДС (2.3);  $i = n$  – количество равноотстоящих точек, которыми разбивается оболочка вдоль образующей.

Таким образом, решение поставленной задачи о НДС толстостенного цилиндра сводится к определению неизвестных  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_\theta$  в каждой точке. А соотношения (2.3) превращаются в систему порядка  $6n$  обыкновенных дифференциальных уравнений относительно производной по координате  $r$ , т.е. имеем запись в краткой форме

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r) \bar{y}, \quad (2.7)$$

где принято  $\bar{y} = \{ \sigma_{rr}^1; \tau_{rz}^1; \tau_{r\theta}^1; u_r^1; u_z^1; u_\theta^1; \dots; \sigma_{rr}^{n-1}; \tau_{rz}^{n-1}; \tau_{r\theta}^{n-1}; u_r^{n-1}; u_z^{n-1}; u_\theta^{n-1}; \sigma_{rr}^n; \tau_{rz}^n; \tau_{r\theta}^n; u_r^n; u_z^n; u_\theta^n \}$ ,

с граничными условиями (2.4),  $T(r)$  – матрица коэффициентов при неизвестных компонентах напряжений и перемещений.

Решение системы уравнений (2.7) получим с использованием численного метода дискретной ортогонализации [7, 16, 17].

После решения системы (2.7) докритические значения напряжений  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^0$  и  $\tau_{z\theta}^0$  определяются в соответствии с законом Гука (2.1) при использовании соотношений (1.3)

$$\sigma_{zz}^0 = b_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{12}}{r} u_r + b_{16} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + c_1 \sigma_{rr};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = b_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r} u_r + b_{26} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + c_2 \sigma_{rr}; \quad (2.8)$$

$$\tau_{z\theta}^0 = b_{16} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r} u_r + b_{66} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + c_3 \sigma_{rr},$$

где производные по координате  $z$  заменяются разностными соотношениями метода прямых.

Тестирование результатов достоверности определения докритического НДС проведем на примере цилиндрических анизотропных оболочек [13], материал которых имеет свойства анизотропного.

Рассмотрим однослойные анизотропные цилиндрические оболочки со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками: длина образующей  $L = 1,2$  м; радиус внутренней поверхности  $r_1 = 0,57$  м, а внешней –  $r_2 = 0,63$  м. Модули упругости –  $E_{11} = 445 E_0$ ,  $E_{22} = 107 E_0$ ,  $E_{33} = 107 E_0$  и сдвига –  $G_{12} = G_{13} = 41,8 E_0$ ,  $G_{23} = 84,8 E_0$ , где  $E_0 = 1,0 \cdot 10^2$  МПа, а также коэффициенты Пуассона:  $\nu_{21} = 0,26$ ,  $\nu_{12} = 0,0628$ ,  $\nu_{32} = 0,2$ ,  $\nu_{31} = 0,26$ .

К торцам оболочки приложены осевые сжимающие напряжения  $\sigma'_{zz} = 100$  МПа. Результаты сопоставления значений напряженного состояния в точках по длине образующей цилиндра для поверхностей с радиусами  $r_1 = 0,57$  м,  $r_0 = 0,60$  м и  $r_2 = 0,63$  м представлены в табл. 1 и 2 для главных направлений упругости материала, повернутых на угол  $\psi = 40^\circ$ . В табл. 1 показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_{zz}$  [МПа]; табл. 2 описывает распределение касательных напряжений  $\tau_{z\theta}$  [МПа]. Причем, последняя колонка в обеих таблицах представляет значения напряжений  $\sigma_{zz}$  и  $\tau_{z\theta}$ , при их определенных с помощью методики [13], где напряженное состояние при осевом сжатии принято неизменным вдоль образующей.

Таблица 1

Координата $r$	Предлагаемый подход							Лехницкий [13] $\sigma_{zz}$ [МПа]
	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	
	Напряжения $\sigma_{zz}$ [МПа]							
0,57м	100,00	133,48	-130,35	-116,86	-105,17	-98,42	-96,22	-93,10
0,60м	100,00	-100,55	-100,29	-100,18	-100,08	-100,01	-100,00	-100,00
0,63м	100,00	-66,61	-70,31	-83,47	-94,85	-101,50	-103,53	-106,91

Таблица 2

Координата $r$	Предлагаемый подход							Лехницкий [13] $\tau_{z\theta}$ [МПа]
	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	
	Напряжения $\tau_{z\theta}$ [МПа]							
0,57м	39,31	48,76	47,74	42,04	36,96	33,99	33,02	31,05
0,60м	36,16	35,49	35,35	35,25	35,15	35,07	35,05	33,97
0,63м	32,81	21,72	23,05	28,44	33,23	36,02	36,92	36,88

Анализируя представленные в табл. 1 и 2 результаты расчетов, следует отметить существенное различие как между осевыми нормальными  $\sigma_{zz}$ , так и касательными  $\tau_{z\theta}$  напряжениями, вычисленными на внешней и внутренней поверхностях цилиндрической оболочки. При этом посредине образующей при  $L = 0,6$  м отклонение этих напряжений не превышает 6% по сравнению с данными работы [13]. Отметим, что на срединной поверхности цилиндрической оболочки значения напряжений, полученные с использованием предложенного подхода, практически совпадают с такими, которые вычислены в соответствии с методикой [13], в частности, для  $\sigma_{zz}$ . Однако, основной вывод, который следует из анализа представленных в табл. 1 и 2 результатов, состоит в следующем. Так как нормальные  $\sigma_{zz}$  и касательные  $\tau_{z\theta}$  напряжения изменяются

вдоль образующей цилиндра, то, очевидно, что это различие в методиках, предложенной в [13], которая дает неизменяемые величины критических напряжений вдоль образующей цилиндра, и предлагаемой в данной работе, необходимо будет учитывать при решении задач устойчивости анизотропных цилиндрических оболочек.

**2.2 Решение задачи устойчивости.** Линеаризованную систему (1.1) представим в таком виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{rz} + \sigma_{zz}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) - \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right]; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \right]; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta} + \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right], \quad (2.9)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^0$  и  $\tau_{z\theta}^0$  – докритические значения напряжений (2.8).

Заменяя в (2.9) напряжения  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  их выражениями (2.1) с учетом (1.3) и, используя соотношения для деформации  $e_{rz}$ ,  $e_{r\theta}$ ,  $e_{rr}$  (1.3), получаем систему уравнений устойчивости для анизотропных цилиндрических оболочек:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = & \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \\
& - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = & -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \\
& - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = & -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \\
& - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} = & c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} = & a_{55} \tau_{rz} + a_{45} \tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = a_{45} \tau_{rz} + a_{44} \tau_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Для решения полученной трехмерной задачи воспользуемся процедурой метода Бубнова – Галеркина. В соответствии с нею, разложим все разрешающие функции в двойные тригонометрические ряды Фурье по координате вдоль образующей цилиндра  $z$  так, чтобы они удовлетворяли краевым условиям (2.5) (при этом учтена периодичность функций по окружной координате  $\theta$ ):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
\tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
\tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где  $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) – коэффициенты разложения;  $p, m$  – волновые числа в рядах Фурье;  $l_m = m\pi / L$ ,  $L$  – длина образующей цилиндра.

Чтобы учесть переменность напряжений по длине оболочки, воспользуемся операцией дискретного преобразования Фурье. В соответствии с ней представим распределение вдоль оси  $z$  значений  $\sigma_{zz}^0, \sigma_{\theta\theta}^0$  и  $\tau_{z\theta}^0$ , полученных с использованием метода прямых, в виде рядов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^0(z) &= \frac{a_0^{\sigma_{zz}^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{zz}^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{zz}^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z; \\
\sigma_{\theta\theta}^0(z) &= \frac{a_0^{\sigma_{\theta\theta}^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{\theta\theta}^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{\theta\theta}^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z; \\
\tau_{z\theta}^0(z) &= \frac{a_0^{\tau_{z\theta}^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{z\theta}^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{z\theta}^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{ed}} z,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где введены следующие обозначения:  $i$  – количество членов ряда  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $n = (N+1)/2$ ;  $N$  – количество равноотстоящих точек, которыми разбивается оболочка вдоль образующей цилиндра при решении задачи о докритическом НДС;  $z_{ed}, z$  – соответственно, расстояние между этими точками и их координаты в цилиндрической системе координат (рис. 1);  $a_0^{\sigma_{zz}^0}, a_0^{\sigma_{\theta\theta}^0}, a_0^{\tau_{z\theta}^0}, a_i^{\sigma_{zz}^0}, a_i^{\sigma_{\theta\theta}^0}, a_i^{\tau_{z\theta}^0}, b_i^{\sigma_{zz}^0}, b_i^{\sigma_{\theta\theta}^0}, b_i^{\tau_{z\theta}^0}$  – коэффициенты тригонометрических рядов Фурье, в которые раскладываются соответствующие компоненты напряженного состояния  $\sigma_{zz, j}^0, \sigma_{\theta\theta, j}^0, \tau_{z\theta, j}^0$ .

После некоторых математических преобразований и разделения переменных в уравнениях (2.10) с учетом (2.12) при помощи соотношений (2.11), получим бесконечную систему однородных дифференциальных уравнений устойчивости в нормальной форме Коши

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r)\bar{y}, \quad T(r) = t_{i,j}(r), \quad (2.13)$$

где  $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$  – разрешающая вектор-функция. Ненулевые элементы матрицы  $T(r)$  соответствуют представленным в работах [19, 21].

Решение полученной системы уравнений устойчивости (2.13) при граничных условиях (2.4) проводится с использованием численного метода дискретной ортогонализации [7]. Алгоритм решения задачи устойчивости анизотропных оболочек вращения, которые находятся под действием осевых сжимающих нагрузок, реализован в виде пакетов прикладных программ для персонального компьютера.

### §3. Численные результаты и их анализ.

Тестирование результатов решения задачи устойчивости цилиндрических оболочек из ортотропных материалов проведено на основе сравнения с приведенными в [9]. Рассмотрена оболочка с радиусом срединной поверхности  $r_0 = 0,60$  м, длиной  $L = 2,15$  м, физико-механическими характеристиками материала:  $E_z = 10E_0$ ,  $E_\theta = 2,8E_0$ ,  $E_r = 10E_0$ ,  $G_{z\theta} = 1,075E_0$ ,  $G_{zr} = G_{\theta r} = 2E_0$ ,  $\nu_{z\theta} = 0,3$ ,  $\nu_{z0} = 0,084$ ,  $\nu_{r\theta} = 0,22$ ,  $\nu_{rz} = 0,35$ ,  $E_0 = 1,0 \cdot 10^6$  МПа. Анализ представленных в табл. 3 результатов расчета показывает, что величины критических напряжений и соответствующее им число волн в окружном направлении  $n$  практически соответствуют данным работы [9]; отличие не превышает более 2,2%.

Таблица 3

Толщина оболочки	Результаты расчетов по методике [9]		Результаты расчета по предлагаемой методике		$\Delta$ , %
	Количество волн в окружном направлении, $n$	Критическое значение $\sigma_{zz}^{cr}$ , МПа	Количество волн в окружном направлении, $n$	Критическое значение $\sigma_{zz}^{cr}$ , МПа	
$h = 0,012$ м	6	$4,00 \cdot 10^4$	6	$3,93 \cdot 10^4$	1,8
$h = 0,02$ м	5	$6,50 \cdot 10^4$	5	$6,38 \cdot 10^4$	1,9
$h = 0,025$ м	4	$8,00 \cdot 10^4$	4	$7,83 \cdot 10^4$	2,2

Также результаты расчета на устойчивость по предлагаемой методике были сопоставлены с данными, приведенными в работе [22]. При осевом сжатии исследована устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки с такими геометрическими и механическими характеристиками:  $L/r_2 = 5$ ,  $E_z = 14$  МПа,  $E_\theta = 57$  МПа,  $E_r = 14$  МПа,  $G_{z\theta} = 5,7$  МПа,  $G_{zr} = 5$  МПа,  $G_{\theta r} = 5,7$  МПа,  $\nu_{z\theta} = 0,068$ ,  $\nu_{z0} = 0,277$ ,  $\nu_{r\theta} = 0,068$ ,  $\nu_{rz} = 0,4$ . Приведенное значение критической осевой сжимающей силы определено по формуле  $\hat{P} = \{P/[\pi(r_2 - r_1)]\} \cdot [r_2 / (E_{11}h)]$ , где  $h$  – толщина оболочки. Результаты расчета представлены в табл. 4.

Таблица 4

$r_2 / r_1$	Результаты расчетов по методике [19]		Результаты расчетов по предлагаемой методике		$\Delta$ , %
	Количество волн в окружном направлении, $n$	Критическое значение $\hat{P}_{cr}$	Количество волн в окружном направлении, $n$	Критическое значение $\hat{P}_{cr}$	
1,05	2	0,6764	2	0,6427	5,2
1,10	2	0,6641	2	0,6129	8,4
1,15	2	0,6284	2	0,5614	11,9
1,20	2	0,6134	2	0,5435	12,9
1,25	1	0,5186	1	0,5135	1,0
1,30	1	0,4429	1	0,4571	3,1

Сравнение результатов, представленных в табл. 4, указывает на удовлетворительное совпадение величин критических нагрузок по сравнению с данными, которые приведены в работе [18], т.к. их максимальное отличие не превышает 13%.

Исследуем влияние толщины анизотропной оболочки на величины критических нагрузок. Для этого рассмотрим устойчивость цилиндрических оболочек (толщиной):  $h=0,03; 0,04$  м, длиной образующей  $L = 1,2$  м и радиусом срединной поверхности  $r_0 = 0,60$  м, которые образованы армированием композита под углами  $\psi$  к оси  $z$ . В качестве композитного материала выбран стеклопластик со следующими физико-механическими характеристиками:  $E_{11}= 445E_0$ ,  $E_{22} = 107E_0$ ,  $E_{33} = 107E_0$ ,  $G_{12} = G_{13} = 41,8E_0$ ,  $G_{23}= 84,8E_0$ ,  $\nu_{21} = 0,26$ ,  $\nu_{12} = 0,0628$ ,  $\nu_{32} = 0,2$ ,  $\nu_{31} = 0,26$ ,  $E_0 = 1,0 \cdot 10^2$  МПа.

На рис. 2 представлены графики, которые описывают зависимость критических величин осевых сжимающих напряжений  $\sigma_{zz}^{cr}$ , отнесенных к толщине однослойной оболочки, от угла поворота  $\psi$  главных направлений упругости композитного материала. Кривая 1 представляет цилиндр толщиной  $h = 0,03$  м, а кривая 2 –  $h = 0,04$  м. Они построены в осях  $\alpha - \psi$ , где  $\alpha = \sigma_{zz}^{cr} / h$ ,  $h$  – толщина оболочки. Для получения критических значений осевых сжимающих напряжений используется зависимость  $\sigma_{zz}^{cr} = 10^2 \cdot \alpha \cdot h$ , [МПа].

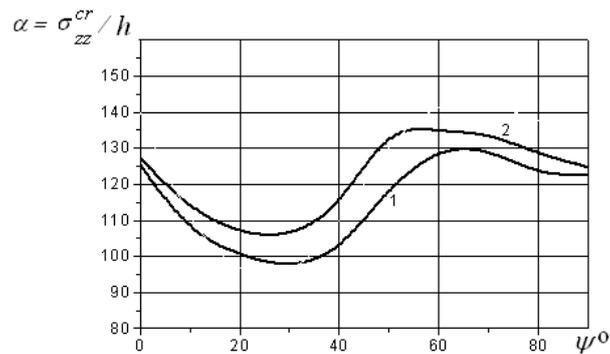


Рис. 2

Анализ кривых 1 и 2, представленных на рис. 2, указывает на то, что критические значения сжимающих напряжений  $\sigma_{zz}^{cr}$  зависят от угла поворота  $\psi$  главных направлений упругости изначально ортотропного композитного материала. Наиболее существенно это проявляется в диапазоне изменения угла  $10^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$ , где максимальное отличие в величинах критических напряжений сравнительно с исходным состоянием при  $\psi = 0^\circ$  составляет 22%.

Рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки постоянной толщины, образованной перекрестным армированием различного количества слоев, изначально волокнистого ортотропного материала, под углами  $\pm\psi_i$ ,  $\psi = 0^\circ, \dots, 90^\circ$  к оси  $z$ . Механические параметры оболочки такие же, как и в предыдущей задаче. Геометрические характеристики такие: радиусы поверхностей – внутренней  $r_1 = 0,57$  м, внешней  $r_2 = 0,63$  м, длина образующей  $L = 1,2$  м.

Исследованы шесть типов оболочек. Они отличались числом слоев (от одного до шестнадцати) перекрестно армированного волокнистого композита. Результаты расчета сопоставлены с полученными данными для ортотропной оболочки.

На рис. 3 представлены результаты расчета для цилиндрических оболочек: 1 – однослойной ( $+\psi$ ); 2 – двухслойной перекрестно-армированной ( $\pm\psi$ ); 3 – четырехслойной ( $\pm\psi$ ); 4 – восьмислойной ( $\pm\psi$ ) оболочек; 5 – ортотропной, рассчитанной без

учета анизотропных констант материала. Для получения реальных значений величин критических нагрузок величины, приведенные на рис. 3, следует умножить на  $10^2$ .

Характер изменения критических нагрузок, проиллюстрированный на рис. 3, позволяет заключить, что их значения существенно зависят от количества перекрестно-армированных слоев в диапазоне их изменения от одного до шестнадцати. Дальнейшее увеличение количества слоев оболочки не существенно влияет на величины критических нагрузок осевого сжатия, приближаясь к критическим значениям, полученным без учета анизотропных констант материала. К примеру, результаты, полученные для 16-слойной оболочки, практически полностью совпадают с представленными для ортотропного подхода (кривая 5). Это соответствует результатам расчетов величин критических осевых нагрузок для цилиндрических анизотропных оболочек, представленным в [2, 22] и величинам частот собственных колебаний для таких же конструкций – в работе [14].

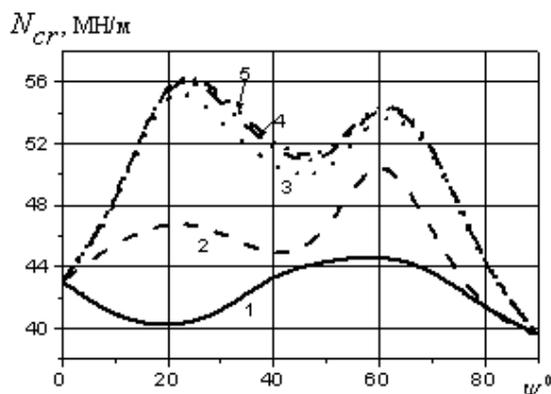


Рис. 3

Рассмотрим устойчивость трехслойных цилиндров общей толщиной  $h = 0,06$  м. Для них несущие внешний и внутренний слои изготовлены из стеклопластика с модулем Юнга, равным  $E_{11} = 445 \cdot 10^2$  МПа, а в качестве заполнителя используется изотропный материал с  $E = 0,1E_{11}$ . Длина оболочки  $L = 1,2$  м, радиусы внутренней  $r_1 = 0,57$  м и внешней  $r_2 = 0,63$  м поверхностей. Главные направления упругости несущих слоев повернуты в одном направлении на угол  $\psi$ . Рассмотрены три варианта компоновки слоистого пакета, толщина которого остается неизменной при изменении толщины несущих слоев: 1 –  $h_1 = h_3 = 0,006$  м; 2 –  $h_1 = h_3 = 0,009$  м; 3 –  $h_1 = h_3 = 0,012$  м. Результаты расчетов представлены на рис. 4 (значения величин приведенных критических нагрузок следует умножить на  $10^2$ ).

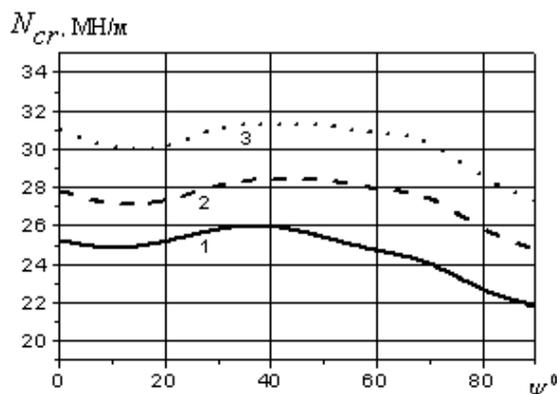


Рис. 4

Из анализа кривых рис. 4 следует, что изменение угла поворота главных направлений упругости несущих слоев влияет на величины критических сжимающих нагрузок  $N_{cr}$ , хотя не столь существенно, как для многослойных оболочек, изготовленных из одного однородного по толщине материала. Кривые для оболочек с различной толщиной несущих слоев являются эквидистантными при изменении угла  $\psi$ . При этом толщины несущих слоев влияют на критические величины. Например, их изменение на 50% (кривые 1 и 2) приводит к увеличению критических значений  $N_{cr}$  до 14%, различие между критическими нагрузками, соответствующими кривым 2 и 3 достигает 10%. Таким образом, появляется возможность варьирования толщины несущих слоев для обеспечения необходимых значений критических величин цилиндра.

### Заключение.

В работе предложен подход, основанный на применении метода прямых для определения параметров докритического напряженно-деформированного состояния и метода Бубнова – Галеркина для решения задачи устойчивости цилиндрических анизотропных оболочек. Численная реализация предлагаемого подхода основана на сочетании методов дискретного преобразования Фурье и дискретной ортогонализации. Сравнение полученных результатов с тестовыми примерами [9, 13, 18, 25] показывает их достоверность и тем самым свидетельствует о применимости разработанной методики как к расчету НДС, так и устойчивости толстых слоистых оболочек.

Предложенный авторами подход позволяет решать в пространственной постановке задачи о напряженно-деформированном состоянии и устойчивости толстостенных слоистых цилиндрических оболочек из анизотропного материала при действии осевых сжимающих усилий и при изменении геометрических и механических характеристик слоистого пакета.

РЕЗЮМЕ. Розроблено підхід до розв'язання задач про напружено-деформований стан та стійкість шаруватих циліндричних анизотропних оболонок в тривимірній постановці. Розглянута анізотропія характеризується однією площиною пружної симетрії. Чисельна реалізація запропонованого підходу базується на поєднанні методів Бубнова – Гальоркіна, дискретного перетворення Фур'є та дискретної ортогоналізації. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з відомими розв'язками більш простих задач. Розв'язано нову задачу про стійкість для тришарової оболонки.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела. – 2010. – 352 с.
3. Ванін Г. А., Семенюк Н. П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 199 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
6. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: Монография. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
7. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 264с.
8. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища школа, 1986. – 511 с.
9. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.
10. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
11. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. – М.: Машиностроение, 1965. – 271с.

12. *Костромин В.П., Мяченков В.И.* Устойчивость многослойных оболочек с цилиндрически-анизотропными неоднородными слоями // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1973. – Вып. 21. – С. 11 – 16.
13. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
14. *Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.9. Динамика элементов конструкций / В.Д. Кубенко, А.Э. Бабаев, Е.И. Беспалова и др. – К.: А.С.К., 1999. – 379 с.*
15. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л. – М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
16. *Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N.* Solution of Boundary-Value Problems of the Theory of Plates with Variable Parameters Using Periodical B-splines // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 373 – 377.
17. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Layered Inhomogeneous Hollow Cylinders with Concave Corrugations under Internal Pressure // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 531 – 538.
18. *Kardomateas G.A.* Bifurcation of Equilibrium in Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under Axial Compression // J. Appl. Mech. – 1995. – **62**(1), – P. 43 – 52.
19. *Podvorny A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M.* Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells under Distributed External Pressure in a Three-Dimensional Statement // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 623 – 638.
20. *Semenuk M.P., Trach V.M.* Allowing for Rotations about the Normal in Nonlinear Theories of Shells // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 6. – P. 694 – 701.
21. *Semenuk M.P., Trach V.M., Podvorny A.V.* Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement // 36. наук. пр. «Опір матеріалів і теорія споруд» / КНУБА. – N 94. – 2015. – С. 126 – 138.
22. *Trach V.M.* Stability of Cylindrical Shells with One Plane of Elastic Symmetry under Axial Compression and Torsion // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 8. – P. 943 – 947.
23. *Tracz W., Chorużyj M.* Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych, anizotropowych powłok o średniej grubości // Acta scientiarum polonorum. Architectura. – 2015. – 14(3). – P. 21 – 34.
24. *Weaver P.* Imperfection-insensitive shells using variable stiffness composites // 3 Int. Conf. on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop. – 25 – 27 March 2015, Braunschweig, Germany.
25. *Weaver P.M., Driesen J.R., Roberts P.* Anisotropic effects in the compression buckling of laminated composite cylindrical shells // Composite Science and Technology. – 2002. – **62**. – P. 91 – 105.

Поступила 20.02.2018

Утверждена в печать 05.03.2019