

В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш, Н. В. Арнаута

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ
МНОГОСЛОЙНЫХ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК
РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. The forced vibrations of the multi-layered discretely stiffened cylindrical, spherical, and conical shells under action of nonstationary loads are studied. The dynamical behaviour of stiffened shells is considered on the base of Timoshenko type theory of shells and ribs. The Reissner's variational principle for dynamical processes is used for deriving the motion equations. An efficient numerical method with using Richardson type finite difference approximation for solution of problems stated is elaborated. The numerical examples are given and the numerical findings are analysed.

Key word: shells of revolution, Timoshenko type theory of shells and ribs, numerical method, nonstationary vibrations.

Введение.

Задачи динамики многослойных дискретно подкрепленных оболочек при нестационарных нагрузках находят широкое прикладное применение в современной технике (машиностроение, авиационно-космическая техника, судостроение и т.д.). Одной из особенностей указанной тематики является учет дискретности расположения ребер при постановке исходных задач. При динамических нагрузках дискретно подкрепленных оболочек локальные возмущения в области дискретных элементов приводят к значительному перераспределению параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) по всей длине конструкции. Исходная постановка задач и сложность процессов, возникающих при этом, обуславливают необходимость использования современных численных методов решения динамических задач поведения многослойных оболочечных конструкций с учетом дискретного размещения ребер.

Условно решение динамических задач дискретно подкрепленных многослойных оболочек можно разделить на две части: 1) решение задачи в гладкой области (динамика гладкой многослойной оболочки); 2) решение задачи на линиях пространственных разрывов (динамика подкрепленной оболочки в области контакта оболочки – ребро с учетом действия соответствующих сил). Вопросам динамики гладких многослойных оболочек в классической и уточненной постановках посвящено значительное число публикаций. В частности, следует отметить работы [11 – 17]. Свободные и вынужденные колебания при гармонических нагрузках дискретно подкрепленных однослойных оболочек различной геометрии (цилиндрические, конические, сферические оболочки) в рамках классической теории рассмотрены в работах [1, 2, 7]. Вынужденные колебания дискретно подкрепленных оболочек различной геометрии в уточненной постановке при нестационарных нагрузках представлены в работах [3, 8, 9].

В данной работе приводятся уравнения осесимметричных колебаний дискретно подкрепленных многослойных оболочек различной геометрии (цилиндр, сфера, ко-

ISSN0032–8243. Прикл. механика, 2019, 55, № 4

нус). В основу положена теория многослойных оболочек с использованием гипотез ко всему пакету. При рассмотрении дискретных подкрепляющих ребер используется уточненная модель стержней типа Тимошенко [2, 8, 9]. Для вывода уравнений колебаний используется вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов [2]. Численный метод решения динамических уравнений основан на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем для уравнения с разрывными коэффициентами [2, 5]. Как числовые примеры рассмотрены задачи динамического деформирования дискретно подкрепленных пятислойных оболочек различной геометрии (цилиндрическая, сферическая и коническая оболочки) при действии распределенной внутренней импульсной нагрузки.

§1. Исходные предположения.

Рассматривается неоднородная упругая структура, которая представляет собой дискретно подкрепленную многослойную оболочку. Предполагается, что слои оболочки и дискретные подкрепляющие элементы жестко соединены между собой.

Полагаем, что собственно многослойная оболочка (обшивка) состоит из M ортотропных слоев с постоянными толщинами h_m $\left(m = \overline{1, M}, h = \sum_{m=1}^M h_m\right)$. При построении математической модели процесса динамического деформирования многослойной конструкции используется вариант теории оболочек типа Тимошенко, в основу которого положены следующие предположения.

1. Изменение перемещений по толщине m -го слоя задается аппроксимацией вида

$$U_{1m}^z(x, y, z) = U_{1m}(x, y, z) + z\varphi_{1m}(x, y); \quad U_{2m}^z(x, y, z) = U_{2m}(x, y, z) + z\varphi_{2m}(x, y); \quad (1.1)$$

$$U_{3m}^z(x, y, z) = U_{3m}(x, y, z), \quad z \in [-h_m/2, h/2],$$

где $U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}, \varphi_{1m}, \varphi_{2m}$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности m -го слоя.

2. Поперечные сдвиговые напряжения σ_{13m}^z и σ_{23m}^z изменяются по толщине соответствующего слоя согласно формул

$$\sigma_{13m}^z(x, y, z) = f_{1m}(z)\sigma_{13m}^0(x, y); \quad \sigma_{23m}^z(x, y, z) = f_{2m}(z)\sigma_{23m}^0(x, y), \quad (1.2)$$

где функции $f_{1m}(z), f_{2m}(z)$ выбираем из условий непрерывности поперечных напряжений по толщине.

3. Компоненты тензора деформаций в квадратичном приближении для m -го слоя записываются в виде

$$\varepsilon_{11m}^z = \varepsilon_{11m} + z\kappa_{11m}; \quad \varepsilon_{22m}^z = \varepsilon_{22m} + z\kappa_{22m}; \quad \varepsilon_{12m}^z = \varepsilon_{12m} + z\kappa_{12m};$$

$$\varepsilon_{13m}^z = \varepsilon_{13m}; \quad \varepsilon_{23m}^z = \varepsilon_{23m} + z\kappa_{32m}; \quad \varepsilon_{11m} = \frac{\partial U_{1m}}{\partial x} + \frac{1}{2}\Theta_{1m}^2;$$

$$\varepsilon_{22m} = \frac{\partial U_{2m}}{\partial y} + \frac{U_{3m}}{R_m} + \frac{1}{2}\Theta_{2m}^2; \quad \varepsilon_{12m} = \frac{\partial U_{1m}}{\partial y} + \frac{\partial U_{2m}}{\partial x} + \Theta_{1m}\Theta_{2m}; \quad \kappa_{11m} = \frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial x}; \quad (1.3)$$

$$\kappa_{22m} = \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial y}; \quad \kappa_{23m} = -\frac{\varphi_{2m}}{R_m}; \quad \kappa_{12m} = \frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial x};$$

$$\Theta_{1m} = \frac{\partial U_{3m}}{\partial x}; \quad \Theta_{2m} = \frac{\partial U_{3m}}{\partial y} - \frac{U_{2m}}{R_m},$$

где R_m – радиус срединной поверхности m -го слоя.

При построении математической модели деформирования i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси OX (j -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси OY), будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках теории стержней Тимошенко.

Аппроксимация перемещений по сечению i -го (j -го) подкрепляющего ребра принимается в виде

$$\begin{aligned} U_{1i}^{yz}(x, y, z) &= U_{1i}(x) + y\varphi_{1i}(x) + z\varphi_{2i}(x); \\ U_{2i}^{yz}(x, y, z) &= U_{2i}(x) + z\varphi_{3i}(x); \\ U_{3i}^{yz}(x, y, z) &= U_{3i}(x) - y\varphi_{3i}(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \varphi_{1i}(x), \varphi_{2i}(x), \varphi_{3i}(x)$ – компоненты обобщенного вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i -го ребра.

Отнесем общую систему координат неоднородной по толщине структуры к срединной поверхности одного из слоев обшивки толщиной h_c координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности. Условия жесткого соединения слоев позволяют установить кинематические условия контакта между компонентами обобщенных векторов перемещений срединных поверхностей слоев:

$$\begin{aligned} U_{1m}(x, y) &= U_1(x, y) + h_{cm}\varphi_1(x, y); \quad U_{2m}(x, y) = U_2(x, y) + h_{cm}\varphi_2(x, y); \\ U_{3m}(x, y) &= U_3(x, y); \quad \varphi_{1m}(x, y) = \varphi_1(x, y); \quad \varphi_{2m}(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i -го ребра, направленного вдоль оси OX , и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записывается в виде:

$$\begin{aligned} U_{1i}(x) &= U_1(x, y_i) + h_{ci}\varphi_1(x, y_i); \quad U_{2i}(x) = U_2(x, y_i) + h_{ci}\varphi_2(x, y_i); \\ U_{3i}(x) &= U_3(x, y_i); \quad \varphi_{2i}(x) = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{3i}(x) = \varphi_2(x, y_i). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогичным образом записываются условия контакта j -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси y с обшивкой.

В формулах (1.5), (1.6) h_{cm} – расстояние от исходной поверхности к срединной поверхности m -го слоя; h_{ci} – расстояние от исходной срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения i -го ребра.

§2. Уравнения колебаний.

Для вывода уравнений движения многослойной дискретно подкрепленной структуры используются вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов [2], согласно которому

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (2.1)$$

где R – функционал Рейсснера; T – кинетическая энергия; A – работа внешних сил.

В случае осесимметричных колебаний многослойных оболочечных структур с учетом дискретности размещения подкрепляющих ребер параметры напряженно-деформированного состояния структуры зависят только от координаты α_1 . При этом уравнения колебаний значительно упрощаются и имеют следующий вид:

в гладкой области –

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}) \right] - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}; \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] - T_{13} = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

уравнения колебаний j -го дискретного ребра –

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [\bar{T}_{13}]_j - k_{2j} T_{22j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad [M_{11}]_j = \rho_j I_{\text{сп}j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Оссимметричные уравнения колебаний многослойной оболочечной неоднородной структуры (2.2), (2.3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В случае свободного края при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничные условия имеют вид

$$T_{11} = \bar{T}_{13} = M_{11} = 0.$$

В случае жестко закрепленного края при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0.$$

Начальные условия записываются в виде

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

§3. Численный алгоритм.

Рассматриваются численные алгоритмы решения нестационарных динамических задач для многослойных подкрепленных оболочек вращения с учетом дискретности размещения ребер. Численный алгоритм решения нестационарных задач теории неоднородных многослойных оболочек основывается на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем по пространственной координате и явной конечно-разностной схемы типа «крест» по временной координате [2, 5]. В силу исходной постановки задач ищется численное решение в гладкой области упругой структуры (для многослойной оболочки между ребрами) и на линиях расположения соответствующих ребер.

Исходная группа уравнений, описывающая динамическое поведение неоднородной упругой оболочечной структуры, представляет собой две системы уравнений. Одна из них – это уравнения колебаний элементов многослойных подкрепленных оболочек (уравнения колебаний многослойной гладкой оболочки и уравнения колебаний ребер), вторая – соотношения обобщенного закона Гука для каждого из указанных элементов. Переход от непрерывной системы уравнений к конечно-разностной выполняется в *два этапа*. *Первый этап* состоит в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений колебаний в усилиях-моментах, основывающийся на применении интегро-интерполяционного метода аппроксимации уравнений колебаний оболочки и ребер. *Второй этап* аппроксимации уравнений состоит в выборе энергетически согласованных конечно-разностных аппроксимаций величин усилий-моментов и соответствующих величин деформаций, чтобы выполнялся закон сохранения полной механической энергии на разностном уровне.

Одной из особенностей решения краевых задач теории подкрепленных оболочек с учетом дискретного размещения ребер является наличие разрывных коэффициентов в уравнениях колебаний, что в свою очередь, негативно влияет на сходимость численных результатов. Для построения более эффективных алгоритмов применяется подход, который основывается на определении приближенных решений по Ричардсону [4]. Причем, при фиксированном разностном шаге по временной координате используется последовательность приближенных аппроксимаций по пространственной координате. При этом процедура экстраполяции формируется согласно формулы

$$\tilde{U}_{l(\Delta s)}^n = \frac{4}{3} \bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n - \frac{1}{3} \bar{U}_{l(\Delta s)}^n,$$

где $\bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n$ и $\bar{U}_{l(\Delta s)}^n$ – численные решения уравнений колебаний соответственно с дискретными шагами по пространственной координате $\Delta s/2$ и Δs , $s = A_1 \alpha_1$.

Разностные уравнения аппроксимируют исходные уравнения колебаний в гладкой области с четвертым порядком точности по координате s .

§4. Решения конкретных задач.

Рассматриваются задачи динамического поведения многослойных подкрепленных цилиндрических, сферических, конических оболочек с учетом дискретности размещения ребер, которые представляют собой набор дискретных кольцевых ребер, при внутреннем нормальном осесимметричном импульсном нагружении согласно уравнений колебаний (2.2), (2.3).

Цилиндрическая оболочка. Рассматривается задача определения НДС пятислойной цилиндрической оболочки при нестационарном нагружении. В уравнениях (2.2), (2.3) полагалось $\alpha_1 = x$, $A_1 = 1$, $A_2 = R$, где R – радиус приведенной срединной поверхности. Полагалось, что края оболочки жестко защемлены. Краевые условия для такого случая имеют вид при $x = 0$, $x = L$: $U_1 = U_2 = \varphi_3 = 0$, где L – длина оболочки.

Нестационарная распределенная нагрузка задавалась в виде: $P_3(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \times [\eta(t) - \eta(t - T)]$, где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки.

Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах:

$$E_1^1/E_1^{3an} = 100 \div 1000; \nu_1^1 = 0,3; \nu_1^{3an} = 0,4; \rho_1/\rho_{3an} = 7;$$

$$R/h = 20; h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5; L/R = 1,25; A = 10^5 \text{ Н/м}^2; \rho_j = \rho;$$

$$E_j = E_1^1; h_j/h = 3; \alpha_{1j} = 0,25jL \quad (j = \overline{1, 3}).$$

Полагалось, что первый, третий и пятый слои неоднородной оболочки характеризуются следующими физико-механическими параметрами: $E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho^1 = \rho^3 = \rho^5 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. А второй и четвертый слои характеризуются материалом со следующими физико-механическими параметрами (заполнитель): E_1^{3an} ; ν_1^{3an} ; ρ_{3an} .

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты расчетов. На рис. 1 изображена зависимость величин U_3 по координате x в зависимости от физико-механических параметров заполнителя для случая времени $t = 8T$. Кривая 1 соответствует случаю $E_1^1/E_1^{3an} = 1000$; кривая 2 – случаю $E_1^1/E_1^{3an} = 100$.

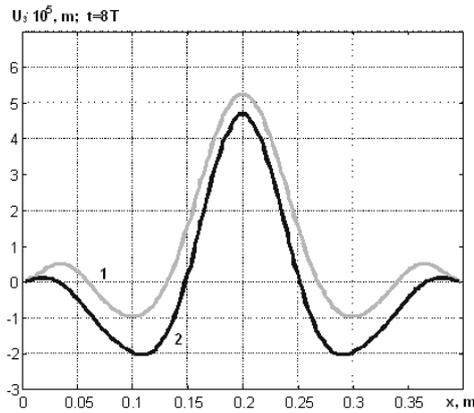


Рис. 1

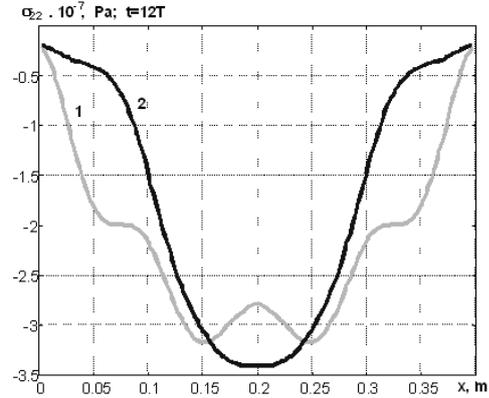


Рис. 2

Рис. 2 соответствует зависимости величин напряжения σ_{22} по координате x с соответствующими обозначениями кривых на рисунке для случая $t = 12T$. Анализируя выше приведенные зависимости, можно отметить, что оболочка с параметрами $E_1^1/E_1^{3an} = 1000$ при указанном выше динамическом нагружении «более чувствительна» по отношению к случаю $E_1^1/E_1^{3an} = 100$. Наблюдается увеличение величин прогиба U_3 в случае менее жесткого заполнителя ($E_1^1/E_1^{3an} = 1000$) по отношению к $E_1^1/E_1^{3an} = 100$. При рассмотрении величин напряжения σ_{22} для случая $E_1^1/E_1^{3an} = 1000$ наглядно наблюдается место расположения дискретных подкрепляющих элементов при $x_j = 0,25jL$ ($j = \overline{1, 3}$), чего не наблюдается для случая более жесткого заполнителя.

Сферическая оболочка. Рассматривается задача динамического поведения пятислойной сферической оболочки с подкрепленным отверстием при внутреннем импульсном нагружении. В уравнениях колебаний (2.2), (2.3) принято $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$. Полагалось, что один край оболочки при $s = s_0$ ($s = A_1 \alpha_1$) свободный, а второй край оболочки при $s = s_N$ – жестко защемлен. Полагалось, что свободный край подкреплен кольцевым ребром в области $s_1 \approx s_0$ (случай, когда край ребра совпадает со свободным краем оболочки, при этом центр тяжести поперечного сечения подкрепляющего ребра проектируется на внутреннюю точку приведенной срединной поверхности, т.е. $s_j = s_0 + 0,5b_j$, где b_j – ширина ребра). Граничные условия для свободного края при $s = s_0$ имеют следующий вид:

$$T_{11} = 0, \quad \bar{T}_{13} = 0, \quad M_{11} = 0;$$

а уравнения колебаний подкрепляющего ребра принимаются согласно формул (2.3).

Для случая жестко защемленного края при $s = s_N$ полагалось

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0.$$

Нестационарная импульсная нагрузка задавалась в виде

$$P_3 = A \cdot \sin \pi t / T [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. При расчетах полагалось $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $R = 0,3$ м; $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$; $h/h_j = 9/20$; $F_j = 10^{-4}$ м²; $h_1 = h_3 = h_5 = 10^{-3}$ м; $h_2 = h_4 = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $\alpha_{10} = \pi/12$; $\alpha_{1N} = \pi/2$.

Рассматривается случай, когда первый, третий и пятый слои неоднородной оболочки характеризуются следующими физико-механическими параметрами: $E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho^1 = \rho^3 = \rho^5 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Второй и четвертый слои состоят из материала со следующими физико-механическими параметрами (заполнитель): E_1^{3an} ; ν_1^{3an} ; ρ_{3an} ; $E_1^1/E_1^{3an} = 10 \div 1000$; $\nu_1^1 = 0,3$; $\nu_1^{3an} = 0,4$; $\rho_1/\rho_{3an} = 7$. Физико-механические параметры подкрепляющих элементов – $E_j = E_1^1$, $\rho_j = \rho_1$.

Полученные численные результаты позволяют проводить анализ НДС пятислойной упругой структуры сферического типа с отверстием в любой момент времени (расчеты проводились при $0 \leq t \leq 100T$) согласно приведенной постановки задач. В частности, на рис. 3 и 4 приведены зависимости величин U_3 и σ_{22} от пространственной координаты α_1 для случая $E_1^1/E_1^{3an} = 100$ в момент времени $t = 13T$ (время достижения максимального значения величины U_3 неподкрепленной оболочки).

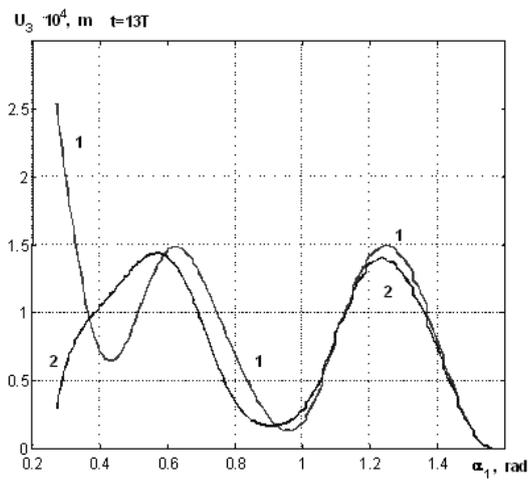


Рис. 3

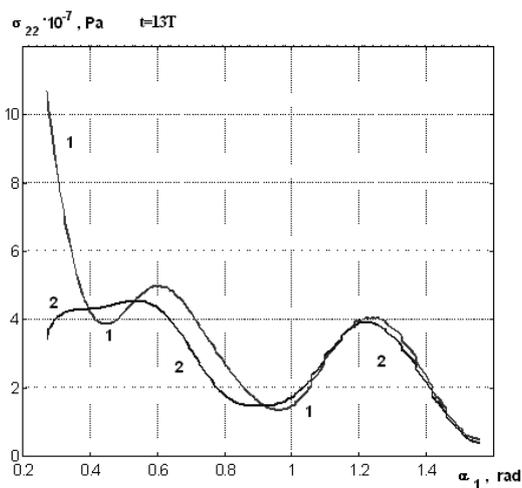


Рис. 4

Рис. 3 соответствует зависимостям U_3 от пространственной координаты α_1 , а рис. 4 – зависимостям величин σ_{22} от пространственной координаты α_1 . Кривая 1 соответствует случаю неподкрепленной оболочки, кривая 2 – случаю подкрепленного отверстия. Исходя из представленного графического материала, можно оценить влияние наличия подкрепляющего кольца на распределение кинематических U_3 и статических σ_{22} величин по сечению конструкции – отличие указанных параметров в области отверстия в несколько раз.

Коническая оболочка. Дискретно-неоднородная по толщине упругая структура конического типа представляет собой систему, состоящую из многослойной подкрепленной конической оболочки с учетом дискретности ребер. Считается, что многослойная подкрепленная коническая конструкция нагружена внутренней распределенной нестационарной нормальной нагрузкой $P_3(s, t)$, где s и t – пространственная и временная координаты.

При рассмотрении осесимметричных колебаний конических оболочек обычно используется система координат s, t , причем координата s отсчитывается от вершины конуса. В некоторых случаях, в частности для усеченных конических оболочек, более удобным является использование координаты s_1 , где координата s_1 отсчитывается от края оболочки.

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности записываются следующим образом:

$$A_1 = 1; A_2 = R_s; k_1 = 0; k_2 = \cos \alpha / R_s,$$

где α – угол конусности; s_1 – текущая координата; $R_s = R_0 + s_1 \sin \alpha$.

Рассматривается задача динамического деформирования пятислойной конической оболочки с жестко зашпеленными торцами под действием внутренней распределенной нагрузки $P_3(s, t)$. Граничные условия при $s = s_0, s = s_N$ имеют вид: $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$.

Нестационарная импульсная нагрузка задавалась в виде

$$P_3(s, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Расчеты проводились при следующих геометрических и физико-механических параметрах:

$$E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; E_1^1 / E_1^{3an} = 10 \div 1000; \nu_1^1 = \nu_1^3 = \nu_1^5 = 0,3; \nu_1^{3an} = 0,4;$$

$$\rho_1 / \rho_{3an} = 7; \rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5; h_1 = h_3 = h_5 = 10^{-3} \text{ м}; h_2 = h_4; h_2 / h_1 = 3;$$

$$R_0 = 0,1 \text{ м}; h / h_j = 9 / 20; F_j = 10^{-4} \text{ м}^2; \alpha_1 = \pi / 3; \alpha_2 = \pi / 4; \alpha_3 = \pi / 6.$$

Дискретные подкрепляющие элементы расположены в точках $s_j = 0,25s_N j, j = \overline{1,3}$.

Полученные численные результаты позволяют проводить анализ НДС пятислойной подкрепленной упругой структуры конического типа в любой момент времени (расчеты проводились при $0 \leq t \leq 40T$). В частности, на рис. 5 и рис. 6 приведены зависимости величин U_3 и напряжения σ_{22} от пространственной координаты s в зависимости от величины угла конусности в моменты времени $t = 4T$ и $t = 5,5T$.

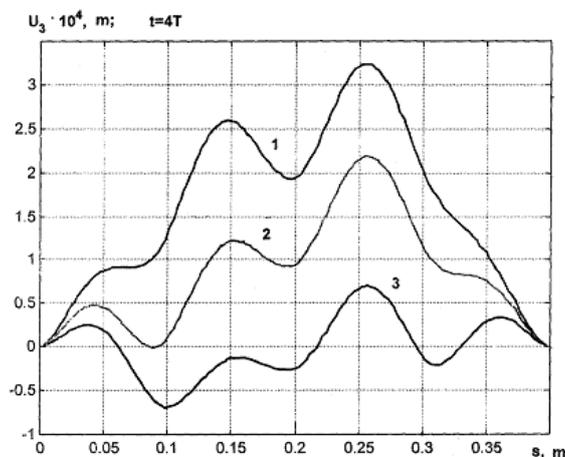


Рис. 5

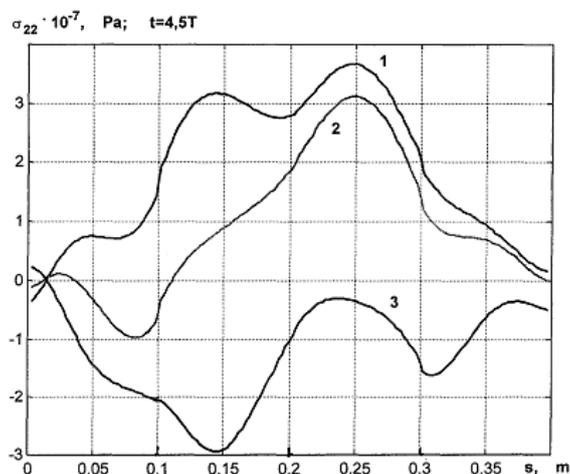


Рис. 6

Кривая 1 соответствует углу конусности $\alpha_1 = \pi / 3$; кривая 2 – $\alpha_2 = \pi / 4$, кривая 3 – $\alpha_3 = \pi / 6$. Рассматривается случай $E_1^1 / E_1^{зан} = 100$. Исходя из представленного графического материала, можно визуальнo определить влияние конусности структуры на антисимметричность распределения величин U_3 и σ_{22} по пространственной координате (как частный случай, для цилиндрической оболочки в случае $\alpha = 0$ наблюдается симметричная картина относительно оси s).

Выводы.

Рассмотрены задачи о вынужденных колебаниях дискретно подкреплённых многослойных цилиндрических, сферических и конических оболочек при распределённых импульсных нагрузках. Динамическое поведение дискретно подкреплённых оболочек рассмотрено в рамках теории оболочек и стержней согласно модели С.П. Тимошенко. Для решения поставленных задач использован метод конечных разностей по пространственной и временной координатам. Представлены численные результаты решения задач, дан анализ влияния подкрепляющих ребер на НДС исходных неоднородных конструкций.

РЕЗЮМЕ. Досліджено вимушені коливання дискретно підкріплених багатошарових циліндричних, сферичних та конічних оболонок під дією нестационарних навантажень. Динамічну поведінку підкріплених оболонок розглянуто в рамках теорії оболонок та стержнів згідно моделі С.П. Тимошенка. Представлено відповідні постановки та розроблено чисельний алгоритм розв'язання задач даного класу. Наведено чисельні приклади динамічної поведінки дискретно підкріплених багатошарових циліндричних, сферичних, конічних оболонок та проведено аналіз отриманих результатів.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 207 с.
2. *Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. *Колебания ребристых оболочек вращения* / Под ред. Амиро И.Я. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.
4. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 536с.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.
6. *Altenbach H.* Theories for laminated and sandwich plates: A review // *Mechanics of Composite Materials.* – 1998. – **34**, N3. – P. 243 – 252.
7. *Efimtsov B.M., Lazarev L.A.* Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // *J. of Sound and Vibrations.* – 2009. – **327**, Issues 1 – 2. – P. 41 – 54.
8. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems Under Non-Stationary Loading (Survey) // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
9. *Meish V.F., Maiborodina N.V.* Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells under a Nonstationary Normal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 675 – 686.
10. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
11. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
12. *Pagano N.J.* Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending // *J. Composite Materials.* – 1969. – **3**. – P. 389 – 411.
13. *Pagano N.J.* Free edge stress fields in composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* – 1978. – **14**. – P. 401 – 406.
14. *Qatu M.S.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989 – 2000, Part 1: Laminated Composite Shells // *Appl. Mech. Rev.* – 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
15. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // *Composite Structures.* – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
16. *Reddy J.N., Liu C.F.* A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells // *Int. J. Engng. Sci.* – 1985. – **23**. – P. 669 – 683.
17. *Reddy J.N.* On refined computational models of composite laminates // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* – 1989. – **27**. – P. 361 – 382.

Поступила 29.01.2018

Утверждена в печать 05.03.2019