

В. П. Ольшанский¹, В. В. Бурлака², М. В. Слипченко³

ДИНАМИКА ИМПУЛЬСНО НАГРУЖЕННОЙ БАЛКИ С ОДНОСТОРОННИМИ ОПОРНЫМИ СВЯЗЯМИ

*Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства имени Петра Василенко
ул. Алчевских, 44, 61002, Харьков, Украина,
e-mail: ¹OlshanskiyVP@gmail.com; ²Burlaka2V@ukr.net; ³Slipchenko_M@ukr.net*

Abstract. The pulsed deformation of a beam with hinged ends and discrete stiffening in the span by elastic linear supports is considered. It is assumed that due to separation of the beam from support a one-sided restraint (contact) of the beam with support arises, when the support is subjected to compression only and is not subjected to tension. A determination of the contact force of the beam with a compressed support is reduced to solution of the Volterra integral equation, which is solved numerically using a time-stepping method. Two variants of the generalized distribution of the external load along the length of the beam are considered. The conditions are established under which the maximum beam movement above the support in the direction of the action of the external force pulse is less than the amplitude of the beam movement in the opposite direction, when it moves after breaking the contact with the support. It is shown that such an inequality is observed only for the short-time impulse loads and is characteristic for the systems with asymmetric elasticity characteristics.

Key words: beam, impulse load, discrete elastic supports, one-sided ties, integral equations, numerical method.

Введение.

С математической моделью балки на промежуточных упругих опорах связан расчет мостовых перекрытий, многоопорных валопроводов, трубопроводов небольшого диаметра с относительно длинными пролетами между ложементами и других механических систем. Упругие опоры могут выполнять роль ограничителей хода (буферов) в механизмах с упругими звеньями. Безаварийная эксплуатация таких систем обеспечивается надлежащими расчетами их на жесткость и прочность. Поэтому математическое моделирование напряженно-деформированного состояния континуальных систем с дискретными упругими связями относится к актуальным научно-техническим задачам. Так, из-за распространенности в строительстве многопролетных балок, в строительной механике разработаны специальные упрощенные методы их статического расчета. Но анализ деформированного состояния таких балок становится значительно сложнее при учете податливости опор и динамического приложения нагрузки, что требует привлечения более совершенных методов расчета, представленных в научной литературе.

1. Краткий анализ публикаций и постановка проблемы.

Динамическое нестационарное деформирование упругих конструкций моделировали во многих публикациях, часть из которых вошла в обзоры в [6, 9, 11, 15]. В них рассмотрены нестационарные колебания как однородных [3, 13, 15] так и неоднородных, в частности, слоистых [7, 9 – 12, 13, 14, 16] твердых тел. Определение изменений во времени неизвестных сил и моментов часто сводили к численному решению инте-

гральных уравнений типа Вольтерра на компьютере [4, 10, 13 – 15]. Такой способ расчета наблюдается и в более современных публикациях [5, 17, 19] при моделировании импульсного деформирования биморфных тел. Здесь используем упомянутый способ для анализа динамики балки с односторонними дискретными упругими связями в пролете, когда в ходе движения происходит нарушение контакта балки с опорой. Задачи такого типа, но без нарушения контакта, сведением к интегральным уравнениям решали в [3, 13, 14]. Двадцать работ по динамике балок при импульсном нагружении, выполненных в последнее время, вошли в список литературы в [3]. Часть из них касается и балок с упругими промежуточными опорами (трёхпролётными и четырёхпролётными), но при безотрывном движении их от опор. Двухсторонние опорные связи используют и зарубежные авторы [18, 20, 21] при моделировании динамики мостовых конструкций под действием подвижных нагрузок. Механические системы с односторонними связями, в том числе и балки с дискретными промежуточными опорами, рассмотрены в [2], но там изложен только статический расчет методом квадратичного программирования. В заключение укажем также статью [8], в которой описана динамика балки, односторонне подкрепленной упругой опорой, при мгновенном импульсном нагружении. Вопросы динамики многопролётных балок с односторонними связями в условиях действия импульсов конечной продолжительности действия во времени, пока не освещены в научной литературе, чем и обусловлена цель данной работы.

Целью этой работы является изучение особенностей движения балки, вызванных односторонними упругими связями в пролете, при кратковременном импульсном нагружении, с использованием интегральных уравнений и их численным решением.

2. Постановка задачи и ее решение.

Движение балки, которая находится в состоянии покоя до приложения импульсной нагрузки, описываем дифференциальным уравнением:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x) [H(t) - H(t - t_1)] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_j Y_j(t) [1 + \text{sign} Y_j(t)] \delta(x - x_j). \quad (1)$$

Здесь EJ – изгибная жесткость балки; ρF – ее погонная масса; $y = y(x, t)$ – поперечное перемещение (прогиб) балки; $q(x)$ – интенсивность распределения нагрузки по длине балки; t_1 – длительность импульса во времени t ; C_j – жесткость j -ой опоры на сжатие; $Y_j(t) = y(x_j, t)$, x_j – сечения, в которых балка подкреплена промежуточными опорами; $H(t)$, $H(t - t_1)$ – единичные функции Хевисайда; $\delta(x - x_j)$ – дельта-функции; $x \in [0; l]$ – пространственная координата; l – длина балки; n – количество промежуточных опор.

Расчетная схема балки показана на рис. 1, где $q(x, t) = q(x) [H(t) - H(t - t_1)]$.

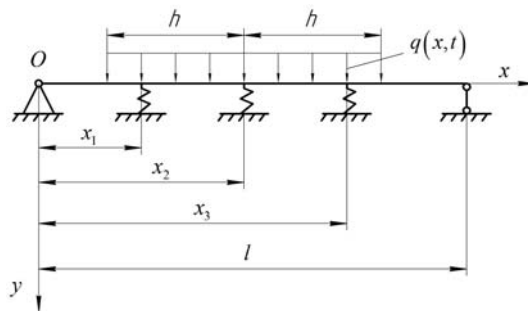


Рис. 1

Решение уравнения (1) строим в виде ряда

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin(\alpha_m x), \quad (2)$$

где $\alpha_m = m\pi / l$; $f_m(t)$ – неизвестные функции.

Подстановкой (2) в (1) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 f_m = \frac{2}{\rho Fl} \left\{ Q_m [H(t) - H(t - t_1)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_j Y_j(t) [1 + \text{sign} Y_j(t)] \sin(\alpha_m x_j) \right\},$$

в которых $\omega_m = \alpha_m^2 \sqrt{EJ / \rho F}$; $Q_m = \int_0^l q(x) \sin(\alpha_m x) dx$. При нулевых начальных условиях они имеют решения

$$f_m(t) = \frac{2}{IEJ \alpha_m^4} \left[Q_m \cdot \varphi_m(t) - \omega_m \sum_{j=1}^n C_j \sin(\alpha_m x_j) \int_0^{u_j} Y_j(u) \sin(\omega_m(t-u)) du \right], \quad (3)$$

где

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\omega_m t) & t \leq t_1 \\ 2 \sin \frac{\omega_m t_1}{2} \sin \left(\omega_m \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right) & t > t_1, \end{cases} \quad \text{при} \quad u_j = \begin{cases} t & t \leq u_{j*} \\ u_{j*} & t > u_{j*}, \end{cases}$$

u_{j*} – значения u , при которых $Y_j(u) = 0$.

Решения (3) сохраняют смысл лишь до значения t , при котором начинается повторный контакт балки с опорами, но этого достаточно, чтобы выяснить особенности движения системы на начальном этапе, без учета рассеяния энергии.

Учитывая (2) и (3), получаем формулу прогибов балки

$$y(x, t) = \frac{2}{IEJ} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^4} \left\{ Q_m \varphi_m(t) - \omega_m \sum_{j=1}^n C_j \sin(\alpha_m x_j) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{u_j} Y_j(u) \sin[\omega_m(t-u)] du \right\} \sin(\alpha_m x). \quad (4)$$

В ней множитель Q_m зависит от закона распределения динамической нагрузки по длине балки. Рассмотрим для конкретности два варианта обобщенного распределения, симметричного относительно середины балки.

Первый степенной, на промежутке $x \in [l/2 - h; l/2 + h]$, задаем в виде

$$q(x) = \frac{P}{\sqrt{\pi h}} \frac{\Gamma(\mu + 3/2)}{\Gamma(\mu + 1)} \left[1 - \frac{(x - l/2)^2}{h^2} \right]^{\mu}. \quad (5)$$

Здесь $2h \leq l$ – длина участка приложения внешней нагрузки; P – величина мгновенно приложенной локально распределенной силы; $\Gamma(z)$ – гамма-функция; μ – показатель степени, причем $\mu \geq -1$.

В случае $\mu = 0$ имеем равномерное распределение с интенсивностью:

$$q(x) = \frac{P}{2h} = \text{const.} \quad (6)$$

Для закона (5) интегрированием получаем

$$Q_m = P \left(\frac{2}{\alpha_m h} \right)^{\mu+1/2} \Gamma\left(\mu + \frac{3}{2}\right) J_{\mu+1/2}(\alpha_m h) \sin \frac{m\pi}{2}, \quad (7)$$

где $J_{\mu+1/2}(z)$ – функция Бесселя первого рода.

Из (7) следует, что при $\mu = 0$

$$Q_m = P \frac{\sin(\alpha_m h)}{\alpha_m h} \sin \frac{m\pi}{2}. \quad (8)$$

Если $h \rightarrow 0$, то при $\mu \geq -1$, $Q_m = P \sin(m\pi/2)$, что соответствует действию сосредоточенного импульса в сечении $x = l/2$.

В случае $\mu \rightarrow -1$ выражение (5) описывает действие на балку двух сил величиной $0,5P$, сосредоточенных в сечениях $x = 0,5l \mp h$.

Второй вариант распределения тригонометрический. На промежутке $x \in [l/2 - h; l/2 + h]$ оно имеет вид

$$q(x) = P \frac{\pi \Gamma(\mu+1)}{2^{\mu+1} h \Gamma^2\left(\frac{\mu+1}{2}\right)} \left[\cos \frac{\pi(x-l/2)}{2h} \right]^\mu. \quad (9)$$

При $\mu = 0$ (9) переходит в равномерное распределение (6).

Для распределения (9) интегрированием получаем

$$Q_m = \frac{P}{\pi} \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\xi - \mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu + \xi}{2}\right)} \sin\left(\pi \frac{\xi - \mu}{2}\right) \sin \frac{m\pi}{2}, \quad (10)$$

причем $\xi = 2mh/l = 2\alpha_m h/\pi$.

Из (10), при $\mu = 0$, следует формула (8). Для ее получения учитываем, что [1]

$$\Gamma\left(1 + \frac{\xi}{2}\right) = \frac{\xi}{2} \Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Если $h \rightarrow 0$, то $\xi \rightarrow 0$ и предельный переход в (10) дает

$$Q_m = P \sin \frac{m\pi}{2}.$$

При этом следует принять во внимание зависимость [1]

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

и задать $z = -\mu/2$.

Следовательно, при вычислении $y(x, t)$ по формуле (4) можно использовать выражения (8) и (10). При $-1 \leq \mu < 0$ они описывают сингулярные, а при $\mu \geq 0$ – регулярные распределения нагрузки по длине балки. Локальные сингулярные распределения возникают при передаче внешней нагрузки на балку через жесткую накладку (штамп) или через жесткую поперечную балку. Итак, выражения (5) и (9) позволяют рассматривать широкий класс внешних воздействий на балку, от локально распределенных до сосредоточенных. Но в (4) остаются еще неизвестными перемещения над опорами $Y_j(t)$. Для их определения зададим в (4) $x = x_s$, $s = 1, 2, \dots, n$. В результате получаем систему из n интегральных уравнений

$$Y_s(t) = \frac{2}{IEJ} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^4} \left\{ Q_m \cdot \varphi_m(t) - \omega_m \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^n C_j \sin(\alpha_m x_j) \int_0^{u_j} Y_j(u) \sin(\omega_m(t-u)) du \right\} \sin(\alpha_m x_s). \quad (11)$$

Ее приходится решать численными методами на компьютере как это делали в [4, 6], используя пошаговую во времени ступенчатую или кусочно-линейную аппроксимации $Y_j(t)$.

3. Числовые результаты.

Сначала получаем их для балки, подкрепленной в середине пролета одной упругой опорой. В этом случае вместо (11) имеем лишь одно интегральное уравнение

$$Y_1(t) = \frac{2}{IEJ} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^4} \left\{ Q_m \varphi_m(t) \sin \frac{m\pi}{2} - \omega_m C_1 \int_0^{u_1} Y_1(u) \sin[\omega_m(t-u)] du \right\}. \quad (12)$$

Предположим, что импульс равномерно распределен по всей длине балки ($\mu = 0$; $2h = l$). Тогда в (12) $Q_m = (2P / m\pi) \sin^2(m\pi / 2)$.

Использованием ступенчатой аппроксимации выражение (12) сводим к рекуррентному соотношению

$$Y_{1s} \left[1 + \frac{4C_1}{\rho Fl} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\sin^2(\omega_m \tau / 2)}{\omega_m^2} \right] = \frac{4P}{\pi \rho Fl} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\varphi_m(s\tau)}{m\omega_m^2} \sin \frac{m\pi}{2} - \\ - \frac{4C_1}{\rho Fl} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\sin(\omega_m \tau / 2)}{\omega_m^2} \left[\sin(\omega_m s\tau) \sum_{\substack{r=1 \\ (s>1)}}^{\substack{(s < u_1^*/\tau) \\ s-1}} Y_{1r} \cos\left(\omega_m \left(r - \frac{1}{2}\right)\tau\right) - \right. \\ \left. - \cos(\omega_m s\tau) \sum_{\substack{r=1 \\ (s>1)}}^{\substack{(s < u_1^*/\tau) \\ s-1}} Y_{1r} \sin\left(\omega_m \left(r - \frac{1}{2}\right)\tau\right) \right], \quad s = 1, 2, \dots, K, \quad (13)$$

в котором $\tau = t / K$; K – количество участков на промежутке $[0; t]$; Y_{1r} – постоянное значение $Y_1(t)$ на r -ом участке; вычисления сумм по r начинается, когда $s = 2$ и их целесообразно накапливать в ходе расчета. При $s\tau > u_1^*$ суммы по r фиксируются и остаются постоянными для больших s .

Задавая последовательно $s = 1, 2, \dots, K$, с помощью (13), получаем дискретное множество $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1K} = Y_1(K, \tau) = Y_1(t)$, причем находим перемещения балки в сечении $x = l/2$ и при отсутствии ее контакта с опорой.

Для проведения расчетов задаем: $EJ = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$; $\rho F = 13,7 \text{ кг/м}$; (двутавр № 14); $l = 6 \text{ м}$ и разные значения жесткости опоры C_1 , силы P и длительности импульса t_1 .

Вычисленные частичные суммы M первоначальных членов в рядах по m в (13), при $C_1 = 10^6 \text{ Н/м}$; $P = 9 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $t_1 = 0,02 \text{ с}$; $K = 4000$ для перемещений сечения балки над опорой записано в табл. 1 (значения $Y_1(t)$ в зависимости от M). Наблюдается достаточно быстрая сходимость рядов по m .

Таблица 1

$10^2 t, \text{с}$	$M=1$	$M=5$	$M=10$	$M=50$
	Значения $10^3 Y_1(t), \text{м}$			
1,5	8,456	8,271	8,269	8,268
2,5	4,281	4,863	4,866	4,867
3,5	-10,489	-10,450	-10,448	-10,447
4,5	-18,865	-19,649	-19,653	-19,653
5,5	-15,488	-16,575	-16,583	-16,583

О влиянии количества участков K на результаты расчета перемещений балки предоставлена информация в табл. 2 (значения $Y_1(t)$ в зависимости от K).

Таблица 2

$10^2 t, \text{с}$	$K = 500$	$K = 2000$	$K = 4000$	$K = 6000$
	Значения $10^3 Y_1(t), \text{м}$			
1	5,137	5,139	5,140	5,140
2	8,685	8,697	8,699	8,700
3	-2,780	-2,810	-2,815	-2,817
4	-16,068	-16,187	-16,206	-16,213
5	-19,331	-19,489	-19,514	-19,522
6	-10,598	-10,678	-10,691	-10,695

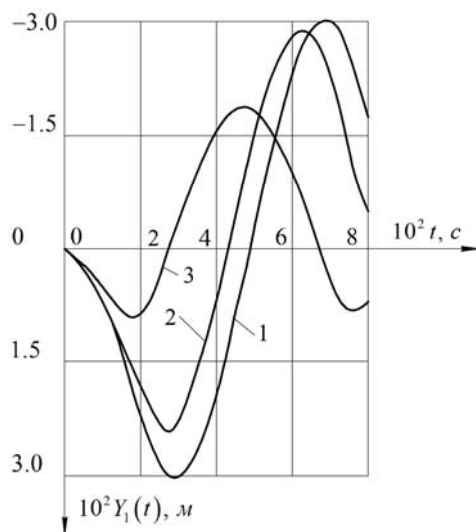


Рис. 2

Как видим, с увеличением времени t целесообразно увеличивать и количество участков K , чтобы не понизилась точность расчета.

На рис. 2 показаны графики перемещений середины балки во времени при различных значениях жесткости опоры. Цифрами 1, 2, 3 обозначены результаты, полученные, соответственно, при $C_1 = 0$, $C_1 = 10^5 \text{ Н/м}$, $C_1 = 10^6 \text{ Н/м}$. Продолжительность действия силы $P = 9 \cdot 10^3 \text{ Н}$ составляла $t_1 = 0,02 \text{ с}$. При наличии опоры амплитуды перемещений балки вниз, куда действовала сила, оказались меньше, чем перемещение балки вверх, в результате отрыва ее от опоры. Этот динамический эф-

факт присущ системам с несимметричной характеристикой упругости [8], где он проявляется при действии мгновенного импульса. Здесь имеем его и для импульса конечной длительности.

На рис. 3 показаны графики $Y_1(t)$, полученные при $C_1 = 10^5$ Н/м; $P = 6 \cdot 10^3$ Н и различной продолжительности действия импульса. Графикам, обозначенным цифрами 1, 2, 3 соответствуют $t_1 = 0,02$ с; $t_1 = 0,05$ с; $t_1 = 0,08$ с. С увеличением времени t_1 амплитуды перемещений балки вниз становятся больше амплитуды перемещений балки вверх, т.е. перестает проявляться эффект несимметрии упругой характеристики.

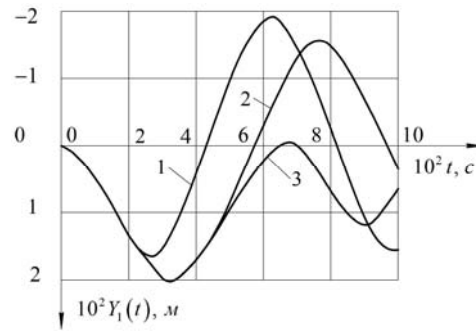


Рис. 3

Рассмотрим далее деформирование балки с двумя одинаковыми опорами ($C_1 = C_2$), которые разделяют пролет на три равные части ($x_1 = l/3$, $x_2 = 2x_1$). Для вычисления перемещений над опорами имеем систему из двух интегральных уравнений в (11). Но, учитывая симметрию системы, при равномерном распределении внешней нагрузки по длине балки, в итоге приходим к одному интегральному уравнению:

$$Y_1(t) = Y_2(t) = \frac{2}{lEJ} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^4} \left\{ Q_m \varphi_m(t) - C_1 \omega_m \left(\sin \frac{m\pi}{3} + \sin \frac{2m\pi}{3} \right) \times \right. \quad (14)$$

$$\left. \times \int_0^{t_1} Y_1(u) \sin[\omega_m(t-u)] du \right\} \sin \frac{m\pi}{3},$$

в котором $Q_m = 2P/m\pi$, а в ряду по m равны нулю члены, где m кратное трем, потому что для таких m $\sin(m\pi/3) = 0$.

При числовом решении уравнения (14) оно тоже сводится к рекуррентному соотношению, аналогичному (13).

Результаты такого решения записаны в табл. 3 (значения $Y_1(t) = Y_2(t)$ при различных C_1 и t). Они получены для: $EJ = 1,2 \cdot 10^6$ Па·м⁴; $\rho F = 13,7$ кг/м; $l = 6$ м; $P = 9 \cdot 10^3$ Н; $t_1 = 0,02$ с и различных значений C_1 . Силу P считали равномерно распределенной по длине балки.

Таблица 3

100t, с	$C_1 = 0$	$C_1 = 10^4$ Н/м	$C_1 = 10^5$ Н/м	$C_1 = 10^6$ Н/м
	Значения $10^3 Y_1(t)$, м			
1	5,709	5,691	5,530	4,126
2	19,281	19,035	16,929	4,331
3	26,559	25,600	17,973	-4,808
4	17,297	15,391	2,154	-11,816
5	-2,752	-4,920	-16,530	-11,470
6	-21,098	-22,235	-24,927	-3,989
7	-26,286	-25,683	-17,782	-
8	-15,087	-13,120	-	-

Наращивание жесткости опор приводит к уменьшению прогибов балки и увеличению частоты колебаний. Вследствие отрыва балки от опор амплитуды перемещений балки вниз меньше, чем амплитуды перемещений вверх, что наблюдалось и для одной опоры в пролете.

Используя изложенную теорию, в дополнение к табл. 3, проведем расчет перемещения балки над одной из опор при различных распределениях силового импульса по длине балки. В расчетах сохраним прежние геометрические и жёсткостные характеристики балки, места расположения двух опор, а также значения P и t_1 . Из заданных ранее значений жёсткостей опор выбираем $C_1 = C_2 = 10^5$ Н/м. Рассмотрим далее четыре распределения $q(x)$.

1. Первое синусоидальное по всей длине балки

$$q(x) = \frac{\pi P}{2l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оно вытекает из (9), когда $\mu = 1$, $h = 0,5l$. Ему, согласно (10), соответствует

$$Q_m = \begin{cases} \pi P / 4 & \text{при } m = 1; \\ 0 & \text{при } m > 1. \end{cases}$$

Вычисленные при этом распределении значения прогибов балки над опорой $Y_{11}(t)$ записаны во второй столбец табл. 4.

2. Второе равномерное, но сила P распределена не по всей длине балки, а только на ее участке между опорами. В этом случае выражения

$$q(x) = \frac{3P}{l} = \text{const}; \quad Q_m = \frac{6P}{\pi m} \sin \frac{m\pi}{6} \cdot \sin \frac{m\pi}{2}; \quad x \in \left[\frac{l}{3}; \frac{2l}{3} \right]$$

легко получить из (5), (7) или (9), (10), задав $\mu = 0$, $h = l/6$. Вычисленные в этом случае значения прогибов $Y_{12}(t)$ записаны в третий столбец табл. 4.

3. Третье распределение задаем в виде двух сил величиной $0,5P$, сосредоточенных над опорами. Оно описывается выражением

$$q(x) = 0,5P \left[\delta \left(x - \frac{l}{3} \right) + \delta \left(x - \frac{2l}{3} \right) \right],$$

в котором $\delta(z)$ – дельта-функция или формулой (5) при $\mu \rightarrow -1$, $h = l/6$. Ему соответствует интеграл

$$Q_m = P \cos \frac{m\pi}{6} \cdot \sin \frac{m\pi}{2},$$

который можно получить из (7) предельным переходом $\mu \rightarrow -1$, положив $h = l/6$. Это распределение приводит к тем значениям прогибов $Y_{13}(t)$, что находятся в четвертом столбце табл. 4.

4. В пятом столбце табл. 4 записаны $Y_{14}(t)$, полученные при действии на балку импульса, сосредоточенного в её центре.

В этом случае:

$$q(x) = P \delta \left(x - \frac{l}{2} \right); \quad Q_m = P \sin \frac{m\pi}{2}.$$

Выражение Q_m можно получить как прямым интегрированием $q(x)$, по длине балки, так и предельным переходом $h \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -1$ в (7) или (10).

Таблица 4

$100 t, c$	$10^3 Y_{11}(t), м$	$10^3 Y_{12}(t), м$	$10^3 Y_{13}(t), м$	$10^3 Y_{14}(t), м$
1	6,825	8,294	7,572	8,645
2	20,894	25,393	23,111	26,526
3	22,176	26,960	24,425	28,259
4	2,645	3,232	2,839	3,459
5	-20,399	-24,795	-22,488	-25,978
6	-30,735	-37,391	-33,802	-39,235
7	-21,923	-26,673	-24,089	-28,001

Сопоставляя значения прогибов, приходим к заключению, что из рассмотренных распределений импульса наиболее опасен вариант сосредоточения его в центре балки. Ему соответствуют наибольшие прогибы и реакции опор.

Выводы.

Исследования показали, что получивший распространение в расчетах нестационарных колебаний континуальных систем метод интегральных уравнений Вольтерра может быть успешно реализован и в расчетах таких систем с односторонними дискретными связями. Описанный ранее эффект несимметрии упругой характеристики балки, подкрепленной односторонней упругой опорой и нагруженной мгновенным импульсом, в определенных условиях проявляется и при нагружении её импульсом конечной продолжительности во времени. Закон распределения импульса по длине балки оказывает существенное влияние на её прогибы и реакции дискретных упругих опор.

РЕЗУЛЬТАТИ. Розглянуто імпульсне деформування балки з шарнірно обіпертими кінцями та дискретним підкріпленням в прольоті пружними лінійними опорами. Припускається, що має місце однібічна в'язь (контакт) балки з опорою, коли опора внаслідок відриву від неї балки піддається лише стиску і не піддається розтягу. Визначення сили контактної взаємодії балки зі стиснутою опорою зведено до розв'язання інтегрального рівняння Вольтера, яке проводиться покроковим у часі числовим методом. Розглянуто два варіанти узагальненого розподілу зовнішнього навантаження по довжині балки. Встановлено умови, за яких максимальне переміщення балки над опорою у напрямі дії зовнішнього силового імпульсу менші, ніж амплітуди переміщення балки у протилежному напрямі, при її русі після порушення контакту з опорою. Показано, що така нерівність спостерігається лише при короткочасних імпульсних навантаженнях і властива системам з несиметричною характеристикою пружності.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Аверин А.Н., Пузаков А.Ю.* Расчет систем с односторонними связями // Строительная механика и конструкции. Воронеж: Воронежский ГАСУ. – 2015. – № 1 (10). – С. 15 – 32.
3. *Воропай А.В.* Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин: монография. – Харьков: Лидер, 2018. – 214 с.
4. *Голоскоков Е.Г., Ольшанский В.П.* Упругий удар по трехслойной плите при наличии сосредоточенных масс и нелинейных опор. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 111 – 116.
5. *Кубенко В.Д., Янчевский И.В.* Нестационарные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки металл – пьезокерамика. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 188 – 196.
6. *Луговой П.З.* Динамика оболочечных конструкций при импульсных нагрузках (обзор). // Прикл. механика. – 1990. – 28, № 8. – С. 3 – 20.

7. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.Ф. Нестационарная динамика оболочечных конструкций. – К.: Киевский университет, 2005. – 536 с.
8. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Деформування імпульсом балки, однобічно підкріпленої пружною опорою. // Механіка та машинобудування. – 2018. – № 1. – С. 37 – 46.
9. Ольшанский В.П., Тищенко Л.Н., Ольшанский С.В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков: Міськдрук, 2012. – 320 с.
10. Ольшанский В.П., Филиппов А.П. Колебания трёхслойной балки-полосы при ударе // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 12. – С. 92 – 96.
11. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 376 с.
12. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трёхслойных элементов конструкций. – Гомель: Бел.ГУТ. – 2003. – 367 с.
13. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
14. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – К.: Наук. думка, 1978. – 183 с.
15. Янютин Е.Г., Ячевский И.В., Воронай А.В. и др. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
16. Abrate S. Impact on composite structures. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 306 p.
17. Babaev A.E., Babaev A.A., Yancevskii I.V. Active Damping of the Nonstationary Flexural Vibrations of Bimorph Beam // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 7. – P. 303 – 314.
18. Chan T., Ashbo D. Moving axle load from multi-span continuous bridge: laboratory study // J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – 128. – P. 521 – 527.
19. Kubenko V.D., Yancevskii I.V. Vibrations of a Nonclosed Two-Layer Spherical Electroelastic Shell under Impulsive Electromechanical Loading // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 806 – 811.
20. Pi Y., Ouyang H. Lyapunov-based boundary control of a multi-span beam subjected to moving masses // J. of vibration and control. – 2015. – P. 1 – 14.
21. Sniady P., Zakes F. Drgania wieloprzeslowych ciaglych belek przyzmatycznych wywolane sila ruchoma // J. of Civil Engineering, Environment and Architecture. – 2014. – 61 (2/14). – P. 185 – 195.

Поступила 20.09.2018

Утверждена в печать 04.06.2019