

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИЛЭМБОВСКИХ ВОЛН  
В УПРУГОМ СЛОЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ  
С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

**Abstract.** The problem of quasi-Lamb waves propagating in elastic layer that interact with a half-space of a viscous compressible fluid is considered. On the basis of the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for elastic layer, the dispersion curves are constructed and propagation of quasi-Lamb waves within the wide range of frequencies are studied. An effect of the viscous compressible fluid and thickness of the elastic layer on the phase velocities and attenuation coefficients of quasi-Lamb modes are analyzed. An approach developed and the results obtained allow to establish the limits of applicability of the model of an ideal fluid for the wave processes. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Key words:** elastic layer, half-space of viscous compressible fluid, quasi-Lamb modes, phase velocity, attenuation coefficient.

**Введение.**

Проблема описания полного спектра распространяющихся нормальных волн Лэмба в упруго-жидкостных волноводах, анализа их дисперсионных характеристик, а также поведения их как в длинноволновом, так и в коротковолновом диапазонах частотного спектра относится к классическим задачам механики [1, 3, 4, 5, 11 – 13, 16 – 19, 22, 29]. Закономерности распространения этих волн широко используются в сейсмологии, сейсморазведке, гидроакустике, а также при разработке ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах конструкций [7, 8, 14, 15, 20, 21, 24 – 28, 30 – 32 и др.]. Значительное практическое использование акустических волн ставит задачу более полного учета свойств реальных упругих и жидких сред [2, 3 – 13, 16 – 19]. К числу таких факторов относится вязкость жидкости. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этого свойства жидкости, приведены в публикациях [2 – 5, 7 – 9, 11 – 13, 16 – 19, 22, 23, 29 и др.].

В данной работе модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости привлекается для исследования распространения волн в системе «жидкое полупространство – упругий слой». При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линеаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 16 – 19].

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из изотропного упругого слоя и полупространства вязкой сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений клас-

сической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье – Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы «упругое тело – вязкая сжимаемая жидкость» принимают такой вид [3 – 9, 16 – 19]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const};$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left( \frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (1.3)$$

В равенствах (1.1) – (1.3) введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме материала упругого тела;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$  относительно состояния покоя;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $P_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле.

Равенства (1.1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости относительно состояния покоя и без учета тепловых эффектов описывают соотношения (1.2), (1.3).

Далее предположим, что изотропный упругий слой занимает объем ( $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ ) контактирует с полупространством вязкой сжимаемой жидкости ( $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 < \infty$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ ). Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ .

Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1.1) – (1.3) при следующих граничных условиях:

$$P_{21} \Big|_{z_2=0} = \sigma_{21} \Big|_{z_2=0}; \quad P_{22} \Big|_{z_2=0} = \sigma_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad \sigma_{21} \Big|_{z_2=-h} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h} = 0; \quad (1.4)$$

$$v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (1.5)$$

## §2. Методика решения.

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [3 – 9, 16 – 19]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн  $\chi_j = X_j(z_2) \times \exp[i(kz_1 - \omega t)]$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i$  – мнимая единица ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее, применяя метод Фурье, приходим к трем задачам о собственных значениях для уравнений движения упругого тела и жидкости. Решая их, определяем соответствующие собственные функции. После подстановки полученных общих решений в граничные условия (1.4), (1.5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{mn}(c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (m, n = \overline{1, 6}), \quad (2.1)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  – толщина упругого слоя;  $c_s$  – скорость волны сдвига в материале упругого тела ( $c_s^2 = \mu / \rho$ ).

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.1) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 3 – 8, 10 – 13, 23]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (2.1) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого слоя с несжимаемой вязкой жидкостью. Если динамический коэффициент вязкости жидкости  $\mu^*$  принять равным нулю, то из (2.1) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  из равенства (2.1) получим уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 3 – 8, 10]. Если дополнительно устремить  $h$  к бесконечности, то получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 3 – 8, 12, 23]. При  $\rho_0 \neq 0$ ,  $\mu^* = 0$  и  $h \rightarrow \infty$  равенство перейдет в уравнение Стоунли – Шольте [1, 3 – 5, 12, 23].

### §3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.1) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. Первая состоит из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбираем следующими: упругий слой –  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,

$\lambda = 6 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6$  Па; полупространство жидкости –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым и мягким. Вторая система представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругий слой –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10}$  Па; жидкость –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду жестких.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 1 – 23.

На рис. 1 – 11 приведены графики, полученные для гидроупругой системы, состоящей из слоя резины (податливый материал) и полупространства воды. Для волновода, упругий слой которого из стали (жесткий материал) графический материал представлен на рис. 12 – 23.

На рис. 1 приведены графики, отражающие влияние идеальной жидкости на волновой процесс и иллюстрирующие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ). При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе при  $\bar{\mu}^* = 0$ . Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для упругого слоя, который не взаимодействует с жидкостью.

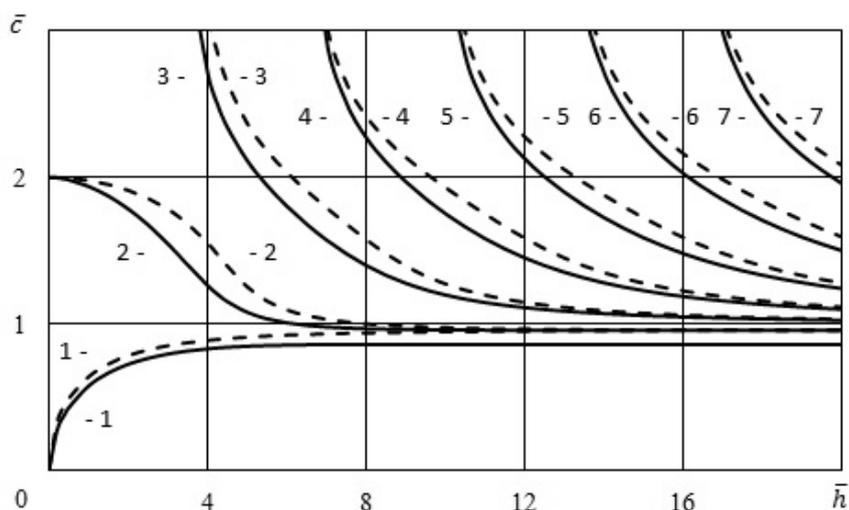


Рис. 1

Из графиков рис. 1 следует, что для чисто упругого волновода (штриховые линии) скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба, распространяющихся вдоль нижней и верхней свободных поверхностей слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода (нулевая антисимметричная) стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды (нулевая симметричная) – соответственно, к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

В гидроупругом волноводе (сплошные линии) при росте толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость первой моды, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$ ) снизу. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Ее скорость стремится к

скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с увеличением толщины, как известно [1], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхностей внутрь слоя и локализуются в его толще.

Графики, представленные на рис. 2, 3, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из податливого упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ). На них приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 2) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 3) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной моды 1 (рис. 1).

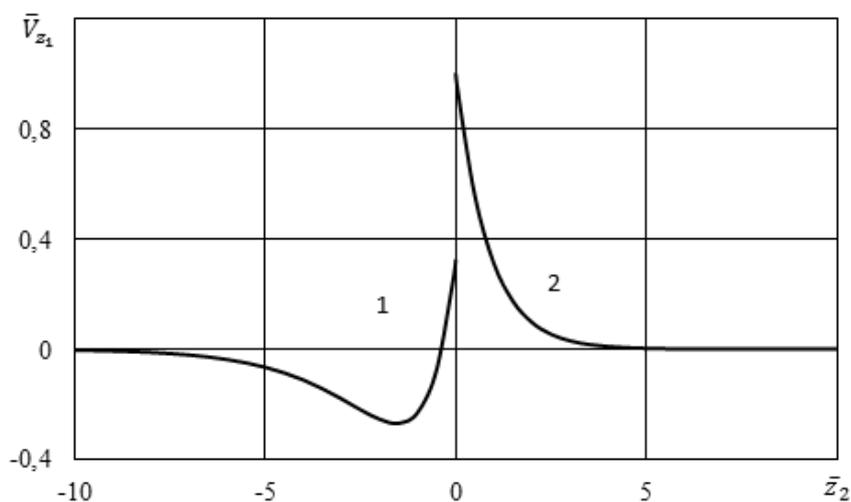


Рис. 2

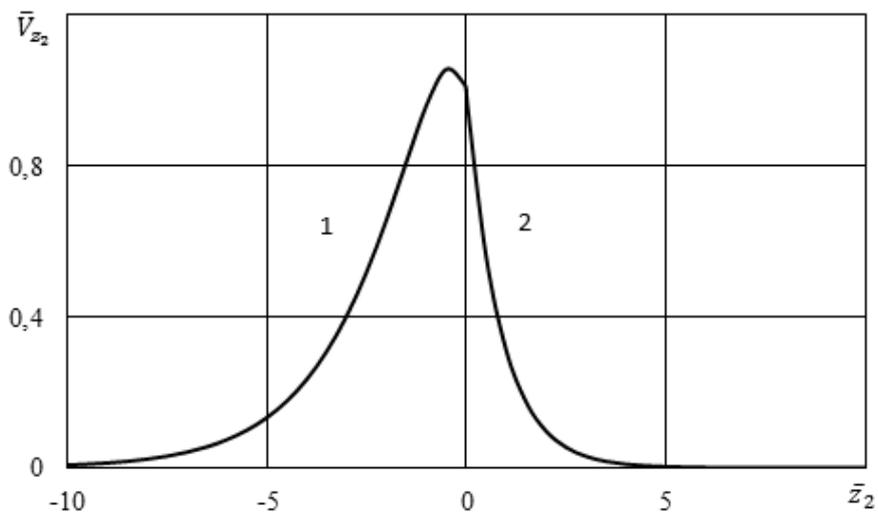


Рис. 3

Графики, представленные на рис. 4, 5, отражают распределение амплитуд продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 4) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 5) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) в зависимости от изменения поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для квазилэмбовской моды 2 (рис. 1) при  $\bar{\mu}^* = 0$ .

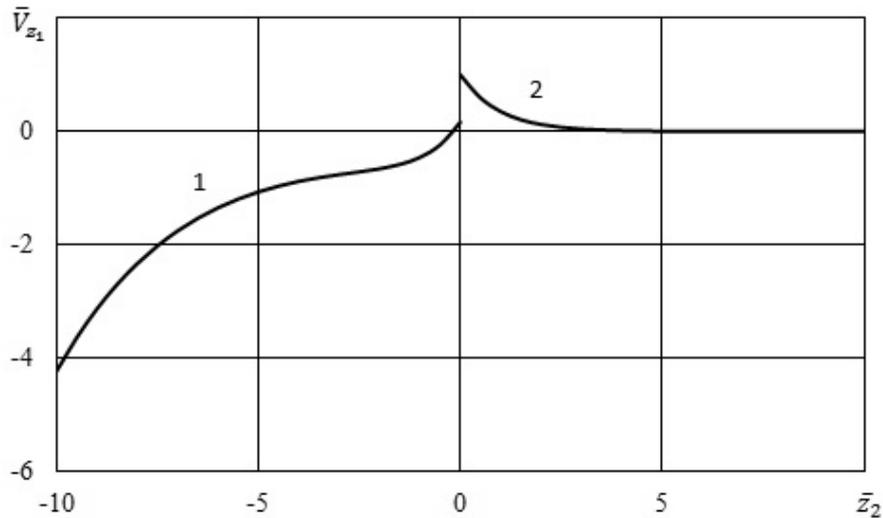


Рис. 4

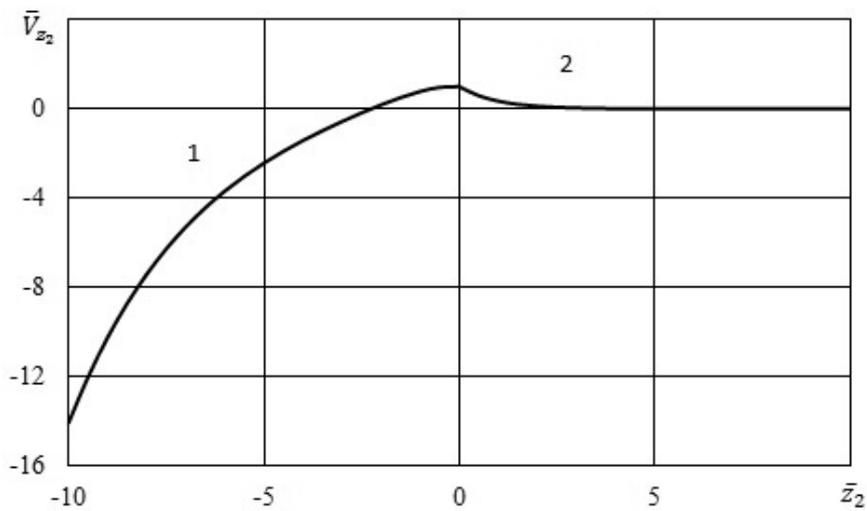
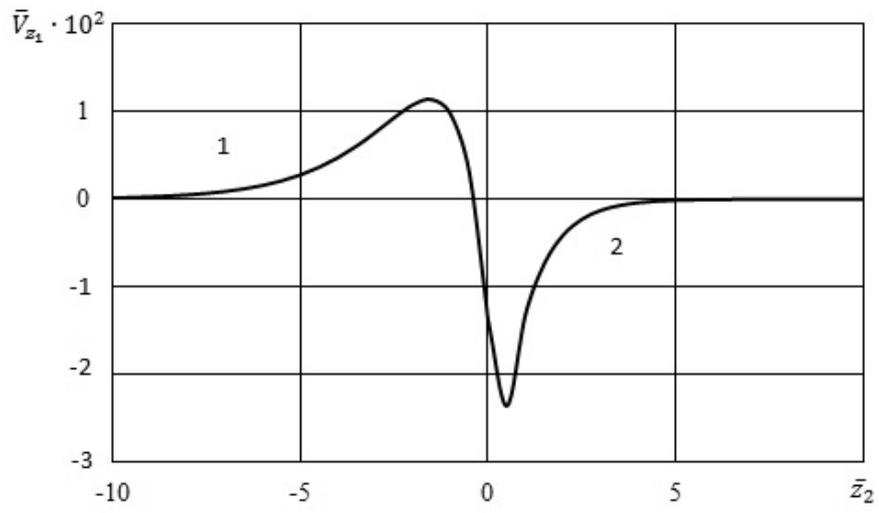


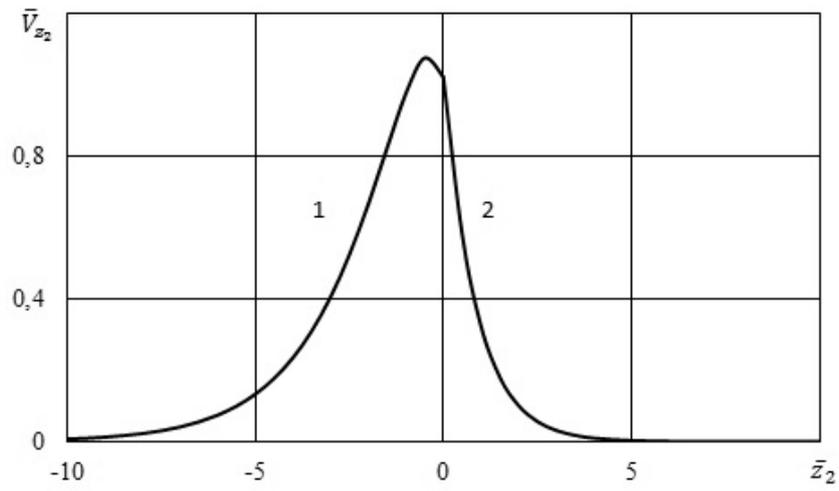
Рис. 5

Графики, представленные на рис. 2 – 5, получены для первой и второй низших квазиповерхностных мод 1 и 2 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ . Отметим, что разрыв продольных смещений  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле (кривая 1) и в идеальной жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ( $\bar{z}_2 = 0$ ) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости (рис. 2, 4).

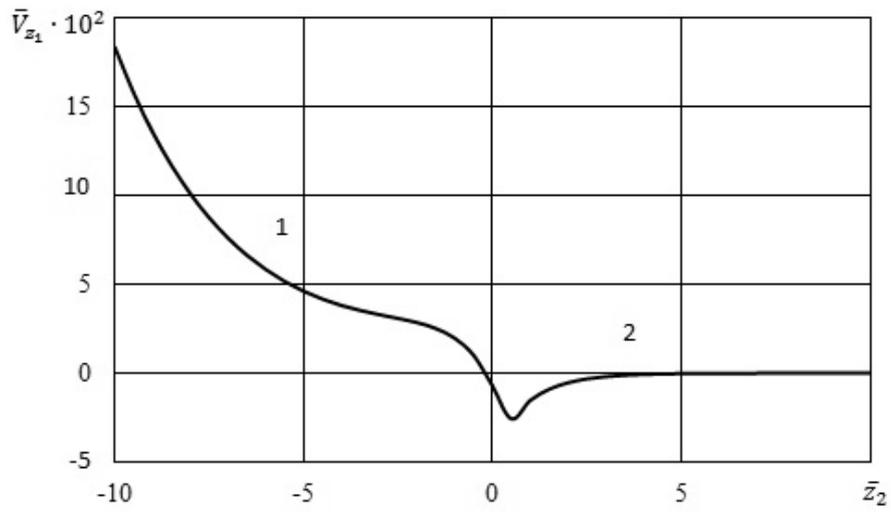
Аналогичные зависимости для гидроупругой системы, состоящей из податливого упругого слоя и полупространства вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ), приведены на рис. 6 – 9.



*Puc. 6*



*Puc. 7*



*Puc. 8*

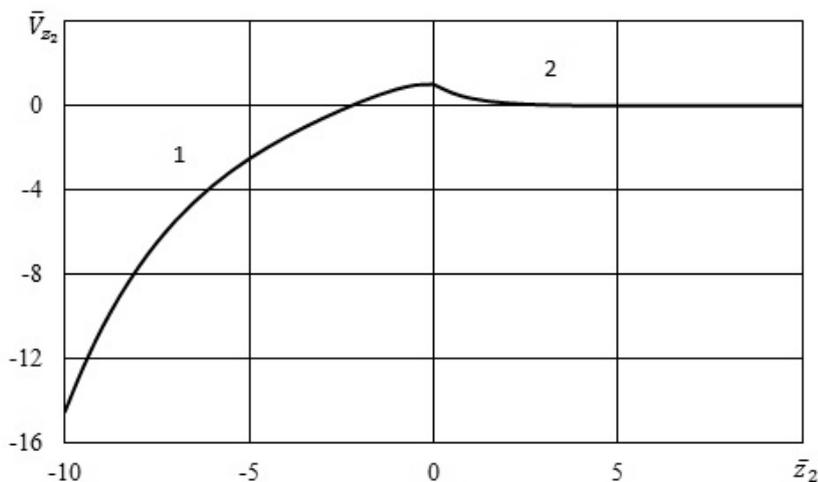


Рис. 9

Из графиков рис. 2, 3, 6, 7 следует, что квазиповерхностная мода 1 (волна типа Стоунли) при выбранных механических параметрах системы  $\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_R = 0,955318$ , распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как упругого тела, так и жидкости. Для квазилэмбовской моды 2, как следует из графиков кинематических характеристик, приведенных на рис. 4, 5, 8, 9, продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения в жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ) с глубиной становятся незначительными. Для упругого тела ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ), наоборот, характерно сосредоточение волновых движений. При этом продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения медленно убывают с глубиной. Как видно из графиков, глубина проникновения ее в упругий слой значительно больше глубины проникновения в жидкость. Это свидетельствует о том, что движения моды 2 при  $\bar{h} = 20$  в случае податливого материала (резина) с механическими параметрами системы  $\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_R = 0,955318$  происходят, преимущественно, в упругом слое. Из графиков также следует, что усиление связи между упругим телом и жидкой средой, обусловленное вязкостью жидкости, не оказывает заметного влияния на изменение локализации квазиповерхностных мод 1 и 2 (рис. 2 – 9).

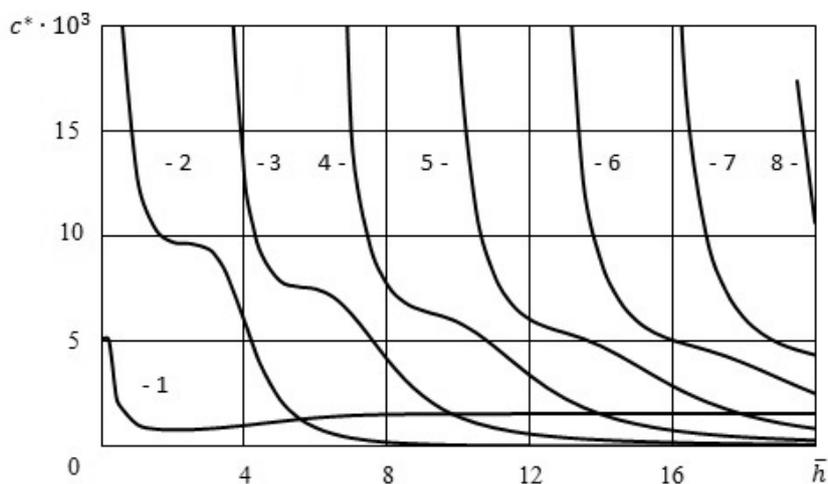


Рис. 10

Характер влияния вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 10, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод  $c^*$  [ $c^* = (c_i - c_v)/c_i$ ,  $c_i$  – фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью;  $c_v$  – фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью] от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ .

На рис. 11 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

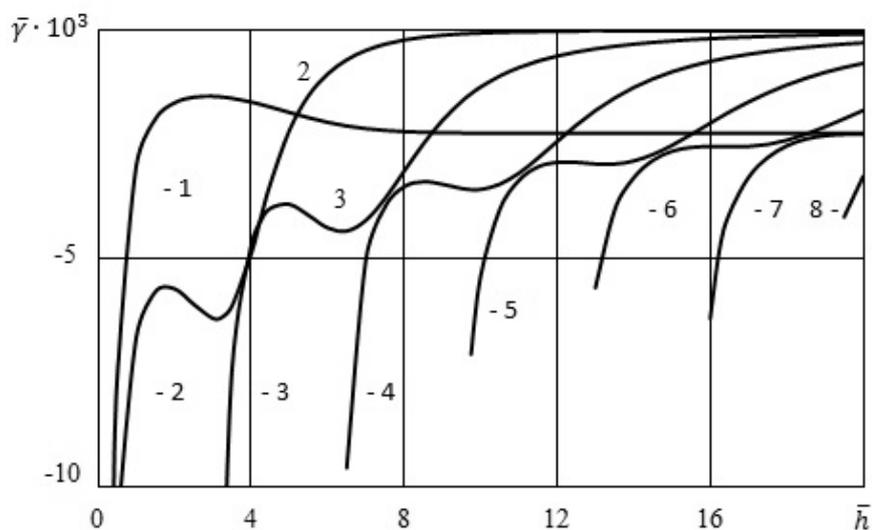


Рис. 11

Графики, приведенные на рис. 10, показывают, что в гидроупругом волноводе вязкость жидкости для ряда квазилэмбовских мод вызывает изменение критических частот и смещение дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это приводит к тому, что в окрестности частот, при которых происходит зарождение мод, влияние вязкости жидкости на величины фазовых скоростей этих мод становится значительным. С увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на величины фазовых скоростей всех мод (кроме первой) уменьшается.

Результаты, полученные численно для гидроупругого волновода, упругий слой которого из стали (жесткий материал), представлены в виде графиков на рисунках 12 – 23.

На рис. 12 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  [1, 10]. На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

Из графиков, полученных для упругого слоя из стали (жесткий материал) и представленных на рис. 12 [1, 10], следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

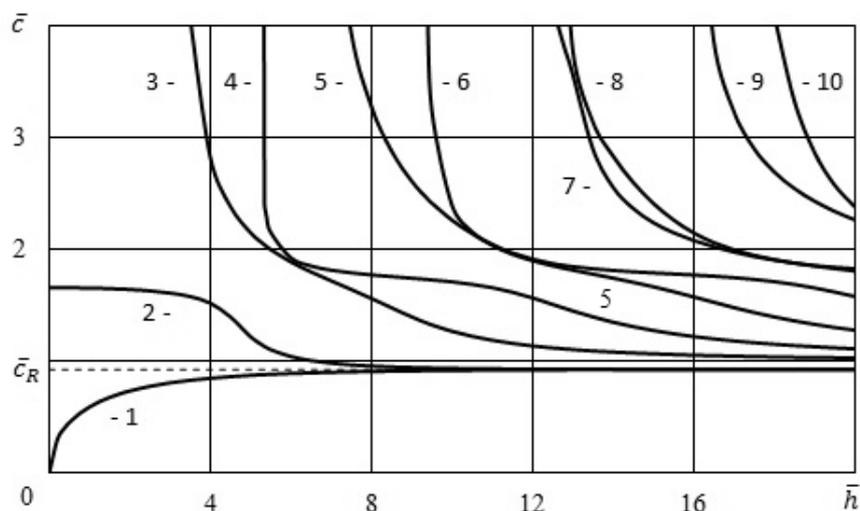


Рис. 12

На рис. 13 для упругого слоя, взаимодействующего с полупространством идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ), приведен график зависимости безразмерной величины фазовой скорости  $\bar{c}$  единственной существующей низшей моды от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость моды при возрастании толщины.

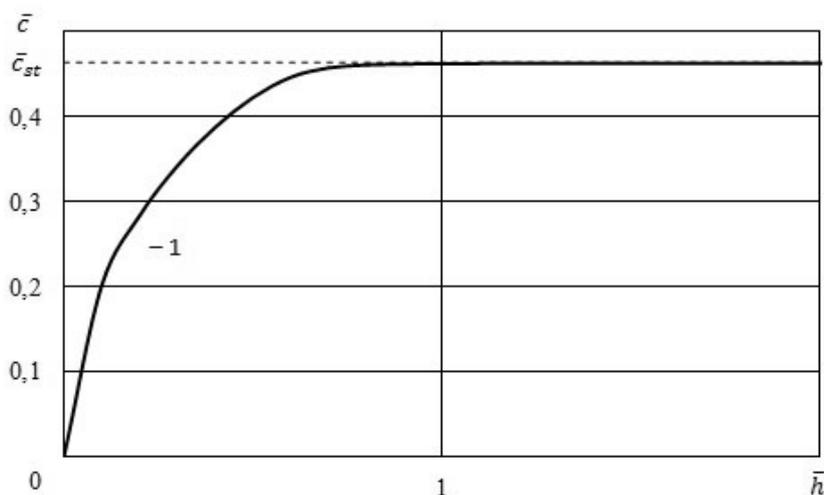


Рис. 13

Из рис. 13 следует, что при выполнении между механическими параметрами компонентов гидроупругой системы условия  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923008$ ) в упругом слое (жесткий материал), взаимодействующем с идеальным жидким полупространством, без демпфирования распространяется лишь одна низшая мода. Ее скорость с ростом толщины упругого слоя (частоты) стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

Графики, представленные на рис. 14, 15, отражают распределение безразмерных амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из стального (жесткий материал) упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ). Они получены для первой низшей квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ .

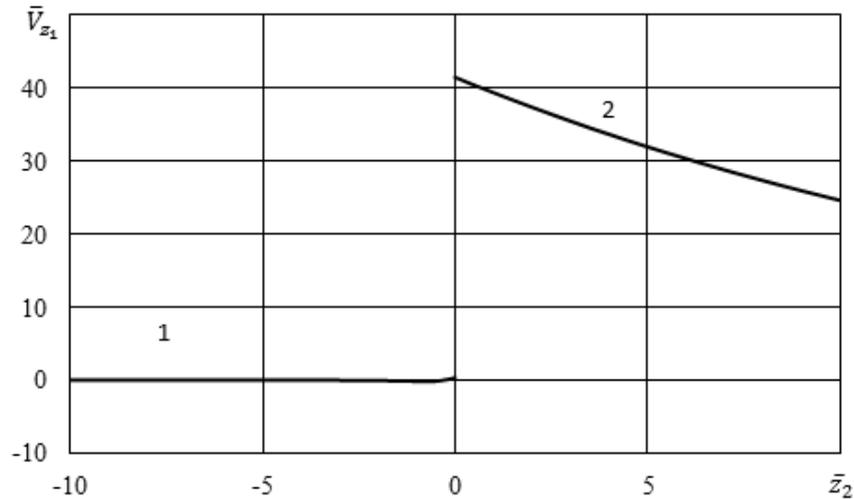


Рис. 14

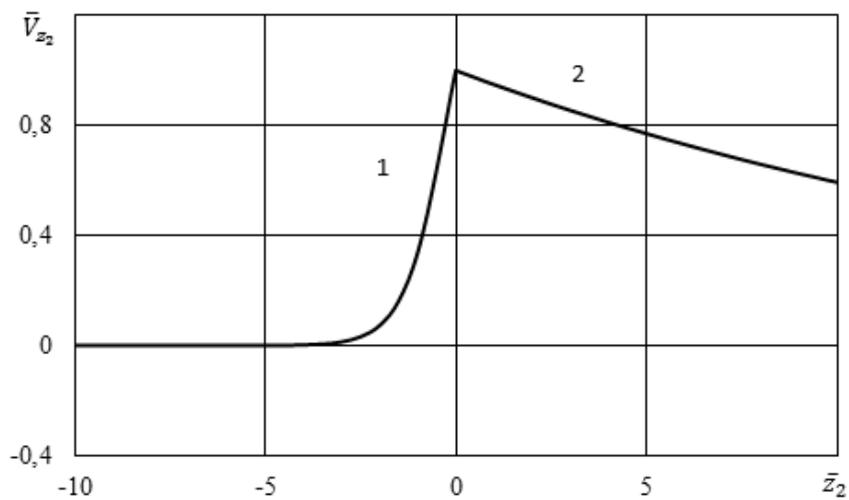


Рис. 15

Из графиков кинематических характеристик, приведенных на рис. 14, 15, следует, что продольные смещения  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) незначительные, а поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения быстро убывают с глубиной. Для жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ), наоборот, характерна противоположная ситуация. В ней и продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения медленно убывают с глубиной. Это свидетельствует о том, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае жесткого материала (сталь) с механическими пара-

метрами системы  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923008$  происходят, в отличие от податливого упругого слоя, преимущественно, в жидкости.

Влияние вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости квазилэмбовских мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 16. На нем представлены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой, второй и третьей мод при возрастании толщины.

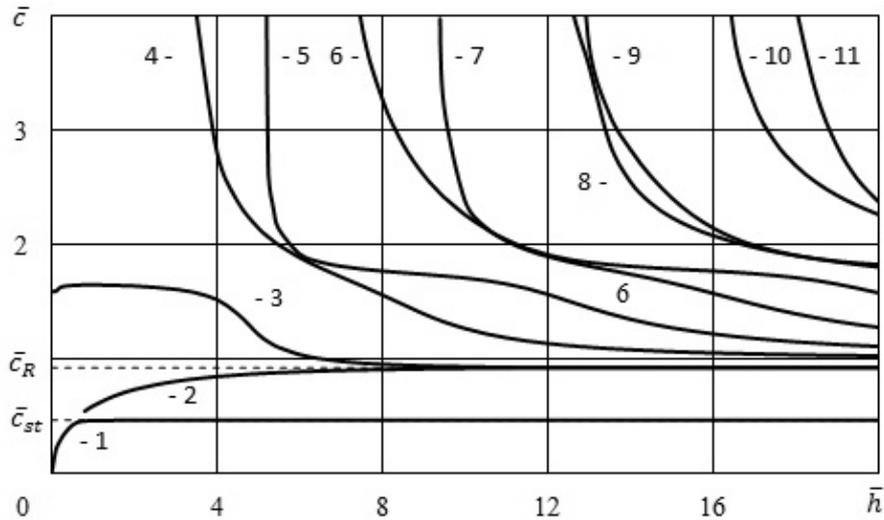


Рис. 16

Из графического материала, представленного на рис. 16, следует, что в случае взаимодействия жесткого упругого слоя с вязким жидким полупространством ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) в гидроупругой системе распространяются не только низшая первая мода, но и весь спектр квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом с увеличением толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) снизу. Скорость второй моды, распространяющейся вдоль приконтактной области, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) снизу, а скорость третьей моды, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) сверху. Величины скоростей всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела и, как указывалось выше, их движения локализуются в толще упругого слоя. Характерной особенностью всех мод, возникающих при взаимодействии упругого слоя с полупространством вязкой жидкости, отличающих их от системы с идеальной жидкостью, является то, что они распространяются с затуханием.

Графики на рис. 17, 18 иллюстрируют распределение безразмерных амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из стального (жесткий материал) упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). Они получены для первой низшей квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ .

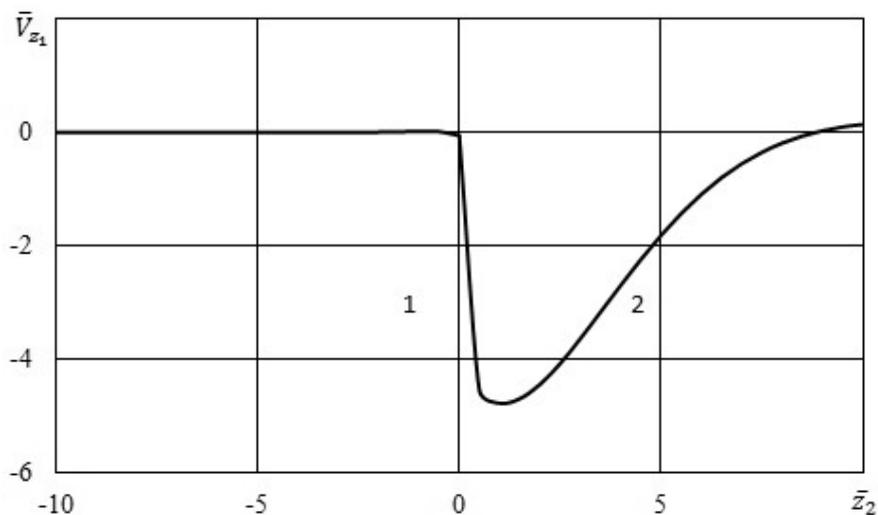


Рис. 17

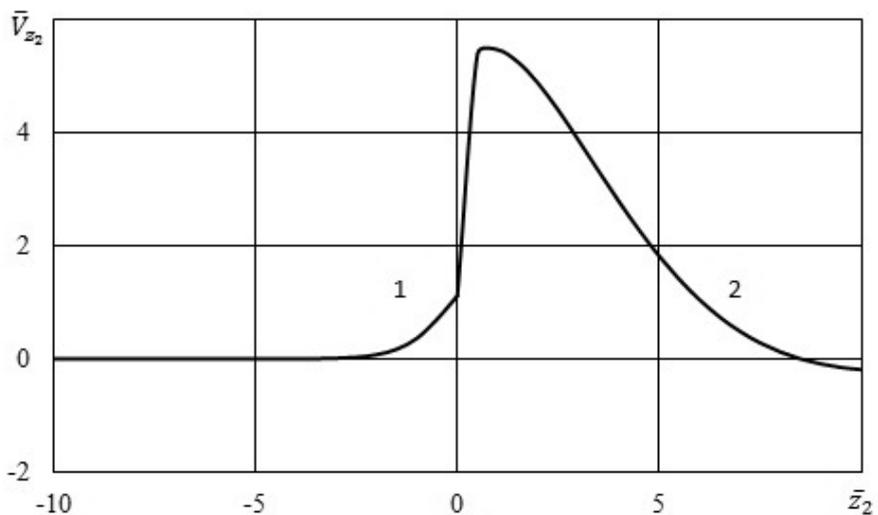


Рис. 18

В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «сталь (жесткий материал) – вода» таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазираleighовской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ). При этом, как следует из графиков рис. 17, 18, в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, преимущественно, в приконтактной области жидкого полупространства. Вследствие того, что низшая мода не проникает в твердое тело в приповерхностной области упругого слоя, граничащей с вязкой жидкостью, распространяется мода 2, скорость которой, как указано выше, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) снизу, подобно случаю твердого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

Как видно из графиков (рис. 17, 18), усиление связи между упругим телом и жидкой средой, обусловленное вязкостью жидкости, приводит к уменьшению глубины проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость.

Графики, приведенные на рис. 19, 20, получены для квазилэмбовской моды 2 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ . Они иллюстрируют распределение безразмерных амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из стального (жесткий материал) упругого слоя ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ) вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ).

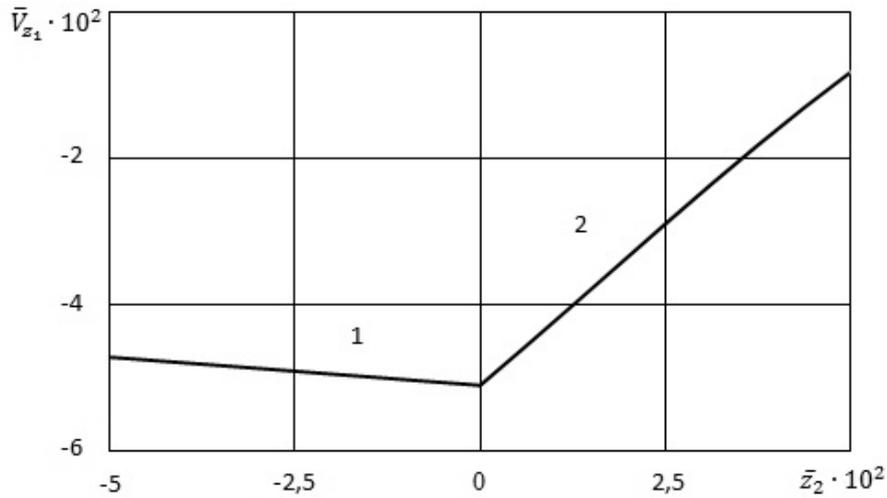


Рис. 19

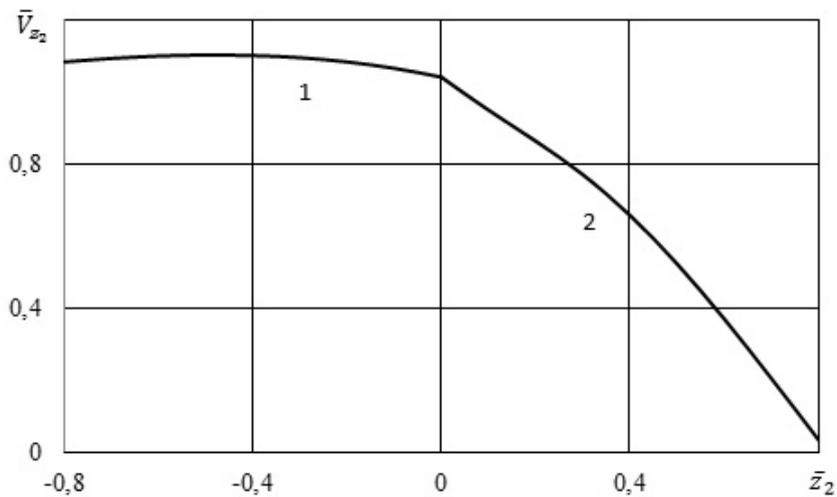


Рис. 20

Из кинематических характеристик квазилэмбовской моды 2, приведенных на рис. 19, 20, видно, что она, распространяясь вдоль границы раздела сред, в высокочастотной части спектра локализуется, преимущественно, в приконтактной области упругого слоя, так как глубина проникновения ее движений в упругое тело больше, чем в жидкость.

На рис. 21 – 23 для гидроупругой системы «упругий слой из стали (жесткий материал) – вода» приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания  $\bar{\gamma}$  квазилэмбовских мод от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

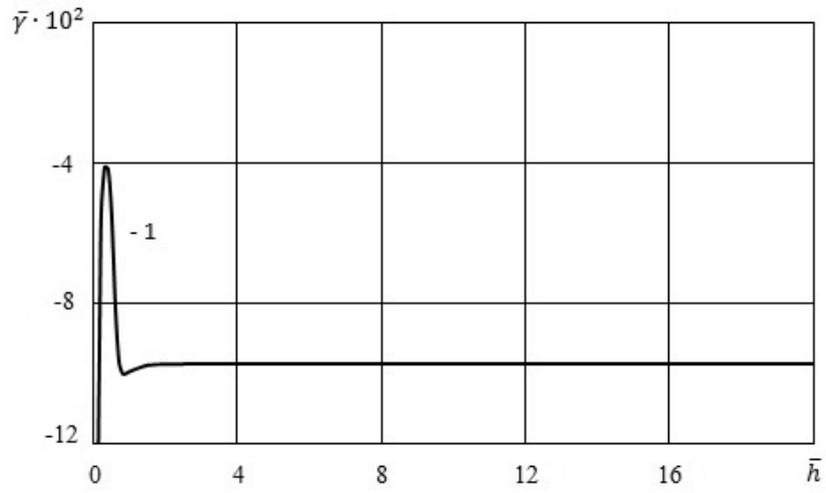


Рис. 21

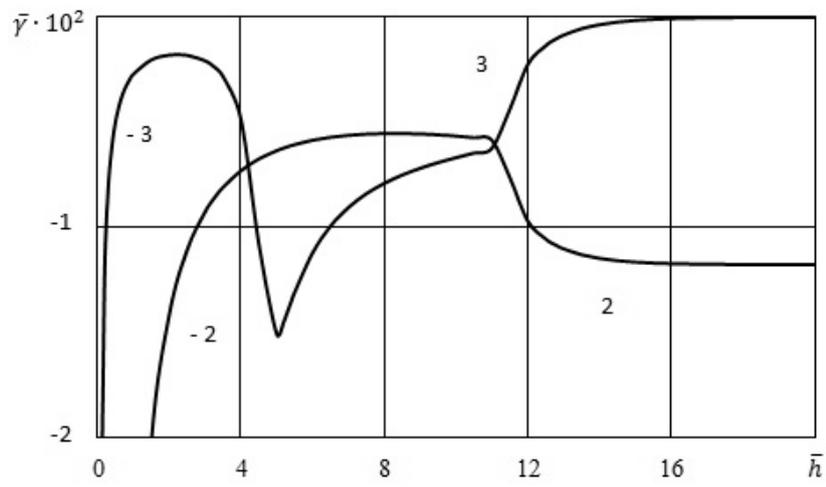


Рис. 22



Рис. 23

Графики, приведенные на рис. 21 – 23, показывают, что в этой гидроупругой системе так же, как и в случае податливого упругого слоя, влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. Для всех мод (кроме первой и второй) с увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкой жидкости на величины их фазовых скоростей уменьшается.

#### **§4. Особенности влияния вязкости жидкости на дисперсию и фазовые скорости квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.**

Графики, приведенные на рис. 1, 6, 7, 10, 11 и 16 – 18, 21 – 23, отражают особенности взаимодействия упругого слоя с вязким жидким полупространством. Как упоминалось выше, движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с третьей для податливого материала и с четвертой для жесткого материала, с возрастанием толщины удаляются от его поверхностей и локализуются в его толще. Это является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьшению величин коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка мода 1 (как для податливого материала, так и для жесткого материала) с возрастанием толщины упругого слоя устремляется к границе раздела сред и трансформируется в квазиповерхностную волну Стоунли. Этим объясняется характер влияния вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении величины фазовой скорости и увеличении коэффициента затухания этой моды. Кроме того, анализ также показывает, что в тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями, соответственно, и влияние вязкости наименьшее. Из графиков также следует, что вязкость жидкого полупространства вызывает изменение критических частот мод и смещение их дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это приводит к значительному изменению величин фазовых скоростей мод в окрестности толщин (частот), при которых они зарождаются.

Сравнивая графики, приведенные на рис. 1 и 13, видим, что в случае взаимодействия упругого слоя с идеальным жидким полупространством соотношение между величиной скорости волны звука в жидкости и величиной скорости квазирэлееской волны является критерием, определяющим возможность существования нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка в гидроупругой системе. Для системы с податливым упругим слоем имеет место соотношение  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ . В этом случае, как видно из рис. 1, жидкость не препятствует энергетическому обмену между поверхностями податливого упругого слоя (взаимодействию объемной и сдвиговой волн на них), что способствует возникновению в гидроупругой системе нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка. В случае упругого слоя из жесткого материала при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  (рис. 13) идеальная жидкость препятствует энергетическому обмену между его поверхностями. Это приводит к тому, что в упругом слое не формируются нормальные волны высокого порядка и в гидроупругой системе распространяется лишь одна низшая квазиповерхностная волна, которая при возрастании толщины (частоты) трансформируется в волну Стоунли. Как видим, при взаимодействии упругих слоев как из податливого (рис. 10), так и из жесткого материала (рис. 16) с вязким жидким полупространством в гидроупругих системах при любых соотношениях между указанными механическими параметрами всегда возникают квазилэмбовские моды высокого порядка, распространяющиеся с затуханием.

Анализ полученных результатов также показывает, что вязкость жидкости в случае упругого слоя из жесткого материала уменьшает глубину проникновения низшей квазиповерхностной моды в жидкость.

### Заклучение.

На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкого жидкого полупространства и линейных уравнений классической теории упругости для твердого слоя построены дисперсионные кривые и исследовано распространение квазилэмбовских волн в широком диапазоне частот. На примере двух гидроупругих волноводов выполнен анализ влияния вязкой жидкости и толщины упругого слоя на фазовые скорости и коэффициенты затухания мод.

Одной из основных особенностей влияния вязкой жидкости на волновой процесс в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, является то, что она (в отличие от идеальной жидкости) способствует энергетическому обмену между поверхностями упругого слоя (взаимодействию объемной и сдвиговой волн). Это обуславливает формирование в упругом слое нормальных волн высокого порядка и возникновение в гидроупругой системе полного спектра квазилэмбовских мод, распространяющихся с демпфированием.

Полученные результаты дают основание сделать вывод о том, что при проведении расчетов реальных жидких сред применение модели идеальной жидкости к гидроупругому волноводу с упругим слоем из сильно жесткого материала (металлы, сплавы) может привести к получению весьма неточных не только количественных, но и качественных результатов.

Развитый подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости модели идеальной сжимаемой жидкости.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення квазілэмбовських хвиль у пружному шарі, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення квазілэмбовських хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкої стисливої рідини та товщини пружного шару на фазові швидкості та коефіцієнти згасання квазілэмбовських мод. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити границі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
11. *Bagno A.M.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 139 – 148.
12. *Bagno A.M.* Dispersion Properties of Lamb Waves in an Elastic Layer–Ideal Liquid Half-Space System // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 609 – 616.

13. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
14. *Drinkwater B.W., Wilcox P.D.* Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // *NDT & E Int.* – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
15. *Gibson A., Popovics J.* Lamb wave basis for impact-echo method analysis // *J. Engineering Mechanics.* – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
16. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
17. *Guz A.N.* Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part I // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
18. *Guz A.N.* The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
19. *Guz A.N.* Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
20. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // *J. Phys. Sci. and Appl.* – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
21. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
22. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Liquid Viscosity on Dispersion of Quasi-Lamb Waves in an Elastic-Layer-Viscous-Liquid-Layer System // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 4. – P. 361 – 367.
23. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
24. *Jhang K.Y.* Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing.* – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
25. *Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C.* Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures.* – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
26. *Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H.* Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // *Int. J. of Plasticity.* – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
27. *Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K.* Ultrasonic Lamb wave tomography // *Inverse Problems.* – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
28. *Liu L., Ju Y.* A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // *NDT & E Int.* – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
29. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // *Int. J. Non-Lin. Mech.* – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
30. *Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C.V.* Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // *Smart Materials and Structures.* – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
31. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design.* – 2012. – **35**. – P. 572 – 588.
32. *Spies M.* Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // *Ultrasonics.* – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 10.06.2016

Утверждена в печать 04.06.2019