УДК 515.12

В. Л. Бридун, М. М. Зарічний

МОНАДА ЙМОВІРНІСНИХ МІР У КАТЕГОРІЇ НЕАРХІМЕДОВИХ ГРУБИХ ПРОСТОРІВ

Побудовано монаду ймовірнісних мір на категорії неархімедових грубих просторів, породжених ультраметричними просторами.

Вступ. У зв'язку з потребами семантики мов програмування розглянуто [2] ультраметрику на множині ймовірнісних мір з компактними носіями на ультраметричному просторі. Показано, що ця конструкція визначає функтор у категорії ультраметричних просторів та нерозтягальних відображень. Встановлено [4], що цей функтор визначає монаду на вказаній категорії.

Нижче розглядаємо функтор ймовірнісних мір у підкатегорії грубої категорії Дж. Роу [7], породженій ультраметричними просторами. Отримані грубі структури є неархімедовими. Зазначимо, що груба геометрія присвячена дослідженню метричних просторів та їх узагальнень (грубих просторів, кульових структур Протасова [6]) «у великій шкалі». Функтор гіперпростору у грубій категорії розглядали раніше [1].

Означення і факти. Нагадаємо, що *грубою структурою* на множині X називають сім'ю $\mathcal{E}$ оточень діагоналі в $X \times X$, що задовольняє такі умови:

1) для кожного $U \in \mathcal{E}$ існує таке $V \in \mathcal{E}$, що $U^2 \subset V$;

2) для кожного $U \in \mathcal{E}$ існує таке $V \in \mathcal{E}$, що $U^{-1} \subset V$.

При цьому грубу структуру називають *унітальною*, якщо $\bigcup \mathcal{E} = X \times X$. Назвемо грубу структуру $\mathcal{E}$ на X *неархімедовою*, якщо для кожного $U \in \mathcal{E}$ маємо $U^2 = U$ та $U^{-1} = U$. Іншими словами, сім'я $\mathcal{E}$ складається з відношень еквівалентності.

<u>Приклад.</u> Нагадаємо, що псевдометрику d на множині X називають ультрапсевдометрикою, якщо для неї виконано строгу нерівність трикутника:

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\} \text{ для всіх } x,y,z \in X.$$

Як і кожна метрика, ультрапсевдометрика d породжує обмежену грубу структуру

$$\mathcal{E} = \{\{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) < R\} \mid R > 0\}.$$

Нескладно перевірити, що ця груба структура є неархімедовою.

Підмножину A в грубому просторі $(X, \mathcal{E})$ називають *обмеженою*, якщо існують такі $x \in X$ і $U \in \mathcal{E}$, що $A \subset U(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in U\}$.

Нехай $(X_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1,2,$ – грубі простори, відображення $f : X_1 \to X_2$ називають *грубим*, якщо воно:

1) *грубо рівномірне*, тобто для кожного $U \in \mathcal{E}_1$ існує таке $V \in \mathcal{E}_2$, що $(f \times f)(U) \subset V$;

2) прообраз кожної обмеженої підмножини в X_2 є обмеженою підмножиною в X_1.

Неархімедові грубі простори та їх грубі відображення утворюють категорію, яку позначатимемо NACS.

ISSN 1810-3022. **Прикл. проблеми мех. і мат.** – 2012. – **Вип.** 10. – **С.** 86–89.

Нехай X – топологічний простір, через $exp\,X$ позначаємо множину всіх непорожніх компактних підмножин у X. Для кожного $U \in \mathcal{E}$ і $A \in exp\,X$ позначаємо $U(A) = \bigcup\{U(x) \mid x \in A\}$.

Твердження 1. Якщо $(X, \mathcal{E})$ – неархімедовий грубий простір, то $(exp\, X, \mathcal{E}_H)$ – теж неархімедовий грубий простір, де

$$\mathcal{E}_H = \{\{(A, B) \in exp\ X \times exp\ X \mid A \subset U(B), B \subset U(A)\} \mid U \in \mathcal{E}\}.$$

Доведення. Досить довести, що якщо $A, B, C \in exp\, X$ і $U \in \mathcal{E}$, то з включень $A \subset U(B)$, $B \subset U(C)$ випливає $A \subset U(C)$.

Отже, якщо $a \in A$, то існує таке $b \in B$, що $(a, b) \in U$. Аналогічно, існує таке $c \in C$, що $(b, c) \in U$. Тоді з рівності $U^2 = U$ маємо, що $(a, c) \in U$, тобто $A \subset U(C)$. Аналогічно [1] одержуємо функтор експоненти у категорії NACS.

Функтор ймовірнісних мір. Надалі обмежуємося певною підкатегорією UMCS категорії NACS, об'єктами якої є грубі простори, породжені ультраметриками.

Для кожного топологічного простору X через $P(X)$ позначаємо простір ймовірнісних мір на X з компактними носіями. Через δ_x (або $\delta(x)$) – міру Дірака, зосереджену в точці $x \in X$. Якщо $\mu \in P(X)$, то $\sup p_X(\mu) = \sup p(\mu)$ означає носій міри μ.

Нехай d – ультраметрика на X і $\mathcal{E}$ – обмежена груба структура, породжена ультраметрикою d. Для кожного $U \in \mathcal{E}$ приймемо:

$$\tilde{U} = \{(\mu, \nu) \in P(X) \times P(X) \mid \mu(U(x)) = \nu(U(x)) \text{ для кожного } x \in X\}.$$

Твердження 2. Сім'я множин $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{U} \mid U \in \mathcal{E}\}$ є неархімедовою грубою структурою на X, яка залежить лише від грубої структури, породженої ультраметрикою d, а не від самої ультраметрики d.

Доведення. Покажемо, що груба структура $\tilde{\mathcal{E}}$, породжена ультраметрикою $\tilde{d}$, задана формулою

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(B_r(x)) = \nu(B_r(x))\} \text{ для кожного } x \in X\}.$$

Єдину умову, яку потрібно перевірити, є суттєва нерівність трикутника. Отже, нехай $\mu, \nu, \tau \in P(X)$ і $\tilde{d}(\mu, \nu) = a$, $\tilde{d}(\nu, \tau) = b$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $a \geq b$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і $x \in X$ одержуємо:

$$\mu(B_{a+\varepsilon}(x)) = \nu(B_{a+\varepsilon}(x)), \text{ а також}$$

$$\nu(B_{a+\varepsilon}(x)) = \tau(B_{a+\varepsilon}(x));$$

при цьому друга рівність випливає з того факту, що в ультраметричному просторі куля більшого радіуса є диз'юнктним об'єднанням куль меншого радіуса і адитивності міри. Таким чином, $\mu(B_{a+\varepsilon}(x)) = \tau(B_{a+\varepsilon}(x))$ і з довільності ε випливає, що $\tilde{d}(\mu, \tau) \leq a = \max\{\tilde{d}(\mu, \nu), \tilde{d}(\nu, \tau)\}$.

Твердження 3. Нехай $f : X_1 \to X_2$ – грубе відображення грубих просторів $(X_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2$, тоді відображення $P(f) : P(X_1) \to P(X_2)$ – теж грубе.

Доведення. Позначимо через d_i ультраметрики, які породжують грубі структури $\mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$. Нехай $r > 0$, тоді з грубої рівномірності відображення f випливає, що існує таке $s>0$, що виконано умову:

$$\text{якщо } d_1(x,y)<r, \text{ то } d_2(f(x),f(y))<s.$$

Звідси випливає, що прообраз кожної кулі радіуса s у просторі X_2 є диз'юнктним об'єднанням куль радіуса r у просторі X_1. Таким чином, якщо $\hat{d}_1(\mu,\nu)\le r$, то $\hat{d}_2(P(f)(\mu),P(f)(\nu))\le s$.

Доведемо тепер, що прообрази обмежених множин за відображення $P(f)$ обмежені. Нехай A – обмежена множина в $P(X_2)$, тоді існують $y_0\in X_2$ і $r>0$ такі, що $A\subset B_r(\delta_{y_0})$. Звідси випливає, що для кожного $\mu\in A$ маємо $d(\mu,\delta_{y_0})<r$, а отже, $\mu(B_r(y_0))=\delta_{y_0}(B_r(y_0))=1$ для кожного $\mu\in A$. Оскільки прообрази обмежених множин під час відображення f обмежені, то існує таке $s>0$, що $f^{-1}(B_r(y_0))\subset B_s(x_0))$ для деякого $x_0\in X_1$.

Звідси випливає, що для кожного $\mu\in f^{-1}(A)$ маємо $\mu(B_s(x_0))=P(f)(\mu)(B_r(y_0))=$ $=\delta_{y_0}(B_r(y_0))=1$, а отже, $d(\mu,\delta_{x_0})<s$. Таким чином, одержуємо функтор ймовірнісних мір у категорії UMCS.

Аналогічно, як і у статті [4], одержуємо, що існує нерозтягальне відображення $\psi_X: P^2(X)\to P(X)$, яке на елементах вигляду $M=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{\mu_i}$, де $\mu_i\in P(X)$, $\alpha_i\ge 0$, $i=1,\dots,n$, і $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, задає формула $\phi_X(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_i$.

Покажемо, що відображення ψ_X є грубим. Для цього досить показати, що прообраз кожної обмеженої множини в просторі $P(X)$ є обмеженою множиною. Отже, нехай $A\subset P(X)$ – обмежена множина. Тоді $A\subset B_r(\delta_{x_0})$ для деяких $r>0$ і $x_0\in X$. А отже, $\mu(B_r(x_0))=\delta_{x_0}(B_r(x_0))=1$, тобто $\mathbf{U}\{\sup p_X(\mu)\,|\,\mu\in P_{P(X)}(N)\subset B_r(x_0)$, тобто $d(N,\delta(\delta(x_0)))\le r$.

Нагадаємо, що трійку (T,η,μ) називають монадою на категорії C, якщо T – ендофунктор у категорії C, а $\eta:1\to T$, $\mu:T^2\to T$ – природні перетворення, для яких $\mu\eta_T=\mu T\eta=1$ і $\mu\mu_T=\mu T\mu$ (деталі див., наприклад, у [8]).

Основним результатом цієї замітки є такий факт.

Теорема. Трійка $P=(P,\delta,\psi)$ є монадою на категорії UMCS.

Доведення випливає з відомих алгебричних тотожностей, виконаних для функтора ймовірнісних мір [8]. Те, що відповідні відображення є морфізмами категорії UMCS, випливає зі встановленого вище.

Такий результат можна також встановити і для функтора ідемпотентних мір [5], а також для функтора напівнеперервних згори ємностей [3].

1. *Frider V., Zarichnyj M.* Hyperspace functor in the coarse category // Visn. L'viv. Univ. Ser. Mekh. – Mat. – 2003. – 61. – P. 78–86.

2. *J. I. den Hartog and E. P. de Vink*. Building Metric Strucutres with the Meas-Functor, Liber Americorum Jaco de Bakker, F. de Boer, M. van der Heijden, P. Klint and J. Rutten (eds.), CWI. – Amsterdam. – 2002. – P. 93–108.

3. *Hubal' O.* Capacity functor on the category of ultrametric spaces. // Mat. Stud. – 2009. – 32. – P. 132–139.

4. *Hubal O., Zarichnyi M.* Probability measure monad on the category of ultrametric spaces. // Appl. Gen. Topol. – 2008. – 9, № 2. – P. 229–237.
5. *Hubal O., Zarichnyi M.* Idempotent probability measures on ultrametric spaces. (English). // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – 343, № 2. – P. 1052–1060.
6. *Protasov I., Zarichnyi M.* General Asymptology. // Math. Stud. Monogr. – Lviv, VNTL, 2007. – Ser. 12. – 220 p.
7. *Roe J.* Lectures on coarse geometry // American Mathematical Soc. – 2003. – 175 p.
8. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces // Mathematical Studies: Monograph Series. – 5. – 256 p.

МОНАДА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В КАТЕГОРИИ НЕАРХИМЕДОВЫХ ГРУБЫХ ПРОСТРАНСТВ

Построена монада вероятностных мер на категории неархимедовых грубых пространств, порожденных ультраметрическими пространствами.

PROBABILITY MEASURE MONAD IN THE CATEGORY OF NON-ARCHIMEDEAN COARSE SPACES

We construct a probability measure monad on the category of non-archimedean coarse spaces generated by the ultrametric spaces.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
12.10.12