## Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АРМИРОВАННЫХ КВАДРАТНЫХ ПЛАС-ТИН СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТОРОН ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

В рамках модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах проанализирован динамический изгиб армированных металлокомпозитных квадратных пластин со смешанными условиями закрепления сторон в условиях термосилового нагружения. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа и тепловая, одинаковая с лицевых поверхностей. Они обладают слоисто-волокнистой структурой, симметричной относительно срединной поверхности. Волокна арматуры, выполненные из различных материалов, расположены в направлениях, параллельных к контуру пластины. В зависимости от параметров армирования, теплового воздействия и амплитуды нагрузки возможны разные механизмы деформирования пластин. Для них получены уравнения динамического деформирования и выписаны условия их реализации. Построены уравнения для определения предельных нагрузок, времени деформирования и остаточных прогибов пластин.

Введение. Впервые исследовал остаточную повреждаемость прямоугольных плит при воздействии нагрузок взрывного типа А.А. Гвоздев [1]. Пренебрегая упругими деформациями, упрочнением материала и влиянием скорости деформации на пластические свойства, он разработал для прямоугольных плит схему разрушения «конверт». Ее простота и удобство позволили расширить и развить исследования в этом направлении для расчетов одно- и двусвязных пластин различных очертаний, шарнирно опертых или защемленных по контуру. Полученные результаты систематизированы в монографии [5]. Существуют, однако, многочисленные варианты нагружения, опорного закрепления элементов конструкций, для которых расчетные схемы не могут быть напрямую перенесены и требуют определенного развития. К таким ситуациям относятся, например, различия в способах закрепления участков контуров полигональных пластин, различные типы неоднородного армирования, воздействие температуры и другие.

Известно, что армированные волокнами плоские элементы конструкций при изменении температуры, даже в сравнительно узком диапазоне, могут существенно изменять свои механические характеристики вследствие различной термочувствительности связующих и армирующих материалов. Расчеты на прочность с фиксированными характеристиками для конструкций, подвергающихся температурным колебаниям, могут оказаться ненадежными.

В настоящей работе на примере квадратной пластины рассмотрена обобщенная расчетная схема, учитывающая указанные выше обстоятельства. Схема также развивает модель, описанную ранее [6] для решения задач динамического изгиба армированных полигональных пластин, при смешанном распределении закрепления на одной из сторон. Это может быть пластина, у которой какой-либо край на одной части длины заделан, а на другой – шарнирно оперт, либо пластина с краями, приваренными к опорному контуру прерывистым швом. В местах швов пластину считают защемленной, а между ними – шарнирно опертой.

**Формулировка задачи, основные соотношения и предположения.** Рассмотрим тонкую кирхгофовскую квадратную пластину  $A_1A_2A_3A_4$  (см.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. - 2015. - Вип. 13. - С. 74-81.

рисунок) со стороной 2a, закрепленную следующим образом: на каждой из четырех сторон суммарная длина защемленного участка  $\gamma_n a$  (n = 1 - 4), остальная часть границы шарнирно опертая. Если  $\gamma_n = 0$ , то это будет шарнирно опертая пластина, а при  $\gamma_n = 2$  – защемленная. Пусть  $x_1Ox_2$  – декартовая система координат с началом в центре пластины. Для стороны  $A_1A_4$  введем такую функцию  $\eta_1(x_2)$ , что  $\eta_1(x_2) = 0$  при защемлении точки  $(a, x_2) \in A_1A_4$  и  $\eta(x_2) = 1$  – при ее шарнирном опирании. Аналогично определим функции  $\eta_2(x_1)$ ,  $\eta_3(x_2)$ ,  $\eta_4(x_1)$  для сторон контуров пластины  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ , соответственно. Тогда







Общая схема деформирования пластины (a), при вырождении центральной области в точку (б), при вырождении центральной области в прямую линию (в)

Пластина выполнена из гибридного композитного слоистого материала, работающего без проскальзывания и отрыва. Распределение слоев симметрично относительно срединной ее поверхности. В каждом слое возможно расположение волокон арматуры, выполненных из различных материалов, в направлениях, параллельных к контуру пластины (по линиям  $x_1 = \text{const}$  или  $x_2 = \text{const}$ ). Связующий материал в каждом слое различный. Структура армирования пластины из одних и тех же составляющих материалов

может быть разной из-за изменения взаимного расположения армированных слоев.

Для пластины поверхностная плотность материала

$$\begin{split} \rho(x_1, x_2) &= 2\sum_{k=1}^n \rho_k(h_k - h_{k-1}) ,\\ \rho_k(x_1, x_2) &= \left[1 - \omega_{1k}(x_1) - \omega_{2k}(x_2)\right] \rho_{0k} + \omega_{1k}(x_1) \rho_{1k} + \omega_{2k}(x_2) \rho_{2k}(x_2) \rho_{2k$$

где n — половина общего количества слоев;  $\rho_{0k}$ ,  $\rho_{jk}$  — плотности в k-ом слое связующего материала и материала арматуры вдоль линий  $x_j$  = const (j = 1, 2);  $\omega_{jk}(x_j)$  — плотность армирования (в общем случае зависящая от  $x_j$ ) в этом слое вдоль линий  $x_j$  = const;  $z = h_k$  — координаты раздела слоев;  $h_0 = 0$ ;  $h_n = H$ ; 2H — толщина пластины; координата z направлена вдоль толщины пластины.

Пластина находится в условиях теплового воздействия, одинакового с лицевых поверхностей. В k-ом слое пределы текучести  $\sigma_{0kT}$ ,  $\sigma_{jkT}$  связующего материала и материала арматуры, расположенной вдоль направлений  $x_i = \text{const}$ , будут равны [3, 7]:

$$\sigma_{jkT}(z) = \sigma_{jk} \exp\left[\beta_{jk} \left(\frac{1}{T_{jk}(z)} - \frac{1}{T_0}\right)\right], \ (j = 0, 1, 2).$$
(2)

Здесь  $\sigma_{jk}$  — пределы текучести связующего материала (j = 0) и арматуры (j = 1, 2) при нормальной температуре  $T_0$ , а  $\beta_{jk}$  — их расчетные характеристики, зависящие от  $\sigma_{jk}$ ;  $T_{jk}(z)$  — изменяющаяся с координатой z температура. Величины  $\sigma_{ik}$ ,  $T_0$ ,  $\beta_{ik}$  и функции  $T_{ik}(z)$  известны.

Уравнения движения и определение начальных условий. Общая схема деформирования пластины изображена на рисунке (схема *a*), где  $Z_n$  – области, жестко вращающиеся вокруг опорных сторон (n = 1-4);  $Z_p$  – область, движущаяся поступательно. Из условий непрерывности скоростей на границах областей  $Z_p$  и  $Z_n$  следует, что область  $Z_p$  – прямоугольник. Величины  $\delta_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\xi_2$  характеризуют размеры  $Z_p$  и являются функциями времени t ( $0 < \delta_1 < 2$ ,  $0 < \xi_1 < 2$ ,  $0 < \delta_2 < 2$ ,  $0 < \xi_2 < 2$ ). Линии, разделяющие области  $Z_p$ ,  $Z_n$  (n = 1-4), – линейные пластические шарниры. На них и на контуре пластины – прямых  $A_n B_n$  (n = 1-4) – с учетом (2) и того, что в рассматриваемой задаче каждый слой армирован только в одном направлении, предельные изгибающие моменты  $M_{01}$ ,  $M_{02}$ , нормальные и касательные к направлению  $x_1$  = const, согласно структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [4], таковы:

$$\begin{split} M_{0j}(x_j) &= \int_{-H}^{H} \sigma_{0jk} z dz = 2 \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{0jk}(x_j, z) z dz , \quad (j = 1, 2); \\ \sigma_{0jk}(x_j, z) &= \left[1 - \omega_{jk}(x_j)\right] \sigma_{0kT}(z) + \omega_{jk}(x_j) \sigma_{jkT}(z) = \\ &= \left[1 - \omega_{jk}(x_j)\right] \sigma_{0k} \exp\left[\beta_{jk}\left(\frac{1}{T_{0k}(z)} - \frac{1}{T_0}\right)\right] + \end{split}$$

$$+\omega_{jk}(x_j)\sigma_{jk}\exp\left[eta_{jk}\left(rac{1}{T_{jk}(z)}-rac{1}{T_0}
ight)
ight].$$

Обозначим скорость угла поворота жесткой области  $Z_n$  (n = 1 - 4) вокруг своей опорной стороны через  $\dot{\alpha}_n(t)$ . Для области  $Z_1$  (см. рисунок, схема а) разрыв угловой скорости на прямых  $A_1A_4$  и  $B_1B_4$  равен  $\dot{\alpha}_1(t)$ , а на сторонах  $A_1B_1$  и  $A_4B_4$  (со стороны области  $Z_1$ ) –  $\dot{\alpha}_1\cos\varphi_1$  и  $\dot{\alpha}_1\cos\varphi_2$ , соответственно, где  $\mathrm{tg}\varphi_1 = \delta_2 / \delta_1$  и  $\mathrm{tg}\varphi_2 = \delta_2 / \xi_1$ . Нормальные изгибающие моменты  $M_b$  на шарнирах  $A_1B_1$ ,  $B_1B_4$ ,  $A_1B_1$  и  $A_4B_4$ :

$$\begin{split} M_b \big|_{A_1 A_4} \left( x_2 \right) &= \left[ 1 - \eta_1(x_2) \big|_{(x_1, x_2) \in A_1 B_4} \right] M_{01}(a) , \qquad M_b \big|_{B_1 B_2} = M_{01} \left( a(1 - \delta_2) \right) , \\ M_b \big|_{A_1 B_1} \left( x_1, x_2 \right) &= \left\{ M_{01} \left( x_1 \right) + M_{02}(x_2) + \left[ M_{01}(x_1) - M_{02}(x_2) \right] \cos 2\varphi_1 \right\} / 2 \big|_{(x_1, x_2) \in A_1 B_1} , \\ M_b \big|_{A_4 B_4} \left( x_1, x_2 \right) &= \left\{ M_{01} \left( x_1 \right) + M_{02}(x_2) + \left[ M_{01}(x_1) - M_{02}(x_2) \right] \cos 2\varphi_2 \right\} / 2 \big|_{(x_1, x_2) \in A_4 B_4} . \end{split}$$

На границах областей  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$  нормальные изгибающие моменты вычисляем аналогично. При действии равномерно распределенной нагрузки P(t)уравнения динамического изгиба пластины, полученные, как и в [6], из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера [2], имеют вид

$$\ddot{\alpha}_n(t)\Sigma_n(t) = P(t)\Omega_n(t) - m_n(t) \ (n = 1 - 4), \tag{3}$$

$$\left(\delta_2 \dot{\alpha}_1\right)^{\bullet} a = P(t) \Sigma_p(t), \qquad (4)$$

$$\delta_2 \dot{\alpha}_1 = \delta_1 \dot{\alpha}_2, \ \delta_2 \dot{\alpha}_1 = \xi_2 \dot{\alpha}_3, \ \delta_2 \dot{\alpha}_1 = \xi_1 \dot{\alpha}_4.$$
 (5)

Здесь (\*)  $= \partial(*) / \partial t$ . С учетом (1) и введенных обозначений принято:

$$\begin{split} \Sigma_n(\delta_1,\xi_1,\delta_2,\xi_2) &= \iint_{Z_n} \rho(x_1,x_2)(a-c)^2 dx_1 dx_2 \,, \\ (\text{где } c = |x_1| \quad \text{при } n = 1,3 \text{ и } c = |x_2| \quad \text{при } n = 2,4 \,) \\ \Omega_n &= \iint_{Z_n} (a-c) dx_1 dx_2 \,, \ \Omega_1 = \delta_2^2 (3-\delta_1-\xi_1) a^3 \,/ \, 3 \,, \ \Omega_2 = \xi_1^2 (3-\delta_2-\xi_2) a^3 \,/ \, 3 \,, \\ \Omega_3 &= \xi_2^2 (3-\delta_1-\xi_1) a^3 \,/ \, 3 \,, \qquad \Omega_4 = \delta_1^2 (3-\delta_2-\xi_2) a^3 \,/ \, 3 \,; \\ m_1 &= a \big[ M_{01}(a) \gamma_1 + M_{01}(a(1-\delta_2))(2-\delta_1-\xi_1) \big] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \Big[ (1+\cos 2\varphi_1) \frac{\delta_1}{\delta_2} + (1+\cos 2\varphi_2) \frac{\xi_1}{\delta_2} \Big]_{(1-\delta_2)a}^a M_{01}(x_1) dx_1 + \\ &\quad + (1-\cos 2\varphi_1) \int_{-a}^{-(1-\delta_1)a} M_{02}(x_2) dx_2 + (1-\cos 2\varphi_2) \int_{(1-\xi_1)a}^a M_{02}(x_2) dx_2 \right\}, \\ m_2 &= a \big[ M_{02}(-a) \gamma_2 + M_{02} \left( -a(1-\delta_1) \right) (2-\delta_2-\xi_2) \big] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \Big[ \big( 1+\cos(\pi-2\varphi_1) \big) \frac{\delta_2}{\delta_1} + \big( 1+\cos(\pi-2\varphi_3) \big) \frac{\xi_2}{\delta_1} \Big]_{-a}^{-(1-\delta_1)a} M_{02}(x_2) dx_2 + \\ &\quad + \big[ 1-\cos(\pi-2\varphi_3) \big]_{-a}^{-(1-\xi_2)a} M_{01}(x_1) dx_1 + \big[ 1-\cos(\pi-2\varphi_1) \big] \int_{(1-\delta_2)a}^a M_{01}(x_1) dx_1 \right\}, \\ m_3 &= a \big[ M_{01}(-a) \gamma_3 + M_{01} \left( -a(1-\xi_2) \big) (2-\delta_1-\xi_1) \big] + \end{split}$$

$$\begin{split} &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} (1 + \cos 2\varphi_3) \frac{\delta_1}{\xi_2} + (1 + \cos 2\varphi_4) \frac{\xi_1}{\xi_2} \end{bmatrix}^{-(1 - \xi_2)a} M_{01}(x_1) dx_1 + \\ &+ (1 - \cos 2\varphi_3) \int_{-a}^{-(1 - \delta_1)a} M_{02}(x_2) dx_2 + (1 - \cos 2\varphi_4) \int_{(1 - \xi_1)a}^{a} M_{02}(x_2) dx_2 \right\}, \\ &m_4 = a \begin{bmatrix} M_{02}(a) \gamma_4 + M_{02}(a(1 - \xi_1))(2 - \delta_2 - \xi_2) \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} [1 + \cos(\pi - 2\varphi_2)] \frac{\delta_2}{\xi_1} + [1 + \cos(\pi - 2\varphi_4)] \frac{\xi_2}{\xi_1} \end{bmatrix}_{(1 - \xi_1)a}^{a} M_{02}(x_2) dx_2 + \\ &+ [1 - \cos(\pi - 2\varphi_4)] \int_{-a}^{-(1 - \xi_2)a} M_{01}(x_1) dx_1 + [1 - \cos(\pi - 2\varphi_2)] \int_{(1 - \delta_2)a}^{a} M_{01}(x_1) dx_1 \right\}, \\ &\Sigma_p = \iint_{Z_p} dx_1 dx_2 / \iint_{Z_p} \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \mathrm{tg}\varphi_3 = \xi_2 / \delta_1, \qquad \mathrm{tg}\varphi_4 = \xi_2 / \xi_1. \end{split}$$

Условия (5) являются следствием непрерывности скоростей на границах областей  $Z_n$  (n = 1 - 4).

В начальный момент *t* = 0 пластина неподвижна:

$$\alpha_n(0) = \dot{\alpha}_n(0) = 0 \ (n = 1 - 4).$$
(6)

Начальные значения  $\delta_1(0)$ ,  $\xi_1(0)$ ,  $\delta_2(0)$ ,  $\xi_2(0)$ , соответствующие схеме деформирования пластины в момент начала движения, определим ниже. Если область  $Z_p$  вырождается в точку (см. рисунок, схема б), то уравнение (4) следует заменить условиями

$$\delta_1 + \xi_1 = 2, \qquad \delta_2 + \xi_2 = 2, \tag{7}$$

а если в прямую линию (см. рисунок, схема в), - то условием

$$\delta_1 + \xi_1 = 2$$
 или  $\delta_2 + \xi_2 = 2$ . (8)

Для определения предельной нагрузки положим в (3)  $\ddot{\alpha}_n = 0$  при  $n = \overline{1-4}$ . Тогда

$$P = m_n / \Omega_n \qquad (n = \overline{1 - 4}). \tag{9}$$

Из системы четырех уравнений (9), выражая P через одну из неизвестных величин  $\delta_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\xi_2$ , например  $\delta_1$ , предельную нагрузку находим как  $P_0 = \min_{0<\delta_1<2} P = P|_{\delta_1=\delta_{10}}$ , где  $\delta_{10}$  – значение  $\delta_1$  в предельном состоянии. Подставляя значения  $P = P_0$ ,  $\delta_1 = \delta_{10}$  в три уравнения системы (9) и решая ее, получим значения  $\xi_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\xi_{20}$ , которые вместе с величиной  $\delta_{10}$  определяют схему деформирования пластины в предельном состоянии. При нахождении величин  $\xi_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\xi_{20}$  следует учитывать, что каждая из них должна находиться в интервале (0,2). В предельном состоянии также выполняются соотношения (7) или (8).

Для нахождения начальных значений  $\delta_1(0)$ ,  $\xi_1(0)$ ,  $\delta_2(0)$ ,  $\xi_2(0)$  следует рассмотреть два варианта, когда движение пластины начнется с развитой областью  $Z_p$  и когда эта область вырождена. Обозначим  $P(0) = P_{\max}$ .

Если область  $Z_p$  вырождена, то начальные значения  $\delta_1(0)$ ,  $\xi_1(0)$ ,  $\delta_2(0)$ ,  $\xi_2(0)$  определяем из системы (9) при  $P = P_{\max}$ . Если не вырождена, то соответствующие начальные условия обозначим через  $\overline{\delta}_1(0)$ ,  $\overline{\xi}_1(0)$ ,  $\overline{\delta}_2(0)$ ,  $\overline{\xi}_2(0)$ .

Из уравнения (4) получим равенство

 $\dot{\delta}_2(t)\dot{\alpha}_1(t)a + \delta_2(t)\ddot{\alpha}_1(t)a = P(t),$ 

которое с учетом уравнения (3) при n = 1 принимает вид

$$\dot{\delta}_2 \dot{\alpha}_1 a = \left[ P(\Sigma_1 \Sigma_p - \delta_2 a \Omega_1) + \delta_2 a m_1 \right] / \Sigma_1.$$
(10)

Аналогично из (3)-(5) получаем:

$$\dot{\delta}_{1}\dot{\alpha}_{2}a = \left[P(\Sigma_{2}\Sigma_{p} - \delta_{1}a\Omega_{2}) + \delta_{1}am_{2}\right]/\Sigma_{2}, \qquad (11)$$

$$\dot{\xi}_2 \dot{\alpha}_3 a = \left[ P(\Sigma_3 \Sigma_p - \xi_2 a \Omega_3) + \xi_2 a m_3 \right] / \Sigma_3, \qquad (12)$$

$$\dot{\xi}_1 \dot{\alpha}_4 a = \left[ P(\Sigma_4 \Sigma_p - \xi_1 a \Omega_4) + \xi_1 a m_4 \right] / \Sigma_4.$$
<sup>(13)</sup>

Из (10)-(13) при условии (6)

$$P_{\max} = \delta_2 a m_1 / \left( -\Sigma_1 \Sigma_p + \delta_2 a \Omega_1 \right), \tag{14}$$

$$P_{\max} = \delta_1 a m_2 / \left( -\Sigma_2 \Sigma_p + \delta_1 a \Omega_2 \right), \tag{15}$$

$$P_{\max} = \xi_2 a m_3 / \left( -\Sigma_3 \Sigma_p + \xi_2 a \Omega_3 \right), \tag{16}$$

$$P_{\max} = \xi_1 a m_4 / \left( -\Sigma_4 \Sigma_p + \xi_1 a \Omega_4 \right). \tag{17}$$

Если область  $Z_p$  не вырождена, то начальные значения  $\overline{\delta}_1(0)$ ,  $\overline{\xi}_1(0)$ ,  $\overline{\delta}_2(0)$ ,  $\overline{\xi}_2(0)$  определяем из системы (14)–(17). Рассчитаем  $P_*$  – минимальное значение амплитуды  $P_{\max}$ , при которой движение пластины начнется с невырожденной областью  $Z_p$ . Из этой системы, выражая  $P_{\max}$  через одну из неизвестных величин  $\delta_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\xi_2$ , например  $\delta_1$ , нагрузку  $P_*$  находим как  $P_* = \min_{0 < \delta_1 < 2} P_{\max} = P_{\max}|_{\delta_1 = \delta_{1*}}$ . Подставляя значения  $P_* = P_{\max}$ ,  $\delta_1 = \delta_{1*}$  в три уравнения системы (14)–(17), получим значения  $\xi_{1*}$ ,  $\delta_{2*}$ ,  $\xi_{2*}$ , которые вместе с величиной  $\delta_{1*}$  определяют схему деформирования пластины в момент начала образования области  $Z_p$ . При вычислении величин  $\xi_{1*}$ ,  $\delta_{2*}$ ,  $\xi_{2*}$  следует учитывать, что каждая из них должна находиться в интервале (0,2). Отметим, что при этом также выполняются соотношения (7) или (8).

Анализ поведения при "средних" и "высоких" нагрузках. При  $P_0 < P_{\max} \leq P_*$  ("средние" нагрузки) пластина будет деформироваться с вырожденной областью  $Z_p$ . Пусть в момент времени t = T нагрузка снимается. При  $0 \leq t \leq T$  поведение пластины описывают уравнения (3), (5), а также одно из условий (7) или (8) при соответствующих начальных значениях  $\alpha_n(0), \dot{\alpha}_n(0), \delta_1(0), \xi_1(0), \delta_2(0), \xi_2(0)$ . Поскольку взрывная нагрузка не возрастает во времени, то в процессе движения условие (8) может смениться на (7), а вот условие (7) на (8) уже нет.

После снятия нагрузки при  $T < t \le t_f$  пластина движется по инерции до остановки в момент  $t_f$ . Ее поведение описываем системой, состоящей из уравнений (5), (7) (или (8)), и

$$\ddot{\alpha}_n(t)\Sigma_n(t) = -m_n(t) \qquad (n=1-4),$$

с начальными условиями, определенными при t = T. Момент  $t_f$  находят из условия

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0 , \qquad (18)$$

при этом из (5) следует, что  $\dot{\alpha}_n(t_f) = 0$  ( $n = \overline{2-4}$ ), т.е. все области  $Z_n$  остановятся одновременно.

Прогибы в пластине  $u(x_1, x_2, t)$  находят из соотношений

$$\dot{u}(x_1, x_2, t) = \dot{\alpha}_n(t) d(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in Z_n \quad (n = \overline{1 - 4}),$$
(19)

где  $d(x_1, x_2)$  — расстояние от точки  $(x_1, x_2) \in Z_n$  до опорной стороны области  $Z_n$ .

При  $P_{\max} > P_*$  ("высокие" нагрузки) пластина начнет деформироваться с развитой областью  $Z_p$ . При  $0 \le t \le t_1$  ее поведение описывают уравнения (3)–(5) с начальными условиями (6),  $\overline{\delta}_1(0)$ ,  $\overline{\xi}_1(0)$ ,  $\overline{\delta}_2(0)$ ,  $\overline{\xi}_2(0)$ . При этом, если P(t) = const, то область  $Z_p$  не изменяется. Когда при t > 0 нагрузка P(t) убывает или P(t) = 0, то область  $Z_p$  уменьшается до вырождения в момент  $t = t_1$ . В этот момент начинают выполняться условия (7) или (8). Далее деформирование пластины описывают уравнения для "средних" нагрузок при вырожденной области  $Z_p$ . Пластина остановится в момент  $t_f$ , определяемый из (18). Ее прогибы находим из уравнений (19):

$$\dot{u}(x_1, x_2, t) = a\delta_2(t)\dot{\alpha}_1(t), \qquad (x_1, x_2) \in Z_p.$$

Полученные решения можно использовать для оценки динамической повреждаемости многослойных армированных металлокомпозитных пластин в условиях термосилового нагружения. Количество параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять способы крепления пластин, схемы армирования, объемное содержание армирующих волокон, а также температуру, толщину слоев и физические характеристики композита.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-90400-Укр\_а).

- 1. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строит. промышленность. 1943. № 1–2. С. 18–21.
- 2. *Ерхов М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
- Махутов Н. А. Система критериев прочности, ресурса, надежности и безопасности машин и конструкций // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – 78, № 9. – С. 50–55.
- 4. *Немировский Ю*. В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // Прикл. механика и техн. физика. 1969. № 5. С. 81–88.
- Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамический изгиб армированных правильных полигональных пластин с жесткой шайбой под действием взрывных нагрузок // Сб. тр. Междунар. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики", Воронеж, 20–22 сентября 2010 г. Воронеж: Изд-во Воронежск. гос. ун-та, 2010. С. 255–269.
- 6. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. – Новосибирск: "ГЕО", 2009. – 312 с.
- 7. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. – Новосибирск: "Арт-Авеню", 2008. – 512 с.

## Динамическое поведение армированных квадратных пластин со смешанными условиями ... 81 ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА АРМОВАНИХ КВАДРАТНИХ ПЛАСТИН ЗІ ЗМІШАНИМИ УМОВАМИ КРІПЛЕННЯ СТОРІН ЗА ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В рамках моделі ідеального жорстко-пластичного матеріалу з використанням структурної моделі армованого шару з одновимірним напруженим станом у волокнах проаналізовано зумовлений термосиловим навантаженням динамічний згин армованих металокомпозитних квадратних пластин за змішаних умов кріплення країв. На пластини діє рівномірно розподілене на поверхні короткочасне інтенсивне динамічне навантаження вибухового типу і теплове навантаження, однакове на лицевих поверхнях. Пластини мають симетричну відносно серединної поверхні шарувато-волокнисту структуру. Волокна арматури, виготовлені з різних матеріалів, розташовані паралельно до контуру пластини. Залежно від параметрів армування, теплової дії і амплітуди навантаження можливі різні механізми деформування пластин. Для них отримано рівняння динамічного деформування і встановлено умови їх реалізації. Одержано рівняння для визначення граничних навантажень, часу деформування і залишкових прогинів пластин.

## DYNAMIC BEHAVIOR OF REINFORCED SQUARE PLATES WITH MIXED SUPPORT CONDITIONS UNDER THERMAL AND FORCE LOADING

Within the model of an ideal rigid-plastic material, using a structural model of the reinforced layer with one-dimensional stress state in the fibers, the dynamic bending is analyzed for reinforced metal-composite square plates with mixed support conditions under thermo-force loading. The plates are subjected to the short-term high-intensity explosive-type dynamic load uniformly distributed over the surface. The facial sides of the plates are in the same conditions of heat influence. The plates are of layered-fibrous structure symmetric with respect to its middle surface. Reinforced fibers made of various materials are disposed parallel to the contour of the plate. The different mechanisms of deformation of plates are possible, depending on parameters of reinforcement, thermal effects and amplitude of the load. The equations of dynamic deformation are obtained for each of them and the conditions for their implementation are written. The equations for determining limit load, time of deformation and final deflections of the plates are obtained.

Ин-т теор. и прикл. механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация Поступила 06.08.15