

**ВПЛИВ РЕАЛЬНОГО ГАЗУ У МІЖКОНТАКТНИХ ПРОСВІТАХ НА  
ВЗАЄМОДІЮ ТІЛА ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ З ПЕРІОДИЧНОЮ  
СИСТЕМОЮ ПРЯМОКУТНИХ ВИЇМОК**

*Досліджено безфрикційний контакт пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмок прямокутної форми, коли міжконтактні просвіти містять реальний газ. Його стан описано рівнянням Ван-дер-Ваальса, яке враховує фазовий перехід газу в рідину. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти просвітів та трансцендентного рівняння для визначення тиску заповнювача просвітів. Проаналізовано залежності висоти просвітів, тиску газу, контактної зближеності та контактної податливості тіл від навантаження.*

**Вступ.** На контактну поведінку реальних тіл суттєво впливають їх поверхнева структура та середовище в області розмежування. Дія середовища особливо проявляється за спряжених тіл з узгодженими межами, які мало відрізняються одна від одної. Тоді середовище, затиснуте в міжконтактних просвітах, стає активним чинником контактної системи і його тиск на тіла змінюється разом зі зміною навантаження. Контакт плоскої поверхні з хвилястою за наявності між ними стисливої рідини чи ідеального газу досліджували раніше [3, 10]. Взаємодію тіл з поодинокими або періодично розташованими просвітами між ними, повністю заповненими ідеальним газом, стисловою або нестисловою рідиною, вивчали у працях [4–7, 11, 12]. Проте модель ідеального газу не завжди адекватно відтворює поведінку газоподібного заповнювача, зокрема за великих тисків і низьких температур. Тому для дослідження впливу міжконтактного газу на взаємодію тіл в широкому діапазоні зміни зовнішніх чинників використали [1, 8] загальнішу модель реального газу Ван-дер-Ваальса. Вивчали [8] контакт тіл, локальний просвіт між якими заповнений реальним газом, тиск якого не перевищує тиску насиченої пари. Досліджували [1] контактну поведінку тіл, одне з яких має виїмку гладкої форми, коли під навантаженням у заповнювачі міжповерхневого просвіту відбувається фазовий перехід “газ–рідина”. Аналогічні дослідження за періодичної системи гладких виїмок виконано у праці [2].

Нижче вивчено взаємодію пружного півнескінченного тіла з жорсткою основою, що має регулярну систему виїмок з кутовими точками, які заповнені реальним газом. Основна особливість розглянутої задачі полягає у тому, що внаслідок геометрії виїмок (через кутові точки на їхніх краях) просвіти під навантаженням не змінюють своєї ширини.

**Формулювання контактної задачі.** Розглянемо безфрикційний контакт пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має періодичну систему розташованих з періодом  $d$  плитких тунельних виїмок прямокутної форми  $r(x) = -A$  та ширини  $2c$  ( $A/(2c) \ll 1$ ). Пружний півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження  $P^\infty$  і в ньому реалізується стан плоскої деформації. Через виїмки між тілом і основою утворюються просвіти висотою  $h(x)$  та сталої ширини  $2c$  (рис. 1). Вважаємо, що кожен з просвітів містить реальний газ (водяну пару). Тиск речовини  $P_1$  у просвітах змінюється під час навантаження і заздалегідь невідомий. Для його визначення служить рівняння Ван-дер-Ваальса

$$\left(P_1 + n^2 \frac{a_g}{V_1^2}\right)(V_1 - nb_g) = nRT, \quad (1)$$

де  $a_g$ ,  $b_g$  – константи Ван-дер-Ваальса газу;  $n$  – кількість газу;  $R$  – універсальна газова стала;  $T$  – температура газу;  $V_1$  – об'єм газу, що припадає на одиницю довжини просвіту в напрямі осі  $O\tilde{z}$ , перпендикулярної до площини рис. 1.

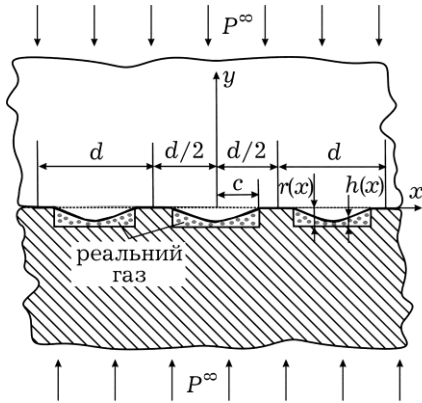


Рис. 1.

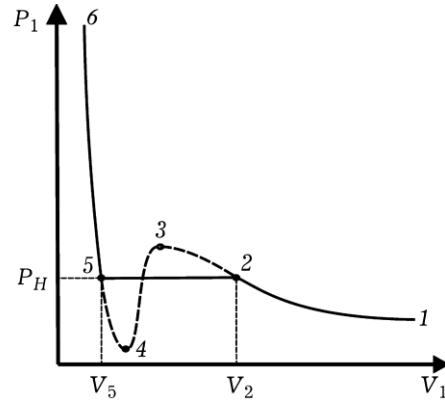


Рис. 2.

Коли температура реального газу  $T$  нижча за критичну  $T_c$  [9], то рівняння Ван-дер-Ваальса (1) описує фазовий перехід речовини з газоподібного в рідкий стан внаслідок збільшення тиску. Ізотерма цього рівняння для  $T < T_c$  зображена на рис. 2. Тут ділянка кривої 1-2 відповідає газоподібному стану; 5-6 – рідині; 2-3 і 4-5 – метастабільні стани, які описують перенасичену пару і перегріту рідину відповідно. Ділянка 3-4 не описує жодного реального стану речовини. Експерименти виявили, що крива 1-2-3-4-5-6 на ділянці 2-3-4-5 горизонтальна, а не  $S$ -подібна. Крайні точки цього відрізка описують рівноважний стан між рідкою і газоподібною фазами, а їх ордината відповідає тиску насиченої пари  $P_H$ . Тому для аналізу стану міжконтактної речовини за температури  $T < T_c$  використовуватимемо ізотерми виду 1-2-5-6, які отримали із ізотерм рівняння (1) заміною кривої 2-3-4-5 відрізком 2-5. Тобто тиск реального газу  $P_1$  описуватимемо модифікованим рівнянням Ван-дер-Ваальса:

$$P_1 = \begin{cases} nRT/(V_1 - nb_g) - n^2 a_g/V_1^2, & V_1 < V_5 \cup V_1 > V_2, \\ P_H, & V_5 \leq V_1 \leq V_2. \end{cases} \quad (2)$$

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд уздовж зазорів  $|x - kd| < c$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -P_1; \quad (3)$$

на ділянках контакту  $c \leq |x - kd| \leq d/2$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0, \quad (4)$$

на нескінченності

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (5)$$

Тут  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $v$  – компонента вектора переміщень уздовж осі  $Oy$ .

**Методика розв'язування задачі.** Напружено-деформований стан у тілі визначають співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) + P^\infty, \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^\infty, \quad z \in D_1, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\Phi(z)$  – кусково-голоморфна у площині  $D = D_1 \cup D_2$  функція, що прямує до нуля на нескінченності ( $y \rightarrow \pm\infty$ );  $D_1$  ( $y > 0$ ),  $D_2$  ( $y < 0$ ) – верхня (пружне тіло) та нижня (жорстка основа) півплощини. Подання (6) задовольняють умови на нескінченності (5).

Якщо комплексний потенціал  $\Phi(z)$  виразити через форму виїмок  $r(x)$  та висоту міжконтактних просвітів  $h(x)$

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left( \int_{-c}^c h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt + \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt \right), \quad (7)$$

то подання (6) задовольнятимуть всі контактні-крайові умови (3)–(5), за винятком другої умови (3). Задовольнивши її за допомогою подань (6), отримаємо для функції  $h'(x)$  сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-c}^c h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = K(P^\infty - P_1) + \frac{2}{d} \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt. \quad (8)$$

Після заміни змінних  $\xi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{d} \right)$ ,  $\eta = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi t}{d} \right)$ ,  $\gamma = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi c}{d} \right)$  СІР з ядром Гільберта (8) трансформується у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P_1) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad |\xi| \leq \gamma. \quad (9)$$

У крайніх точках просвітів повинна виконуватися умова рівності висоти зазорів та виїмок:

$$h(\pm\gamma) = A. \quad (10)$$

Враховавши форму виїмок  $r(\xi) = -A$  у правій частині СІР (9), запишемо його так:

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P_1), \quad |\xi| \leq \gamma. \quad (11)$$

Оскільки на межі основи присутні кутові точки, шукатимемо необмежений у точках  $\xi = \pm\gamma$  розв'язок рівняння (9), який тоді матиме вигляд

$$h'(\xi) = \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \frac{\xi\sqrt{\gamma^2 + 1}}{(1 + \xi^2)\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}, \quad |\xi| \leq \gamma. \quad (12)$$

Проінтегрувавши функцію (12) з використанням умови (10), визначимо висоту зазорів:

$$h(\xi) = -\frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \operatorname{arcth} \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \right) + A, \quad |\xi| \leq \gamma. \quad (13)$$

Підставивши функцію  $h(\xi)$  у вираз для об'єму просвіту  $V_1 = l \int_{-c}^c h(x) dx = \frac{ld}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{h(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi$ , що припадає на одиницю його довжини

$l = 1$  м у напрямі осі  $O\tilde{z}$ , отримаємо:

$$V_1 = -\frac{Kld^2(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\gamma^2 + 1) + \frac{2ldA \arctg(\gamma)}{\pi}. \quad (14)$$

Підставляючи вираз (14) у модифіковане рівняння Ван-дер-Ваальса (2), визначимо тиск заповнювача просвітів  $P_1$

$$\begin{aligned} nRT / \left( \left[ \frac{2ldA \arctg(\gamma)}{\pi} - \frac{Kld^2(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\gamma^2 + 1) \right] - nb_g \right) - \\ - n^2 a_g / \left[ \frac{2ldA \arctg(\gamma)}{\pi} - \frac{Kld^2(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\gamma^2 + 1) \right]^2 - P_1 = \\ = 0, \quad V_1 < V_5 \cup V_1 > V_2, \\ P_1 = P_H, \quad V_5 \leq V_1 \leq V_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Рівняння (15) розв'язуємо числово методом поділу відрізка пополам з точністю  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Контактне зближення тіл [2]  $\Delta v^\infty$  матиме вигляд

$$\Delta v^\infty = \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\gamma^2 + 1), \quad (16)$$

а контактну їх податливість  $k^*$  визначимо зі співвідношення  $k^* = d(\Delta v^\infty) / d(P^\infty)$ , використовуючи формули числового диференціювання.

З подань (6) та (12), врахувавши в них тиск газу  $P_1$ , знайдемо контактний тиск тіл  $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$ :

$$P(x) = \frac{\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right| \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{d}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{d}\right)^2}} (P^\infty - P_1) + P_1, \quad c \leq |x - kd| \leq d/2. \quad (17)$$

**Аналіз числових результатів.** Числові результати, подані на рис. 3–7, отримали для таких даних:  $v = 0.47$ ;  $E = 8$  МПа;  $A = 0.01$  м;  $d = 1$  м;  $a_g = 0.555$  Дж·м<sup>3</sup>/моль;  $b_g = 3.05 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль;  $n = 1.2 \cdot 10^{-3}$  моль;  $2c = 0.5$  м (суцільні криві) і  $2c = 0.6$  м (штрихові) та для трьох різних температур: 290 К (криві 1), 358 К (криві 2) та 380 К (криві 3). На рис. 3–5 точки  $S_1$  на кривих відповідають початку фазового переходу газ–рідина при 290 К.

Розглянемо діапазон зміни зовнішнього навантаження  $P_0^\infty < P^\infty < P_N^\infty$ ,

де  $P_0^\infty = \frac{nRT}{2ldA \arctg(\gamma)/\pi - nb_g} - \frac{n^2 a_g}{[2ldA \arctg(\gamma)/\pi]^2}$  – навантаження, за якого тіла починають контактувати;

$$P_N^\infty = nRT \left[ \frac{2Ald \arctg(\gamma)}{\pi} - \frac{A \ln(\gamma^2 + 1)}{d \ln\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + 1} + \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + 1} - \alpha}\right)} - nb_g \right]^{-1}$$

$$-n^2 a_g \left[ \frac{2A \operatorname{darc}tg(\gamma)}{\pi} - \frac{A \ln(\gamma^2 + 1)}{d \ln \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1} + \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma} \right)} \right]^{-2} + \frac{4\pi A}{K \ln \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1} + \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma} \right)} - \text{наванта-$$

ження, коли починається контакт поверхонь тіл у центрі просвітів (тобто  $h(x) = 0$ , якщо  $x = kd$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Залежність тиску речовини  $P_1$  від навантаження  $P^\infty$  для різної температури  $T$  проілюстровано на рис. 3. З підвищенням навантаження і температури тиск газу збільшується. За навантажень  $P_0^\infty < P^\infty < 5 \cdot 10^4$  Па він більший для вузких виїмок, а при  $P^\infty > 5 \cdot 10^4$  Па – для ширших. До початку контакту поверхонь тіл посередині просвітів початок фазового переходу газ-рідина зафіксували лише при 290 К у точках  $S_1$ .

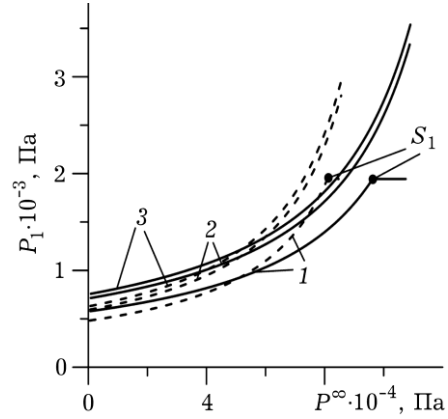


Рис. 3.

На рис. 4 та 5 зображено залежність контактних зближення  $\Delta v^\infty$  та податливості  $k^*$  тіл від зовнішнього навантаження  $P^\infty$  за різної температури  $T$ . Зміна температури на контактне зближення впливає несуттєво, а контактна податливість з її підвищенням зменшується. Зі збільшенням зовнішнього навантаження контактне зближення зростає, а контактна податливість знижується. Що більша ширина виїмок, то більші контактні зближення і податливість. На рис. 4 у точках  $S_1$ , що відповідають початку фазового переходу газ-рідина, є незначний злам. Контактна податливість тіл у цих точках має стрибок (рис. 5).

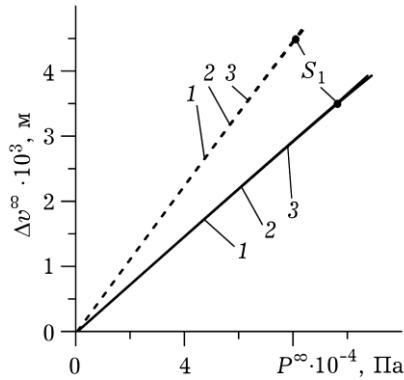


Рис. 4.

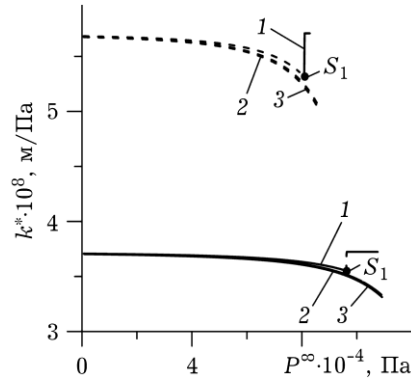


Рис. 5.

На рис. 6 і 7 криві з позначками (●) чи (○) відповідають навантаженню  $P^\infty = 5 \cdot 10^4$  Па, з (□) –  $8.3 \cdot 10^4$  Па, а з (■) –  $1 \cdot 10^5$  Па. Криві з позначками (●) чи (○) вказують, що у просвітах знаходиться газ, а з (■) чи (□) – насичена пара.

Форму поверхні пружного тіла  $h^*(x)$ , яка просіла над виїмкою при 290 К, для ширини виїмок  $2c = 0.5$  м (суцільні криві) та 0.6 м (штрихові) за

різних навантажень  $P^\infty$  зображено на рис. 6. Штрихпунктирні криві описують форму виїмки  $r(x)$ . Область, обмежена кривими  $h^*(x)$  і  $r(x)$ , відповідає просвіту між тілами. Отже, за однакового навантаження зі зменшенням ширини виїмок висота просвітів збільшується.

На рис. 7 зображено розподіл тиску на межі тіл уздовж півперіоду  $[0; 0.5]$  при 290 К для ширини виїмок  $2c = 0.5$  м (суцільні криві) та 0.6 м (штрихові) за різних навантажень  $P^\infty$ . Горизонтальні лінії відповідають тиску газу чи насиченої пари в просвіті. Контактний тиск прямує до нескінченності на краях виїмки, а з віддаленням від неї монотонно спадає, набуваючи локального мінімуму в точках  $x = \pm 0.5$  м, що ділять навпіл ділянку між виїмками. Що більша ширина виїмок, то більший контактний тиск поза зазором.

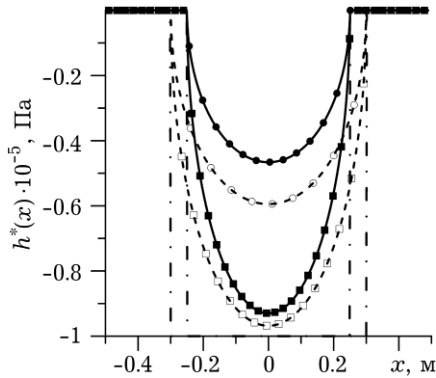


Рис. 6.

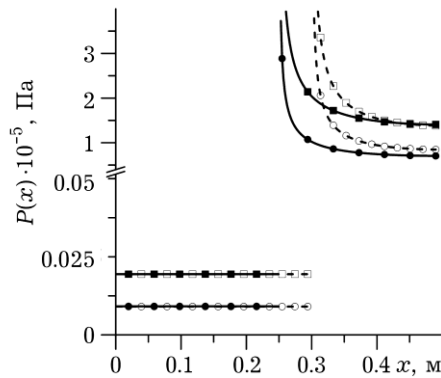


Рис. 7.

**Висновки.** Досліджено контакт пружної півплощини з жорсткою основою, що має періодичну систему прямокутних виїмок. Кожен з міжконтактних просвітів заповнений однаковою кількістю реального газу, стан якого описує рівняння Ван-дер-Ваальса. З використанням теорії функції комплексної змінної та методу функцій міжконтактних просвітів сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно похідної від висоти міжконтактних просвітів, яке після заміни змінних перетворено в СІР з ядром Коші. Для знаходження тиску речовини в просвітах з рівняння стану газу отримано трансцендентне рівняння. Проаналізовано вплив форми виїмок, заповнювача просвітів на локальні (контактний тиск поверхонь тіл, форму просвітів) та ефективні (контактні зближення і податливість тіл) контактні параметри. Встановлено, що температур  $a$  на контактне зближення впливає несуттєво, а контактна податливість з її підвищенням зменшується. Зі збільшенням зовнішнього навантаження контактне зближення зростає, а контактна податливість зменшується. Що більша ширина виїмок, то суттєвіші контактні зближення і податливість.

1. Кит Г. С., Мартиняк Р. М., Мачишин И. М. Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 3. – С. 52–60.
2. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, №1. – С. 103–111.
3. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Вплив ідеального газу у міжповерхневих зазорах на контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 135–140.
4. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаємодія пружного тіла та жорсткої основи з регулярною системою заповнених ідеальним газом прямокут-

- них виїмок // Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвип. – С. 115–118.
5. Кузнецов Е. А. О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 12. – С. 85–94.
  6. Мартиняк Р. М. Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – 26, № 2. – С. 91–94.
  7. Мартиняк Р. М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 4. – С. 144–149.
  8. Мачишин І. М., Мартиняк Р. М. Контакт пружного півпростору і жорсткої основи з виїмкою, заповненою газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 4. – С. 103–107.
  9. Савельев И. В. Курс общей физики. – Москва: Наука, 1966. – 404 с.
  10. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear. – 1985. – 102, № 3. – P. 177–194.
  11. Martynyak R. M The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // J. Mat. Sc. – 2001. – 107, №1. – P. 3680–3685.
  12. Martynyak R. M., Slobodyan B. S. Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // Mater. Sci. – 2009. – 45, № 1. – P. 66–71.

#### **ВЛИЯНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В МЕЖКОНТАКТНЫХ ЗАЗОРАХ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛА И ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВЫЕМОК**

*Исследован безфрикционный контакт упругого тела и жесткого основания при наличии в нем периодически расположенных выемок прямоугольной формы, когда межконтактные зазоры содержат реальный газ. Его состояние описывает уравнение Ван-дер-Ваальса, которое учитывает фазовый переход газа в жидкость. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта относительно производной от высоты зазоров и трансцендентному уравнению для определения давления заполнителя зазоров. Проанализированы зависимости высоты зазоров, давления газа, контактного сближения и контактной податливости тел от нагрузки.*

#### **THE EFFECT OF A REAL GAS IN INTERCONTACT GAPS ON THE INTERACTION BETWEEN A BODY AND A RIGID BASE WITH A PERIODIC ARRAY OF RECTANGULAR GROOVES**

*The frictionless contact between an elastic body and a rigid base with periodically arranged grooves of rectangular shape is investigated for the case when interface gaps are filled with a real gas. The state of the gas is described by the van der Waals equation, which takes into account the phase transition of gas to liquid. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation with Hilbert kernel for a derivative of a height of the gaps and a transcendental equation for a pressure of the gaps filler. The dependences of the height of the gaps, the gas pressure, the average normal displacement and the contact compliance of the bodies on the load are analyzed.*