

О напряженно-деформированном состоянии толстостенных цилиндрических оболочек, ограниченных гофрированными поверхностями

Д. И. Чернопиский

Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Ивано-Франковск, Украина

Методом возмущения формы границы (второй вариант) на основании трехмерных уравнений и соотношений теории упругости с учетом первых трех приближений получено аналитическое решение задачи об упругом равновесии неканонических оболочек, которые близки к цилиндрическим и находятся под действием переменных осевых внешних усилий. Установлено влияние отдельных форм неканонических оболочек, амплитуды и параметра осцилляции граничных поверхностей в осевом или окружном направлениях на величину максимальных напряжений. Показана практически числовая сходимость на основе вклада по абсолютной величине каждого из приближений в общую сумму. Для оболочки в виде сильфона, находящейся под постоянным внешним давлением, приведено сравнение кольцевых напряжений, полученных методом возмущения формы границы, с данными, определенными конечно-разностным методом по уравнениям теории оболочек Векуа.

Ключевые слова: волнообразные толстостенные оболочки, неканонические поверхности, переменное осевое давление, метод возмущения формы границы, малый параметр, напряженно-деформированное состояние, практическая сходимость решения, параметр осцилляции.

Введение. Гофрированные тонкостенные и толстостенные пластины и оболочки широко применяются в виде элементов конструкций в машиностроении (компенсаторы, сильфоны, шестерни). Отметим, что при соединении взрывной сваркой разнородных материалов в составных элементах конструкций поверхности раздела имеют волнообразную форму [1].

Для решения задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) и устойчивости тонких гофрированных оболочек предложены приближенные аналитические и численные методы [2–4]. Экспериментальные исследования по оценке устойчивости близких к сферическим оболочек с гофрированными по азимуту поверхностями изложены в работе [5]. Установлено, что потеря устойчивости таких оболочек происходит при критической нагрузке (внешнее давление), которая значительно выше для сферической оболочки.

Решения задач теории упругости о НДС толстостенных некруговых цилиндрических оболочек на основании численного метода дискретной ортогонализации [6] рассмотрены в [7]. При упругом деформировании тонкостенных и толстостенных оболочек с быстроизменяющейся геометрией граничных поверхностей (смена положительной кривизны на отрицательную в отдельных точках) возникает необходимость значительного увеличения количества узлов при дискретизации зон поверхностей с большими градиентами изменения перемещений и напряжений, что приводит к существенным вычислительным трудностям при расчетах НДС. Для расчета НДС тонких гофри-

рованных оболочек можно воспользоваться уточненными теориями, основанными на гипотезах о распределении перемещений по толщине, применение которых для толстостенных оболочек приводит к погрешностям.

В данной работе в рамках трехмерных уравнений и соотношений теории упругости при статических нагрузках (переменное внутреннее или внешнее давление) приведены числовые результаты о НДС толстостенных оболочек с неканоническими неортогональными поверхностями, близкими к цилиндрическим, которые получены из решения пространственной задачи на основании второго варианта метода возмущения формы границы (МВФГ) [8, 9].

С использованием разложения искоемых компонент перемещений и напряжений в ряды по степеням параметра, характеризующего величину амплитуды отклонения формы неканонической поверхности оболочки от соответствующей круговой цилиндрической, решение исходной краевой задачи о НДС гофрированных толстостенных цилиндрических оболочек в каждом из приближений сводится к решению последовательности граничных задач для полого цилиндра. Графики и числовые результаты о НДС получены с учетом первых трех аналитических приближений (нулевое приближение соответствует решению полого цилиндра как тела канонической формы).

Осесимметричные гофрированные толстостенные оболочки, близкие к цилиндрическим. Упругую толстостенную неканоническую оболочку отнесем к цилиндрической безразмерной системе координат (r, φ, z) с заданными внутренней S_0 и внешней S_1 боковыми поверхностями:

$$r = 1 + \omega_0 f(z) \sim S_0, \quad r = r_1 + \omega_1 \varepsilon f(z) \sim S_1, \quad (1)$$

где $r_1 = \text{const} > 1$; $f(z)$ – непрерывная и дифференцируемая функция; ε – величина амплитуды отклонения поверхности оболочки от соответствующей круговой цилиндрической ($0 < \varepsilon < 1$; $r = r_0 = 1 \sim S_0$; $r = r_1 \sim S_1$); ω_i – параметр, который позволяет управлять формой поверхности оболочки вращения, $\omega_i = \pm 1$ ($i = 0, 1$).

Предположим, что на внутренней S_0 и внешней S_1 боковых поверхностях в направлении оси Oz задано изменение нагрузки согласно выражениям

$$\vec{F}_0(F_{0r}, F_{0z}) = -\delta Q(z) \vec{e}_{n0}; \quad \vec{F}_1(F_{1r}, F_{1z}) = -(1 - \delta) Q(z) \vec{e}_{n1}, \quad (2)$$

где значению $\delta = 1$ соответствует переменное внутреннее давление, $\delta = 0$ – внешнее; $Q(z)$ – интенсивность изменения внешней нагрузки; $\vec{e}_{n0}, \vec{e}_{n1}$ – нормали к поверхностям S_i ($\vec{e}_{ni} = n_{ri} \vec{e}_r + n_{\varphi i} \vec{e}_\varphi + n_{zi} \vec{e}_z$) относительно цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Проекция усилий на боковых поверхностях определим из соотношений

$$F_{0s}(z) = -\delta Q(z) n_{s0}; \quad F_{1s} = -(1 - \delta) Q(z) n_{s1}, \quad s = r, z, \quad (3)$$

где $n_{si} = \cos(\vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_s)$ – направляющие косинусы нормалей к внешней и внутренней поверхностям (1), определяемые согласно [9]:

$$n_r = \frac{1}{\Delta}, \quad n_z = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial r}{\partial z}, \quad n_\varphi \equiv 0, \quad \Delta = \pm \left[1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Знак у радикала (4) определяется в зависимости от направления нормали по отношению к направлению осей координат r, φ, z . Заметим, что в (4) составляющая $n_\varphi \equiv 0$, поскольку уравнения поверхностей (1) оболочек вращения не зависят от угловой координаты φ .

Граничные условия на боковых поверхностях оболочек вида (1) с учетом (2)–(4) представим в виде

$$(\sigma_{rs} n_{ri} + \sigma_{zs} n_{zi}) S_i = F_{is}(z). \quad (5)$$

Таким образом, ввиду осевой симметрии формы поверхности (1) толстостенной оболочки и вида граничных условий (5) относительно оси Oz исходная краевая задача об определении НДС является осесимметричной.

Дополним (5) граничными условиями на торцах $z=0, l$ (l – длина оболочки) вида

$$u_z|_{z=0,l} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=0,l} = 0 \quad (6)$$

или

$$u_r|_{z=0,l} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0,l} = 0. \quad (7)$$

Заметим, что условия (6) соответствуют такому распределению осевых напряжений σ_{zz} , при которых торцы остаются плоскими, в случае (7) – торцы свободны от нормальной нагрузки и не смещаются в своей плоскости.

Ввиду сложности геометрии поверхностей (1) толстостенной оболочки для определения ее НДС при заданных условиях (2) на боковых поверхностях и граничных условиях на торцах (6) или (7) воспользуемся вторым вариантом метода возмущения формы границы [8], представив искомые компоненты перемещений и напряжений в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$(u_j, \sigma_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (u_j^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}). \quad (8)$$

Для определения НДС в точках на граничных поверхностях (1) и в их окрестности $r = r_*$ ($1 \leq r_* \leq r_1$) используем разложение компонент (8) в ряды Тейлора:

$$(u_j, \sigma_{ij})_{r=r_*+\varepsilon f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \frac{(\omega_i f)^k}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial r^k} (u_j^{(n-k)}, \sigma_{ij}^{(n-k)}) \right]_{r=r_*}. \quad (9)$$

Отметим, что перемещения и напряжения на элементарной площадке поверхности (1) находим из соотношений, например:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n|_{S_i} = (u_r n_r + u_z n_z)|_{S_i}; \\ u_s|_{S_i} = (-u_r n_z + u_z n_r)|_{S_i}; \quad u_\tau|_{S_i} = u_\varphi|_{S_i}; \\ \sigma_{nn}|_{S_i} = (\sigma_{rr} n_r^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + 2\sigma_{rz} n_r n_z)|_{S_i}; \\ \sigma_{ss}|_{S_i} = (\sigma_{zz} n_r^2 + \sigma_{rr} n_z^2 - 2\sigma_{rz} n_r n_z)|_{S_i}; \\ \sigma_{ns}|_{S_i} = [(\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) n_r n_z + \sigma_{rz} (n_r^2 - n_z^2)]|_{S_i}, \end{array} \right. \quad (10)$$

где u_l, σ_{lm} ($l, m = n, s, \tau$) – компоненты вектора перемещения \vec{u} и тензора напряжений $\vec{\sigma}$ в криволинейной системе координат n, s, τ , которые в произвольной точке M на поверхности толстостенной оболочки определяются выражениями (4), (9). Здесь ось n совпадает с направлением нормалей $\vec{e}_{n0}, \vec{e}_{n1}$, оси s и τ являются касательными к неканонической поверхности соответственно в осевом и окружном направлениях. Заметим, что в произвольной точке M поверхности S_i между ортом нормали и координатными ортами условия ортогональности не выполняются:

$$\vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_r \neq 0; 1, \quad \vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_\varphi \neq 0; 1, \quad \vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_z \neq 0; 1. \quad (11)$$

Поверхности, для которых выполняются условия (11), относятся к классу неортогональных [8].

Следовательно, с использованием рекуррентных соотношений второго варианта МВФГ [8] для определения перемещений и напряжений в виде рядов (8), (9) в первых трех приближениях, граничные условия (3), (5)–(7) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^{(0)}|_{r=r_i} &= F_{rs}^{(0)}; \quad \sigma_{rs}^{(1)}|_{r=r_i} = -[G_{1i}^{(1)} \sigma_{rs}^{(0)} + G_{2i}^{(1)} \sigma_{zs}^{(0)}]_{r=r_i} + F_{is}^{(1)}|_{r=r_i}, \quad s = r, z; \\ \sigma_{rs}^{(2)}|_{r=r_i} &= -[G_{1i}^{(1)} \sigma_{rs}^{(1)} + G_{2i}^{(1)} \sigma_{zs}^{(1)} + G_{1i}^{(2)} \sigma_{rs}^{(0)} + G_{2i}^{(2)} \sigma_{zs}^{(0)}]_{r=r_i} + F_{is}^{(2)}|_{r=r_i} \end{aligned} \quad (12)$$

(на боковых поверхностях);

$$u_z^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad \sigma_{rz}^{(k)}|_{z=0,l} = 0 \quad (\text{задача а}) \quad (13a)$$

или

$$u_r^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(k)}|_{z=0,l} = 0 \quad (\text{задача б}) \quad (14b)$$

(на торцах, $k = 0, 1, 2$).

Коэффициенты разложения $F_{is}^{(k)}$ проекций усилий (3) определяются из выражений (4) рядами по степеням малого параметра ε [9] с точностью до величин $O(\varepsilon^3)$ для направляющих косинусов n_{si} нормалей \vec{e}_{ni} , например:

$$\begin{aligned} n_{r1} &= \cos(\vec{e}_{n1}, \vec{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \\ n_{z1} &= \cos(\vec{e}_{n1}, \vec{e}_z) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1; & \alpha_1 &= 0; & \alpha_2 &= -\frac{\omega_1^2}{2} [f'(z)]^2; \\ \beta_0 &= 1; & \beta_1 &= -\omega_1 f'(z); & \beta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(штрихом обозначена производная по z).

Следовательно, для коэффициентов разложения внешних усилий по степеням параметра ε имеют место представления

$$\begin{aligned} F_{1r}^{(0)} &= -(1-\delta)Q(z); & F_{1r}^{(1)} &= 0; & F_{1r}^{(2)} &= \frac{1}{2}(1-\delta)\omega_1^2 [f'(z)]^2 Q(z); \\ F_{1z}^{(0)} &= 0; & F_{1z}^{(1)} &= (1-\delta)\omega_1 f'(z)Q(z); & F_{1z}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения для коэффициентов разложения внутренних усилий $F_{0s}^{(k)}$ можно получить аналогично (15)–(17), если воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} n_{r0} &= \cos(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_r) = -\cos(\vec{e}_{n1}, \vec{e}_r); \\ n_{z0} &= \cos(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_z) = -\cos(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае, например, для $F_{0r}^{(0)}$, $F_{0r}^{(2)}$ получим

$$F_{0r}^{(0)} = \delta Q(z); \quad F_{0r}^{(1)} = 0; \quad F_{0r}^{(2)} = -\frac{\omega_0}{2} \delta [f'(z)] Q(z). \quad (19)$$

Дифференциальные операторы $G_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2$) в первых трех приближениях для граничных условий (12), например, в случае уравнения внешней поверхности $S_1 \sim r = r_1 + \omega_1 \varepsilon f(z)$ имеют вид [8]

$$\begin{aligned} G_{11}^{(0)} &= 1; & G_{21}^{(0)} &= 0; & G_{11}^{(1)} &= \omega_1 f(z) \frac{\partial}{\partial r}; & G_{21}^{(1)} &= -\omega_1 f'(z); \\ G_{11}^{(2)} &= \frac{\omega_1^2}{2} \left[f^2(z) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (f'(z))^2 \right]; & G_{21}^{(2)} &= \frac{\omega_1^2}{2} f(z) f'(z) \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (20)$$

В граничных условиях (12) на боковой поверхности ($i=0$) $S_0 \sim r = 1 + \varepsilon \omega_0 f(z)$ выражения для дифференциальных операторов $G_{10}^{(1)}, \dots, G_{20}^{(2)}$ получим из (20) согласно условию

$$G_{10}^{(k)} = -G_{11}^{(k)}; \quad G_{20}^{(k)} = -G_{21}^{(k)}, \quad (21)$$

которое следует из одного и того же закона изменения уравнений (1) на внутренней и внешней поверхностях оболочки:

$$n_{s1} = \cos(\bar{e}_{n1}, \bar{e}_s) = \cos[(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_s) + \pi] = -n_{s0}, \quad s = r, z. \quad (22)$$

Заметим, комбинацией параметров ω_i в уравнениях (1) на боковых поверхностях представляется возможным в пределах единого алгоритма выполнить расчет НДС восьми различных форм оболочек вращения, близких к цилиндрическим, с соответствующими им граничными условиями (12), которые в правой части содержат множители ω_i согласно (17) и отвечают функции $f(z)$, взятой со знаком “+” или “-”.

Из вида граничных условий (12) следует, что решение краевых задач о НДС оболочек вращения неканонической формы по второму варианту МВФГ эффективно, если в нулевом приближении (цилиндрическая форма оболочки) задача имеет точное замкнутое или приближенное аналитическое решение.

Функцию $Q(z)$, определяющую изменение нагрузки в (3), зададим в виде

$$Q(z) = \begin{cases} q_0 \cos \lambda_n z \sim (13a) \\ q_0 \sin \lambda_n z \sim (14б) \end{cases} \quad \text{при} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (23)$$

(λ_n – частота изменения нагрузки, $n = 1, 2, 3, \dots$).

Уравнение неканонической поверхности (1) оболочки в осевом Oz направлении примем в виде

$$f(z) = \cos \lambda_k z, \quad \lambda_k = k\pi/l, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где k – параметр осцилляции поверхности.

Для определения НДС оболочек, ограниченных поверхностями (24) и находящихся под внутренним или внешним давлением вида (23), воспользуемся в каждом из приближений представлением общего решения пространственной задачи в случае изотропной среды [10] через гармонические функции, что позволяет удовлетворить граничные условия (12)–(14б):

$$\begin{aligned} u_r^{(j)} &= \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial r}; & u_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\Omega^{(j)} + \psi_2^{(j)}); \\ \sigma_{rr}^{(j)} &= G \left[2 \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \psi_2^{(j)}}{\partial z^2} \right]; & \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} &= G \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \psi_2^{(j)}}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\Omega^{(j)} = \psi_1^{(j)} - \frac{z}{4(1-\nu)} \frac{\partial \psi_2^{(j)}}{\partial z};$$

$$\psi_1^{(j)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{n,1}^{(j)} I_0(\xi) + B_{n,1}^{(j)} K_0(\xi)] Q(z);$$

$$\psi_2^{(j)}(r, z) = 4(1 - \nu) \sum_{n=1}^{\infty} [A_{n,2}^{(j)} I_0(\xi) + B_{n,2}^{(j)} K_0(\xi)] Q(z); \quad (26)$$

G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\psi_i^{(j)}$ – гармонические функции; $A_{n,i}^{(j)}$ – неизвестные постоянные, определяемые из последовательности решения систем алгебраических уравнений, которые следуют из граничных условий (12)–(14б) согласно выражениям (25), (26); $I_0(\xi)$, $K_0(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя с переменной ξ , которая в каждом из трех приближений определяется зависимостью

$$\xi = \begin{cases} \lambda_n r, & j = 0; \\ (\lambda_k \pm \lambda_n) r, & j = 1; \\ (2\lambda_k \pm \lambda_n) r, \quad \lambda_n r, & j = 2. \end{cases} \quad (27)$$

Заметим, выражения (1)–(27) позволяют выполнить расчет НДС неканонических толстостенных оболочек вращения на основании трехмерных уравнений и соотношений теории упругости.

Некруговые толстостенные оболочки, близкие к цилиндрическим. По аналогии с (1) уравнение поверхностей некруговых оболочек зададим в виде

$$S_0 \sim r = 1 + \omega_0 \varepsilon f(\varphi); \quad S_1 \sim r = r_1 + \omega_1 \varepsilon f(\varphi). \quad (28)$$

Как и выше, имеем $\omega_i = \pm 1$ ($i = 0, 1$); $f(\varphi)$ – функция, определяющая форму боковых поверхностей; r, φ, z – безразмерные цилиндрические координаты. Закон изменения внешних усилий $Q(z)$ на боковых поверхностях (28) имеет вид (23), а изменение внешних усилий задано выражениями

$$\vec{F}_0(F_{0r}, F_{0\varphi}) = -\delta Q(z) \vec{e}_{r0}; \quad \vec{F}_1(F_{1r}, F_{1\varphi}) = -(1 - \delta) Q(z) \vec{e}_{n1}. \quad (29)$$

В представлении (29) для нормалей $\vec{e}_{ni} = n_{ri} \vec{e}_r + n_{\varphi i} \vec{e}_\varphi + n_{zi} \vec{e}_z$ согласно (28) имеем $n_{zi} \equiv 0$. В этом случае направляющие косинусы n_{si} для нормалей \vec{e}_{ni} определяются следующим образом [9]:

$$n_{ri} = r \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{1/2} \Big|_{r=r_i}; \quad n_{\varphi i} = - \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{dr}{d\varphi} \Big|_{r=r_i}. \quad (30)$$

На боковых поверхностях (28) граничные условия согласно (29), (30) имеют вид

$$(\sigma_{rs} n_{ri} + \sigma_{\varphi s} n_{\varphi i})_{S_i} = F_{is}(z), \quad s = r, \varphi, z. \quad (31)$$

Следовательно, определение НДС некруговых волнообразных оболочек сопряжено с решением трехмерных неосесимметричных задач теории упругости с соответствующими граничными условиями (6), (7) на торцах $z = 0, l$.

Представим искомые перемещения и напряжения рядом (8), а на граничных поверхностях $r_* = r_* + \varepsilon \omega_i f(\varphi)$ ($1 \leq r_* \leq r_1$) – разложением по аналогии с (9) в ряд Тейлора. Компоненты перемещений и тензора напряжений на элементарной площадке боковых поверхностей (28) оболочки по аналогии с (10) определим, например, из соотношений:

$$\left\{ \begin{aligned} u_n|_{S_i} &= (u_r n_r + u_\varphi n_\varphi)|_{S_i}; & u_s|_{S_i} &= (-u_r n_\varphi + u_\varphi n_r)|_{S_i}; & u_\tau|_{S_i} &= u_z|_{S_i}; \\ \sigma_{nn}|_{S_i} &= (\sigma_{rr} n_r^2 + \sigma_{\varphi\varphi} n_\varphi^2 + 2\sigma_{r\varphi} n_r n_\varphi)|_{S_i}; \\ \sigma_{ss}|_{S_i} &= (\sigma_{\varphi\varphi} n_r^2 + \sigma_{rr} n_\varphi^2 - 2\sigma_{r\varphi} n_r n_\varphi)|_{S_i}; \\ \sigma_{ns}|_{S_i} &= [(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) n_r n_\varphi + \sigma_{r\varphi} (n_r^2 - n_\varphi^2)]|_{S_i}, \end{aligned} \right. \quad (32)$$

где u_l, σ_{lm} ($l, m = n, s, \tau$) – компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в криволинейной системе координат n, s, τ , которые вычисляются согласно (9) для $f = f(\varphi)$. Направляющие косинусы n_s ($s = r, \varphi, z$) в (32) вычисляются из (30). Как и выше, ось n совпадает с направлением нормалей $\vec{e}_{n0}, \vec{e}_{n1}$, оси s и τ являются касательными к поверхностям S_i в точке основания нормалей.

Для решения задачи о неосесимметричном НДС некруговых оболочек с боковыми поверхностями (28) под действием внутреннего или внешнего давления (29) ограничимся, как и выше, первыми тремя приближениями из разложения компонент вектора смещений и тензора напряжений в виде рядов (8), (9). При этом в каждом из приближений граничные условия запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rs}^{(0)}|_{r=r_i} &= F_{rs}^{(0)}; & \sigma_{rs}^{(1)}|_{r=r_i} &= -[D_{1i}^{(1)} \sigma_{rs}^{(0)} + D_{2i}^{(1)} \sigma_{\varphi s}^{(0)}]|_{r=r_i} + F_{is}^{(1)}|_{r=r_i}; \\ \sigma_{rs}^{(2)}|_{r=r_i} &= -[D_{1i}^{(1)} \sigma_{rs}^{(1)} + D_{2i}^{(1)} \sigma_{\varphi s}^{(1)} + D_{1i}^{(2)} \sigma_{rs}^{(0)} + D_{2i}^{(2)} \sigma_{\varphi s}^{(0)}]|_{r=r_i} + F_{is}^{(2)}|_{r=r_i}, \end{aligned} \right. \quad (33)$$

$$s = r, \varphi, z$$

(на боковых поверхностях);

$$u_r^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad u_\varphi^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(k)}|_{z=0,l} = 0 \quad (\text{задача а}) \quad (34а)$$

или

$$u_z^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad \sigma_{rz}^{(k)}|_{z=0,l} = 0; \quad \sigma_{\varphi z}^{(k)}|_{z=0,l} = 0 \quad (\text{задача б}) \quad (34б)$$

(на торцах, $k \geq 1$).

Коэффициенты $F_{is}^{(k)}$ определяются из разложения проекций усилий (29) в ряды по степеням малого параметра ε , исходя из выражений направляющих косинусов для нормалей к боковым поверхностям, заданных уравнениями вида (28).

Дифференциальные операторы $D_{li}^{(k)}$, $D_{2i}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) в (33) определяются для поверхности $S_1 \sim r = r_1 + \varepsilon f(\varphi)$ выражениями [8]

$$D_{11}^{(0)} = 1; \quad D_{21}^{(0)} = 0; \quad D_{11}^{(1)} = \omega_1 f(\varphi) \frac{\partial}{\partial r}; \quad D_{21}^{(0)} = \frac{\omega_1}{r_1} f'(\varphi);$$

$$D_{11}^{(2)} = \frac{\omega_1^2}{2} \left[f^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r_1^2} (f'(\varphi))^2 \right]; \quad D_{21}^{(2)} = \frac{\omega_1^2}{r_1} f'(\varphi) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (35)$$

На основании представления в виде рядов

$$F_{is} = F_{is}^{(0)} + \varepsilon F_{is}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{is}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad i = 0, 1, \quad s = r, \varphi \quad (36)$$

из выражений (28)–(30) получим

$$F_{is} = -\delta Q(z) n_{0s}; \quad F_{is} = -(1 - \delta) Q(z) n_{1s}. \quad (37)$$

Коэффициенты разложения усилий при степенях ε на внешней и внутренней боковой поверхностях соответственно имеют вид

$$F_{1r}^{(0)} = -(1 - \delta) Q(z), \quad F_{1r}^{(1)} = 0, \quad F_{1r}^{(2)} = \frac{\omega_1^2}{2r_1^2} (1 - \delta) [f'(\varphi)]^2 Q(z),$$

$$F_{1\varphi}^{(0)} = 0, \quad F_{1\varphi}^{(1)} = \frac{\omega_1}{r_1} (1 - \delta) f'(\varphi) Q(z),$$

$$F_{1\varphi}^{(2)} = -\frac{\omega_1^2}{r_1^2} (1 - \delta) f(\varphi) f'(\varphi) Q(z); \quad (38)$$

$$F_{0r}^{(0)} = \delta Q(z), \quad F_{0r}^{(1)} = 0, \quad F_{0r}^{(2)} = -\frac{\omega_1^2}{2} \delta [f\varphi]^2,$$

$$F_{0\varphi}^{(0)} = 0, \quad F_{0\varphi}^{(1)} = -\delta \omega_1 f'(\varphi) Q(z), \quad F_{0\varphi}^{(2)} = \delta \omega_1^2 f(\varphi) f'(\varphi) Q(z),$$

где $\delta = 0$ – внешнее давление; $\delta = 1$ – внутреннее давление.

Выражения (38) следует из (37), если направляющие косинусы нормалей к внутренней и внешней поверхностям представить в виде рядов [8], например, для поверхности $S_1 \sim r = r_1 + \varepsilon \omega_1 f(\varphi)$:

$$n_{r1} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad n_{\varphi 1} = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (39)$$

где α_i, β_i – коэффициенты,

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_1^2}{2r_1^2} [f'(\varphi)]^2; \quad (40)$$

$$\beta_0 = 0; \quad \beta_1 = \frac{\omega_1}{r_1} f'(\varphi); \quad \beta_2 = \frac{\omega_1^2}{r_1^2} f(\varphi) f'(\varphi)$$

(штрихом обозначена производная по φ).

Заметим, что решение в нулевом приближении (круговой полый цилиндр) является общим как для неканонических оболочек вращения, ограниченных поверхностями вида (1), так и для некруговых цилиндрических оболочек с поверхностями, заданными уравнениями (28). При этом, как и выше, эффективность применения второго варианта МВФГ для решения трехмерных краевых задач о НДС некруговых оболочек, близких к цилиндрическим, зависит от наличия точного или приближенного аналитического решения для конечного кругового полого цилиндра (нулевое приближение).

Закон изменения внешней нагрузки $Q(z)$, как и в случае неканонических оболочек вращения, определяется функцией вида (23), а форма боковых поверхностей некруговых гофрированных оболочек, заданных уравнениями (28), – функцией

$$f(\varphi) = \sin k\varphi + \beta \sin 3k\varphi, \quad k = 1, 2, 3. \quad (41)$$

Исходная краевая задача о НДС некруговых оболочек с граничными условиями (33)–(34б) при заданных законах изменения внешней нагрузки (23) и формой боковых поверхностей в виде (41) сводится в каждом из последовательных приближений ($j \geq 1$) к решению трехмерных неосесимметричных задач, для которых компоненты перемещения и тензора напряжений в изотропной среде [10] определяются через три гармонические функции, например, в случае $u_r^{(j)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(j)}$:

$$u_r^{(j)} = \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3^{(j)}}{\partial \varphi};$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} = 2G \left[-\frac{\partial^2 \Omega^{(j)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Omega^{(j)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_3^{(j)}}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi_3^{(j)} \right], \quad (42)$$

где

$$\Omega^{(j)}(r, \varphi, z) = \psi_1^{(j)}(r, \varphi, z) + \frac{r}{4(1-\nu)} \frac{\partial \psi_2^{(j)}(r, \varphi, z)}{\partial r};$$

$$\psi_1^{(j)}(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn,1}^{(j0)} I_m(\xi) + B_{mn,1}^{(j)} K_m(\xi)] Q(z) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi};$$

$$\psi_2^{(j)}(r, \varphi, z) = 4(1-\nu) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn,2}^{(j)} I_m(\xi) + B_{mn,2}^{(j)} K_m(\xi)] Q(z) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi};$$

$$\psi_3(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn,3}^{(j)} I_m(\xi) + B_{mn,3}^{(j)} K_m(\xi)] Q(z) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}. \quad (43)$$

Согласно выражениям (42) для перемещений и напряжений из граничных условий (33), (34) для каждого приближения находим неизвестные постоянные $A_{mn,i}^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3$) как решения алгебраических систем. Величина порядка m в модифицированных функциях Бесселя $I_m(\xi)$, $K_m(\xi)$ ($\xi = \lambda_n r$) зависит от значения k – параметра осцилляции некруговой поверхности (41) и определяется в каждом из приближений j так: $j = 0 \sim m = 0$ (круговой полый цилиндр); $j = 1 \sim m = k, 2k$; $j = 2 \sim 3k, 4k, 6k$.

Таким образом, представляется возможность в зависимости от выбора значений ω_0 и ω_1 в уравнениях поверхностей (1), (28) по единому алгоритму выполнить расчет НДС на ЭВМ для восьми вариантов форм неканонических оболочек.

Результаты расчетов НДС неканонических толстостенных оболочек, близких к цилиндрическим. Числовые результаты, приведенные в табл. 1, 2, получены из расчетов НДС неканонических толстостенных оболочек (рис. 1, 2) в случае их нагружения давлением (внутренним или внешним), которое изменяется по синусоидальному закону $q_{zs} = q_0 \sin \lambda_n z$ при $n = 1, z = 3$ для следующих значений геометрических параметров и упругих постоянных: $\varepsilon = 0,1$; $r_1 = 1,4$; $l = 6$; $\nu = 0,3$. В частности, при внешнем давлении вид нагружения оболочки показан на рис. 1,а.

Т а б л и ц а 1

Влияние неканонической формы оболочки вращения на величину и характер распределения напряжений на внутренней и внешней поверхности

Форма оболочки на рис. 1	Полый цилиндр				Неканоническая оболочка вращения			
	$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)*}}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{zz}^{(0)*}}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)**}}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{zz}^{(0)**}}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^*}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{zz}^*}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{**}}{q_{zs}}$	$\frac{\sigma_{zz}^{**}}{q_{zs}}$
Внутреннее давление								
а	3,018	-0,200	2,131	0,171	2,878	-0,352	1,885	-0,254
б	3,018	-0,200	2,131	0,171	3,098	-0,020	2,303	0,502
Внешнее давление								
а	-4,002	0,251	-3,145	-0,221	-3,743	0,416	-2,776	0,419
б	-4,002	0,251	-3,145	-0,221	-4,182	0,074	-3,432	-0,743

Примечание. Одной звездочкой обозначены данные для внутренней поверхности, двумя – для внешней.

При $\beta = 0$ имеем некруговую оболочку (рис. 2,а), при $\beta = \pm 1/9$ – оболочки с закругленными гофрами трапециевидной и треугольной формы.

Общим для выполненных расчетов является определение величины концентрации напряжений для точек поверхности со значительным градиентом

Т а б л и ц а 2

Влияние неканонической некруговой формы оболочки на величину и характер распределения напряжений на внутренней (над чертой) и внешней (под чертой) поверхности

Форма оболочки на рис. 2	Полый цилиндр	Неканоническая некруговая оболочка
	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}/q_{zs}$	$\sigma_{\varphi\varphi}/q_{zs}$
Внутреннее давление		
а ($\varphi = \pi/16$)	<u>3,018</u>	<u>11,672</u>
	2,131	—
б ($\varphi = 3\pi/16$)	<u>3,018</u>	<u>8,861</u>
	2,131	4,594
Внешнее давление		
б ($\varphi = 3\pi/16$)	<u>-4,002</u>	<u>-9,657</u>
	-3,145	-5,709

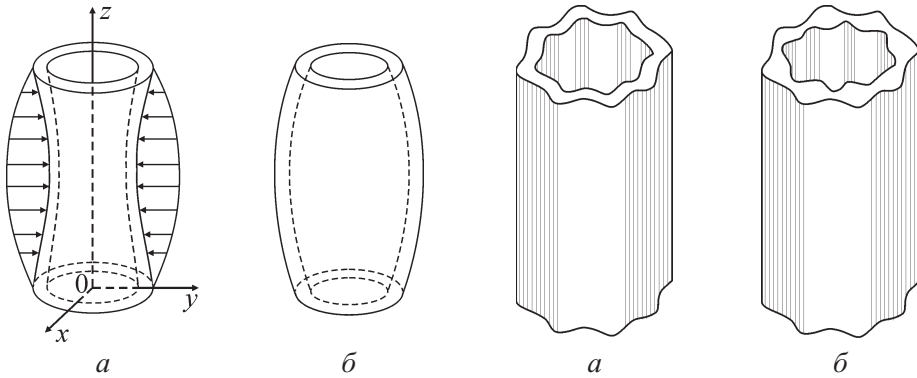


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Формы неканонической толстостенной оболочки вращения при $k = 2$ в зависимости от значений $\omega_0 = \omega_1 = 1$ (а) и $\omega_0 = \omega_1 = -1$ (б).

Рис. 2. Формы неканонической толстостенной некруговой оболочки при $k = 8, \beta = 0$ в зависимости от значений $\omega_0 = \omega_1 = 1$ (а) и $\omega_0 = 1; \omega_1 = -1$ (б).

изменения напряжений, который вызван максимальной интенсивностью нагружения и минимальной кривизной поверхности неканонической оболочки. В этих точках для рассмотренного выше класса оболочек направления ортов криволинейной и основной ортогональной системы координат совпадают, что исключает необходимость вычисления перемещений и напряжений согласно формулам (10), (32).

Числовые результаты расчета НДС неканонических оболочек вращения (рис. 1) свидетельствуют о значительном влиянии геометрической формы граничных поверхностей и вида нагружения на характер их упругого деформирования (табл. 1).

Заметим, что приведенные в табл. 2 данные о кольцевых $\sigma_{\varphi\varphi}/q_{zs}$ напряжениях в некруговой оболочке для указанного выше вида нагружения и граничных условий на ее торцах на один-два порядка больше значений других компонент напряженного состояния. Сравнение представленных в табл. 1, 2

данных при одном и том же виде нагружения показывает, что изменение формы поверхностей неканонических оболочек соответственно в осевом и окружном направлениях существенно влияет на величину максимальных напряжений.

Данные расчета НДС неканонических оболочек вращения согласно второму варианту МВФГ и результаты практической сходимости относительно числовых данных в каждом из приближений и их процентному отклонению от значений напряжений для полого цилиндра (нулевое приближение), принятых за 100%, приведены в табл. 3, где над чертой представлены значения кольцевых напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}/q_{zs}$, под чертой – осевых σ_{zz}/q_{zs} , которые соответствуют оболочке вращения с внутренней ($\omega_0 = 0$) гладкой поверхностью $S_0 \sim r = 1$ и внешней ($\omega_1 = 1$) гофрированной поверхностью $S_1 \sim r = 1,4 + \varepsilon \cos \frac{k\pi}{l} z$. С повышением параметра осцилляции k отмечается значительный рост указанных напряжений на внешней поверхности в зоне минимальной толщины оболочки в сечении $z = 3$ при максимальном внутреннем давлении.

Т а б л и ц а 3

Значения кольцевых и осевых напряжений в зависимости от изменения параметра осцилляции неканонической поверхности оболочки вращения

k	$\frac{\sigma_{ii}^{(0)}}{q_{zs}}$	$\Delta_i^{(0)}, \%$	$\frac{\sigma_{ii}^{(1)}}{\varepsilon q_{zs}}$	$\Delta_i^{(1)}, \%$	$\frac{\varepsilon^2 \sigma_{ii}^{(2)}}{q_{zs}}$	$\Delta_i^{(2)}, \%$	$\frac{\sigma_{ii}}{q_{zs}}$
18	2,131	84,6	0,350	13,9	0,039	1,5	2,520
	0,171	29,0	0,410	69,5	0,009	1,5	0,590
54	2,131	78,7	0,552	20,6	0,019	0,2	2,672
	0,171	13,5	1,306	81,6	-0,062	4,9	1,145

В табл. 4 представлены значения кольцевых напряжений в зависимости от изменения толщины некруговой неканонической оболочки под действием внутреннего давления (рис. 2,а) и процентный вклад каждого из приближений в величину максимального напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}/q_{zs}$ на поверхности $S_0 \sim 1 + \sin 8\varphi$ в сечении ($z = 3, \varphi = \pi/16$). С увеличением толщины некруговой оболочки сходимость по второму варианту МВФГ значительно улучшается относительно максимальных значений напряжений.

Т а б л и ц а 4

Значения кольцевых напряжений в зависимости от толщины некруговой неканонической оболочки

r_1	Приближение						
	Нулевое	$\Delta_\varphi^{(0)}, \%$	Первое	$\Delta_\varphi^{(1)}, \%$	Второе	$\Delta_\varphi^{(2)}, \%$	$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{q_{zs}}$
1,4	3,018	25,8	7,256	62,2	1,398	12,0	11,672
1,7	1,976	30,0	4,408	66,9	0,201	3,1	6,385

Рис. 3 иллюстрирует влияние формы поверхности гофра (параметр β) в характерных точках сечений ($\varphi = \text{const}$) на величину и нелинейный характер изменения максимальных напряжений по толщине оболочки.

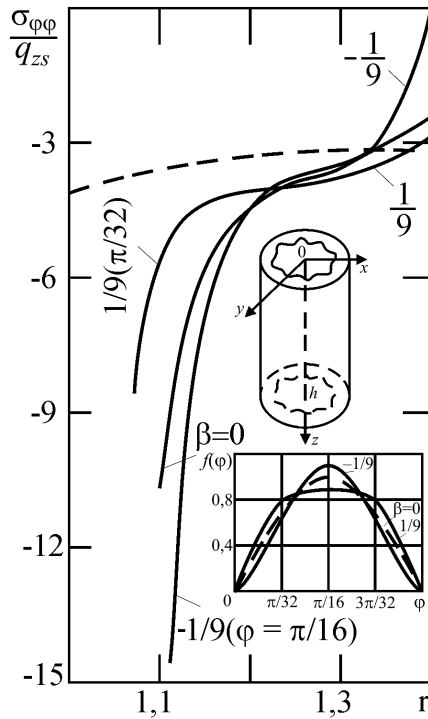


Рис. 3. Влияние формы поверхности гофра на распределение напряжений по толщине некруговой толстостенной оболочки (сплошные линии) и гладкого кругового полого цилиндра (штриховые линии).

Достоверность числовых данных о НДС неканонических оболочек гофрированной формы при выполнении, в частности, условий плоского торца подтверждается при их сравнении с результатами о НДС сиффона, которые получены конечноразностным методом на основании уравнений теории оболочек Векуа [2]. При расчетах полагали, что оболочка в виде сиффона находится под внешним давлением, которое изменяется по закону $q_0 \cos \lambda_n z$ ($n = 1/360$) и соответствует постоянному давлению. Поскольку сиффон представляет оболочку с периодической гофрированной поверхностью, расчет его НДС выполнен в пределах одного гофра. Сопоставив безразмерные цилиндрические координаты r, φ, z с принятой системой криволинейных координат [2] x^1, x^2, x^3 ($x^1 \sim z, x^2 \sim \varphi, x^3 \sim r$), получим выражения для изменения толщины сиффона h вдоль образующей

$$h = \left[1 + a \cos \left(\frac{\pi x^1}{b} \right) \right] h_0$$

с соответствующими поверхностями

$$S_0 \sim r = 1 - \frac{ah_0}{R - h_0} \cos\left(\frac{\pi x^1}{b}\right); \quad S_1 \sim \frac{R + h_0}{R - h_0} + \frac{ah_0}{R - h_0} \cos\left(\frac{\pi x^1}{b}\right),$$

где $a = \text{const}$; $R, 2h_0$ – радиус срединной S_{cp} поверхности и толщина гладкой оболочки; $2b$ – период изменения гофра в направлении оси z . Тогда согласно уравнениям поверхностей S_0 и S_1 (1) получим $\varepsilon = ah_0/(R - h_0)$, $k/l = (r - h_0)b$. Принятым в [2] геометрическим размерам элемента гофра $R = 2,0$ м; $2h_0 = 0,02$ м; $a = 0,75$; $b = 0,40$ м соответствуют безразмерные величины $\varepsilon = 0,00375$; $r_1 = 1,01$; $k = 50$; $l = 10$. Результаты сравнения, полученные с использованием второго варианта МВФГ и уравнений теории оболочек Векуа [2], представлены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Значения кольцевых напряжений в неканонической оболочке типа сильфона, полученные из расчета НДС с использованием второго варианта МВФГ [10] и уравнений теории оболочек Векуа [2]

Второй вариант МВФГ				Теория оболочек Векуа (конечноразностный метод)			
z	S_1	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	$x^1 \sim z$	$x^3 \sim r$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$
5,226	S_0	-101,5	-96,900	0	$-h$	-101,0	-87,96
5,226	S_{cp}	-101,5	-69,590	0	0	-100,5	-77,85
5,226	S_1	-100,5	-72,430	0	h	-100,5	-67,75
5,326	S_0	-101,5	-128,680	$\frac{b}{2}$	$-h$	-101,0	-112,20
5,326	S_{cp}	-101,0	-105,120		0	-100,5	-102,10
5,326	S_1	-100,5	-81,710		h	-100,0	-91,90
5,426	S_0	-101,5	-155,060	b	$-h$	-100,0	-143,80
5,426	S_{cp}	-101,0	-168,390		0	-100,5	-163,00
5,426	S_1	-100,5	-210,105		h	-100,0	-182,10

На основании трехмерных уравнений теории упругости числовые данные о НДС отдельных форм гофрированных оболочек, близких к цилиндрическим, получены путем построения в каждом из приближений решений (26), (43) в виде отношения специальных функций, ограниченных на интервале (0, 1]. Способ построения решений краевых задач основан на использовании отношений [11] и определяется поведением специальных функций в зависимости от изменения их аргументов и порядков, определяемых геометрическими размерами оболочек, параметрами внешней нагрузки и частотой осцилляции граничных поверхностей в поперечном (рис. 1) или окружном (рис. 2) направлениях. Такой подход позволяет выполнить числовые расчеты НДС неканонических оболочек в произвольном диапазоне изменения геометрических размеров, параметров внешней нагрузки и параметров уравнений граничных поверхностей.

Заключение. Методом возмущения формы границы (второй вариант) на основании трехмерных уравнений и соотношений теории упругости с учетом первых трех приближений при переменном осевом усилии получено аналитическое решение задачи о НДС неканонических оболочек, ограниченных неортогональными поверхностями, близкими к цилиндрическим. Для отдельных форм оболочек, которые находятся под действием переменного осевого внутреннего или внешнего давления, в зависимости от направления волнообразования граничной поверхности показано, как давление влияет на величину максимальных напряжений при одном и том же виде нагружения. Приведено сравнение полученных МВФГ величин кольцевых напряжений для оболочки в виде сифона, находящейся под постоянным внешним давлением, с результатами числового решения задачи конечноразностным методом на основании представления перемещений и напряжений по полиномам Лежандра согласно уравнениям теории оболочек Векуа.

Резюме

Методом збурення форми границі (другий варіант) на основі тривимірних рівнянь і співвідношень теорії пружності з урахуванням перших трьох наближень отримано аналітичний розв'язок задачі щодо пружної рівноваги неканонічних оболонок, що близькі до циліндричних і знаходяться під дією змінних осьових зовнішніх зусиль. Установлено вплив окремих форм неканонічних оболонок, амплітуди і параметра осциляції граничних поверхонь в осьовому чи окружному напрямку на величину максимальних напружень. Показано практично числову збіжність на основі вкладу за абсолютною величиною кожного із наближень у загальну суму. Для оболонки у вигляді сифона, що знаходиться під дією постійного зовнішнього тиску, приведено порівняння кільцевих напружень, отриманих методом збурення форми границі, з даними, отриманими скінченно-різницевою методом за рівняннями теорії оболонок Векуа.

1. *Петушков В. Г.* Применение взрыва в сварочной технике. – Киев: Наук. думка, 2005. – 753 с.
2. *Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П.* Неклассическая теория оболочек и ее приложения к решению инженерных задач. – Львов: Вища шк., 1978. – 190 с.
3. *Григоренко Я. М., Захарийченко Л. И.* Исследование влияния изменения частоты и амплитуды гофрировки цилиндрических оболочек на их напряженно-деформированное состояние // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 12. – С. 78 – 85.
4. *Семенюк Н. П., Несходовская Н. А.* Применение теории типа Тимошенко к исследованию устойчивости гофрированных цилиндрических оболочек // Там же. – 2002. – 38, № 6. – С. 99 – 107.
5. *Бранков Г. И.* Некоторые особенности при исследовании волнообразных оболочек // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – М.: Наука, 1972. – С. 79 – 88.

6. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 280 с.
7. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 5. – С. 61 – 71.
8. Гузь А. Н., Неміш Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
9. Неміш Ю. М. Пружна рівновага деформівних циліндрів змінної товщини // ДАН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 2. – С. 155 – 158.
10. Youngdohl C. K. On the completeness of a set of stress elasticity problems in general cylindrical coordinates // Int. J. End. Sci. – 1969. – **7**, No. 1. – P. 61 – 79.
11. Чернопиский Д. И. Некоторые особенности расчета деформируемых цилиндров в модифицированных функциях Бесселя // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 6. – С. 45 – 51.

Поступила 07. 07. 2010