

Влияние трещины усталости на колебания простейшей регулярной упругой системы

В. А. Круц, А. П. Зиньковский, Е. А. Синенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Приведены результаты вычислительных экспериментов по определению закономерностей формирования колебаний дискретной модели образца камертонного типа при наличии в одном из стержней закрывающейся трещины усталости. Получены зависимости, описывающие влияние параметров трещины на колебания объекта исследования при основном резонансе и субрезонансе.

Ключевые слова: колебания, регулярная система, образец камертонного типа, закрывающаяся трещина усталости, основной резонанс, субрезонанс.

Введение. Многие конструктивные элементы машин, такие как рабочие лопатки турбоагрегатов, в процессе эксплуатации подвергаются влиянию силовых и температурных нагрузок, а также различного рода посторонних предметов (пыль, лед, птицы и т.д.), в результате чего возникают повреждения, которые можно разделить на две группы. К первой группе относятся повреждения типа вмятин, забоин, незакрывающихся трещин, которые не вызывают существенного изменения упругоинерционных характеристик изучаемого объекта в течение цикла его деформирования при различных видах колебаний. Закрывающиеся, или так называемые дышащие (breathing) трещины усталости, как типичный пример второй группы повреждений, наоборот, обуславливают изменение указанных характеристик, что является причиной нелинейности колебаний. Изучению колебаний объектов техники при наличии закрывающейся трещины усталости в последнее время уделяется большое внимание. Об этом свидетельствуют, в частности, исследования [1–12], направленные в основном на изучение колебаний отдельного конструктивного элемента, например стержня [1–3, 6–9], пластины [10] или лопатки [11, 12].

Однако ввиду характерного для узлов машин наличия различного рода механических связей их составляющих рассмотрение в отдельности конструктивного элемента не позволяет достаточно точно описать его динамическое состояние. Это возможно только при учете его взаимодействия с другими элементами исследуемой системы. Поэтому в теории колебаний все большее внимание уделяется изучению сложных механических систем, среди которых особое место занимают регулярные системы, представляющие последовательное или параллельное соединения однотипных элементов (подсистем). К таким системам в первую очередь относятся пакеты лопаток, а также их венцы как особый вид регулярных систем, обладающих поворотной симметрией.

Результаты обзора литературных источников показывают, что работ по изучению колебаний рассматриваемых систем с повреждениями типа трещин усталости имеется ограниченное количество. Следует отметить лишь работы

по расчетно-экспериментальному исследованию влияния краевой незакрывающейся трещины на колебания образца камертонного типа как линейной регулярной системы [13], а также численному исследованию колебаний модели лопаточного аппарата турбомашин с таким повреждением [14, 15].

С учетом вышеизложенного цель настоящей работы заключается в численном исследовании влияния параметров закрывающейся трещины усталости на формирование колебаний простейшей регулярной системы, состоящей из двух однотипных элементов и моделирующей пакет двух лопаток.

Объект исследования и его моделирование. Для решения задачи был выбран образец камертонного типа с краевой трещиной нормального отрыва в одном из стержней (рис. 1). Это обусловлено тем, что колебания такой системы при отсутствии повреждения или наличии незакрывающейся трещины, как отмечалось выше, достаточно хорошо изучены, что позволяет сравнить полученные результаты исследований с известными.

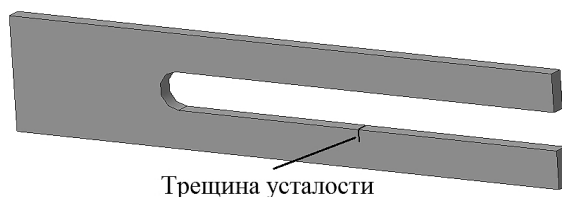


Рис. 1. Образец камертонного типа.

В соответствии с постановкой задачи на первом этапе ее решения необходимо выбрать расчетную модель исследуемого объекта. При изучении колебаний стержневых элементов с трещиной усталости наиболее простой и широко используемой моделью [16] является система с одной степенью свободы (рис. 2,а). В случае относительно малых размеров трещины можно пренебречь некоторым различием между формой колебаний стержня на полуциклах его деформирования с открытой и закрытой трещиной. Такая модель позволяет с достаточной достоверностью описать динамическое поведение изолированного стержня с рассматриваемым повреждением при его колебаниях по одной из возможных собственных форм. Поэтому для исследуемого образца при наличии трещины усталости в одном из его составляющих стержней, в данном случае первом, с учетом их упругой связи также выбрана дискретная модель (рис. 2,б). С целью более отчетливого представления о влиянии трещины на колебания системы в качестве ее исходного неповрежденного состояния принята строго регулярная система, для которой приведены массы (m_1 и m_2), коэффициенты жесткости (k_1 и k_2 , где $k_1 = k_o + k_p$) и вязкого трения (c_1 и c_2) подсистем одинаковы, т.е. $m_1 = m_2 = m$; $k_1 = k_2 = k$; $c_1 = c_2 = c$, где k_o – коэффициент жесткости стержня с открытой трещиной (в данном случае при $u > 0$).

Предполагая, что рассматриваемый вид повреждения изменяет лишь упругие свойства стержня в процессе его циклического деформирования, вынужденные колебания выбранной дискретной модели образца при действии на каждый из стержней сосредоточенной гармонической силы $P(t) = P_0 \cos \nu t$ и

учете вязкого сопротивления можно описать следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2h\dot{u}_1 + p^2[1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u_1)]u_1 + \gamma p^2(u_1 - u_2) &= q_0 \cos vt; \\ \ddot{u}_2 + 2h\dot{u}_2 + p^2 u_2 + \gamma p^2(u_2 - u_1) &= q_0 \cos vt, \end{aligned} \quad (1)$$

где h – коэффициент демпфирования, $h = c/2m$; p – собственная частота колебаний неповрежденной подсистемы, $p = \sqrt{k/m}$; $\gamma = k_s/k$; k_s – коэффициент жесткости упругой связи стержней; $q_0 = P_0/m$; u_j – перемещение массы m_j относительно устойчивого равновесия; α – параметр, интегрально характеризующий относительное изменение жесткости стержня при наличии открытой трещины [16], который в данном случае для поврежденного стержня ($j = 1$) определяется по формуле

$$\alpha = (k - k_0)/k.$$

При $\gamma \equiv 0$ получим систему несвязанных дифференциальных уравнений, описывающих колебания каждого стержня образца как изолированной подсистемы.

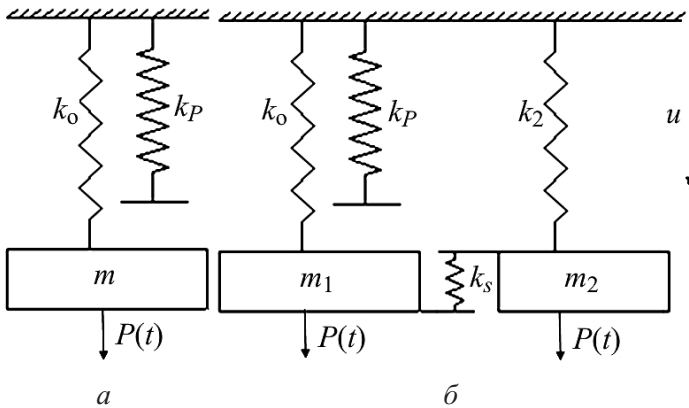


Рис. 2. Дискретные модели изолированного стержня (а) и образца камертонного типа (б) с трещиной усталости.

Основные положения алгоритма решения задачи и проверка его достоверности. Решение системы дифференциальных уравнений (1), описывающих вынужденные колебания модели образца камертонного типа (рис. 2,б), и первого дифференциального уравнения системы (1) при $\gamma \equiv 0$, описывающего вынужденные колебания изолированного стержня (рис. 2,а) с закрывающейся трещиной усталости, осуществлялось методами Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага 4-го порядка точности [17] и осреднения по ускорениям [18].

Нелинейность системы, обусловленная наличием закрывающейся трещины усталости, при действии вынуждающей гармонической силы проявляется в возбуждении суб- и суперрезонансных режимов. Как показано в [16], наи-

более представительным вибродиагностическим параметром наличия трещины может быть отношение амплитуд второй $A^{(2)}$ гармоники к первой $A^{(1)}$ – $\kappa_2 = A^{(2)}/A^{(1)}$ при супергармоническом резонансе 2-го порядка ($\nu = 0,5p_r$) и амплитуд первой $A^{(1)}$ гармоники ко второй $A^{(2)}$ – $\kappa_1 = A^{(1)}/A^{(2)}$ при субгармоническом резонансе порядка 1/2 ($\nu = 2p_r$), где p_r – основная резонансная частота колебаний исследуемой системы с повреждением. Поэтому в процессе вычислительных экспериментов определялись именно указанные амплитуды составляющих гармоник колебаний и их отношения.

Опробование разработанного алгоритма решения уравнений (1) осуществлялось на примере анализа вынужденных колебаний модели изолированного стержня с закрывающейся трещиной усталости при субгармоническом резонансе. Все расчеты проводились при собственной частоте неповрежденного стержня $p = 1 \text{ с}^{-1}$ и действии вынуждающей гармонической силы с относительной амплитудой $q_0 = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}^2$.

На рис. 3 приведено изменение перемещения u массы m в зависимости от времени для $h = 0,0008 \text{ с}^{-1}$ и $\alpha = 0,1$ при субгармоническом ($\nu = 2p_r$) режиме колебаний. Аналогичные расчеты выполнены также для других значений h . Анализ полученных результатов расчета показывает, что установившийся режим колебаний исследуемой системы, который с практической точки зрения представляет наибольший интерес при изучении колебаний рассматриваемых объектов, наступает по истечении определенного времени, в данном случае через 4000 с.

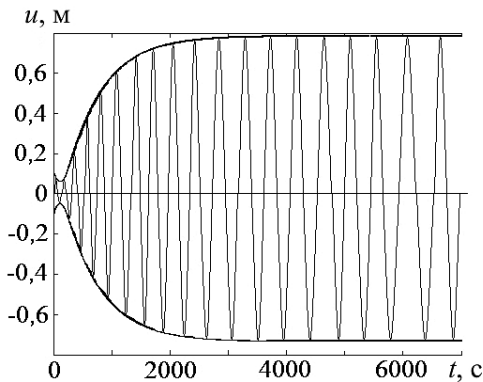


Рис. 3. Пример численного определения зависимости изменения перемещения u массы m от времени t дискретной модели изолированного стержня с закрывающейся трещиной усталости.

Следующим этапом алгоритма решения задачи является определение характеристик установившихся вынужденных колебаний. Для обработки полученных зависимостей $u(t)$ использовалась процедура быстрого преобразования Фурье (FFT), в соответствии с которой массив обрабатываемых значений должен быть кратным 2^n , где n – целое число, а количество периодов указанной функции – не менее трех. В данном случае это достигалось путем интерполяции зависимости $u(t)$, соответствующей режиму установившихся вынужденных колебаний, и представления ее 12 периодов в виде 8192 точек.

Были проведены вычислительные эксперименты по определению зависимости вибродиагностического параметра κ_1 при субгармоническом резонансе от характеристики нелинейности α дискретной модели изолированного стержня. С целью обеспечения сравнения полученных результатов с данными [16] расчеты проводились при значениях коэффициента демпфирования h , равных 0,0008, 0,0016 и 0,0032 с^{-1} , и варьировании параметра α как характеристики трещины усталости от 0 до 0,277.

В качестве примера на рис. 4 представлены результаты расчета, полученные с использованием методов Рунге-Кутты и осреднения по ускорениям. Там же приведены данные работы [16]. Видно, что значения вибродиагностического параметра κ_1 , полученные по этим методам, хорошо согласуются с приведенными в [16], что свидетельствует о достоверности разработанного алгоритма. С учетом этого все дальнейшие исследования колебаний выбранной дискретной модели образца камертонного типа выполнялись с использованием метода Рунге-Кутты.

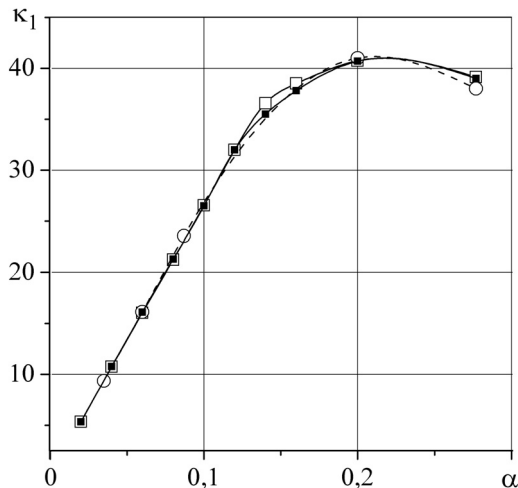


Рис. 4. Значения вибродиагностического параметра κ_1 (точки) и его зависимость (линии) от характеристики нелинейности α дискретной модели изолированного стержня при субгармоническом резонансе: \square – по методу Рунге-Кутты; \blacksquare , сплошная линия – по методу осреднения по ускорениям; \circ , штриховая линия – данные [16].

Влияние параметров трещины усталости на формирование колебаний регулярной системы. Был проведен комплекс вычислительных экспериментов по оценке влияния параметров трещины усталости на закономерности колебаний дискретной модели камертонного образца (рис. 2,б). Все расчеты осуществлялись при тех же параметрах, характеризующих трещину усталости, рассеяние энергии и возбуждение колебаний, что и для изолированного стержня. Это является необходимым условием при проведении сравнения полученных результатов.

Для образца камертонного типа при наличии нарушения его регулярности даже при синфазном возбуждении, как известно [19], характерны две формы колебаний: синфазная и антифазная. Поэтому для амплитуд возбуждаемых гармоник резонансных колебаний стержней образца с трещиной

усталости введем обозначение $A_j^{(iq)}$, где $i=1, 2$ – номер гармоники колебаний; $q=I, II$ – вид формы колебаний образца (I – синфазная, II – антифазная); $j=1$ – для поврежденного стержня; $j=2$ – для неповрежденного. В дальнейшем будем использовать относительные амплитуды колебаний $\bar{A}_j^{(iq)} = A_j^{(iq)} / A_r$, где A_r – резонансная амплитуда колебаний стержней образца в случае его строгой регулярности.

Рассмотрим результаты выполненных вычислительных экспериментов, полученные при коэффициенте жесткости k_s упругой связи подсистем, равном $0,015k$, для случая основного и субгармонического резонансов.

Основной резонанс ($\nu = p_r^{(q)}$). В соответствии с разработанным алгоритмом осуществлялось Фурье-преобразование перемещений масс дискретной модели образца камертонного типа, по результатам которого определялся спектр амплитуд колебаний. Анализ последнего показал, что при рассматриваемом возбуждении амплитуды высших гармоник значительно меньше основной. Так, при $\alpha = 0,02$ величина отношения амплитуд κ_2 при основном резонансе равна $0,0014$, что согласуется с результатами расчетов колебаний дискретной модели изолированного стержня с закрывающейся трещиной [20] и свидетельствует о малой информативности в данном случае его значения как вибродиагностического параметра. Однако наличие второй гармоники обуславливает возможность возбуждения субгармонических резонансов $1/s$ ($s = 2, 4, \dots$) порядка.

Рассмотрим влияние параметров закрывающейся трещины на амплитуды первой гармоники колебаний подсистем модели образца камертонного типа. Были построены зависимости относительных амплитуд $\bar{A}_j^{(1q)}$ колебаний подсистем от параметра нелинейности α . В качестве примера на рис. 5 приведены указанные зависимости при $h = 0,0016 \text{ с}^{-1}$. Там же для сравнения эта зависимость представлена для модели изолированного поврежденного стержня. Анализ зависимостей свидетельствует о том, что, во-первых, уровень резонансных амплитуд поврежденного стержня при синфазной форме колебаний образца камертонного типа значительно выше, чем поврежденного стержня в изолированном состоянии. При антифазной форме колебаний наблюдается обратный эффект. Во-вторых, при основном резонансе высшие гармоники в спектре амплитуд колебаний, как и для изолированного стержня, являются очень малыми. Это означает, что при исследуемом режиме колебаний нелинейность системы, обусловленная закрывающейся трещиной усталости, не оказывает влияния на распределение резонансных амплитуд колебаний. Такой вывод подтверждается результатами расчетов резонансных колебаний рассматриваемой системы при открытой трещине, приведенными на рис. 6. В-третьих, представленные зависимости качественно совпадают с полученными для образца камертонного типа от расстройки частот стержней, обусловленной как допусками на их изготовление [19], так и наличием повреждения типа забоины [13].

Поскольку расстройка частот однотипных элементов является наиболее используемой характеристикой нарушения регулярности систем, рассмотрим изменение резонансных амплитуд колебаний исследуемой модели образца

камертонного типа при наличии закрывающейся и открытой трещин в зависимости от расстройки $\Delta p = \frac{|p_1 - p|}{p} \cdot 100\%$ частот колебаний стержней, где $p_1 = \sqrt{k_0/m}$ – собственная частота колебаний стержня при открытой трещине усталости, которая зависит от параметра α , определяемого по формулам, приведенным в [7]. Полученные зависимости относительных амплитуд $\bar{A}_1^{(1q)}$ подсистемы, моделирующей поврежденный стержень образца как определяющего максимальную его вибронапряженность при синфазной форме колебаний, от расстройки частот Δp приведены на рис. 6. Как видно, экстремум указанных зависимостей при открытой трещине имеет место при расстройке частот, меньшей, чем в случае закрывающейся трещины. Однако экстремальные значения резонансных амплитуд колебаний не изменяются.

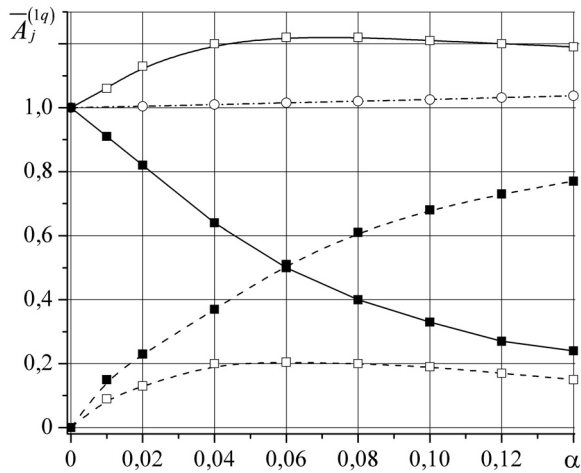


Рис. 5. Зависимость относительных резонансных амплитуд первой гармоники поврежденной (светлые точки) и неповрежденной (темные точки) подсистем от характеристики нелинейности α при синфазной (сплошные линии) и антифазной (штриховые линии) формах колебаний модели образца камертонного типа при $h = 0,0016 \text{ с}^{-1}$. (Штрихпунктирная линия – модель поврежденного стержня в изолированном состоянии.)

Субгармонический резонанс ($\nu = 2p_r^{(q)}$). Как отмечалось выше, наиболее представительным вибродиагностическим параметром наличия трещины для дискретной модели изолированного стержня (рис. 2,а) является отношение амплитуд первой гармоники колебаний ко второй κ_1 при субгармоническом резонансе. Учитывая, что для образца камертонного типа при нарушении его регулярности возбуждаются две формы колебаний, для указанного вибродиагностического параметра введем следующее обозначение: $\kappa_{1j}^{(q)} = A_j^{(1q)} / A_j^{(2q)}$.

На основании проведенных расчетов для дискретной модели образца камертонного типа (рис. 2,б) были построены зависимости вибродиагностического параметра $\kappa_{1j}^{(q)}$ от характеристики нелинейности α . На рис. 7 представлены указанные зависимости для исследуемой регулярной системы и модели поврежденного стержня в изолированном состоянии при синфазной

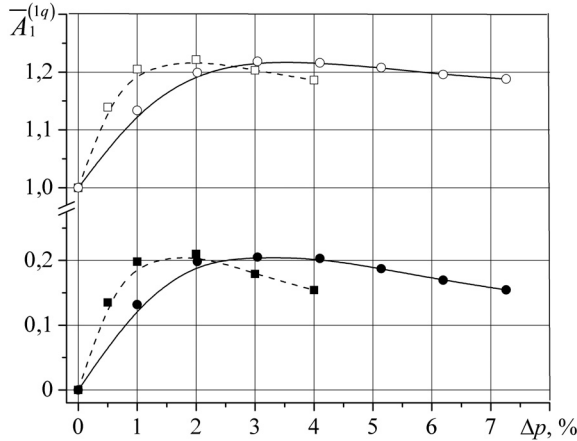


Рис. 6. Зависимость относительных резонансных амплитуд первой гармоники поврежденной подсистемы от расстройки частоты при синфазной (светлые точки) и антифазной (темные точки) формах колебаний модели образца камертонного типа при открытой (штриховые линии) и закрывающейся (сплошные линии) трещинах.

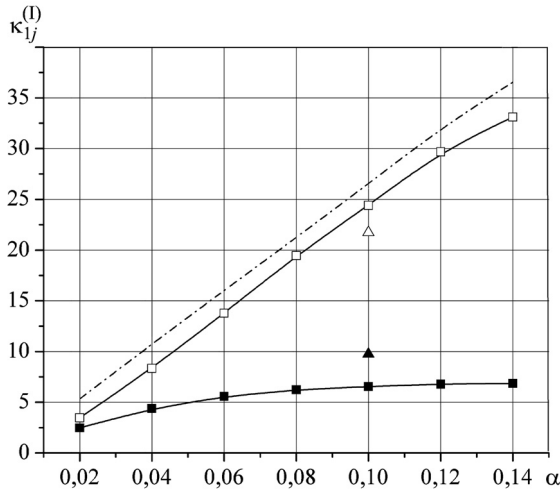


Рис. 7. Зависимость вибродиагностического параметра $\kappa_{1j}^{(I)}$ от α для поврежденной (\square) и неповрежденной (\blacksquare) подсистем модели образца камертонного типа при субрезонансе для $h = 0,0008 \text{ c}^{-1}$ и $k_s = 0,015k$. (Штрихпунктирная линия – модель поврежденного стержня в изолированном состоянии; \triangle , \blacktriangle – значения вибродиагностического параметра для поврежденной и неповрежденной подсистем при $k_s = 0,03k$ соответственно.)

форме колебаний ($q = 1$). Видно, что характер зависимости вибродиагностического параметра подсистемы, моделирующей поврежденный стержень образца камертонного типа, не изменяется по сравнению с таковым для модели стержня в изолированном состоянии. Однако при этом его величина несколько уменьшается вследствие упругой связи стержней образца. Наличие второй гармоники в спектре амплитуд колебаний неповрежденного стержня обусловлено также упругой связью стержней. Хотя для этого стержня величина вибродиагностического параметра значительно меньше (в данном случае до 6 раз), чем для поврежденного.

Для определения влияния упругой связи стержней на вибродиагностический параметр $\kappa_{1j}^{(q)}$ расчеты проводились и при других значениях k_s . На рис. 7 в качестве примера приведены данные для $\alpha = 0,1$ при $k_s = 0,03k$. Видно, что с увеличением коэффициента жесткости k_s упругой связи величина вибродиагностического параметра для поврежденного стержня уменьшается, для неповрежденного – возрастает, т.е. изменяется отношение его значений. Так, если при $k_s = 0,015k$ отношение $\kappa_{11}^{(1)}/\kappa_{12}^{(1)} \approx 3,7$, то при $k_s = 0,03k$ имеем 1,85.

Влияние рассеяния энергии на величину вибродиагностического параметра поврежденного стержня иллюстрируют его зависимости от параметра нелинейности, полученные при разных значениях коэффициента демпфирования h (рис. 8). Как видно, характер зависимостей сохраняется при изменении уровня рассеяния энергии системы, однако с ростом h величина вибродиагностического параметра уменьшается.

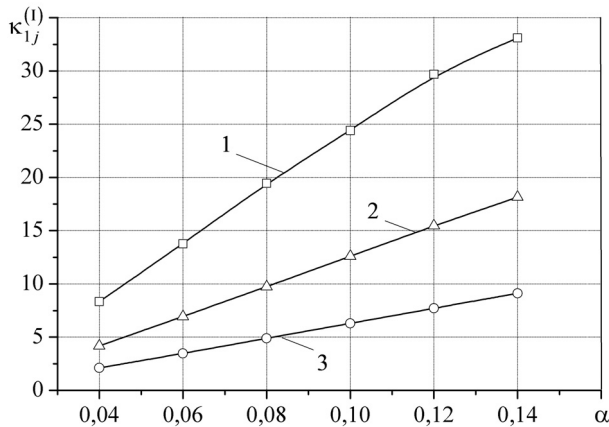


Рис. 8. Зависимость вибродиагностического параметра модели поврежденного стержня образца камертонного типа от α при субрезонансе и разных значениях коэффициента демпфирования h : 1 – $h = 0,0008 \text{ c}^{-1}$; 2 – $h = 0,0016 \text{ c}^{-1}$; 3 – $h = 0,0032 \text{ c}^{-1}$ ($k_s = 0,015k$).

При антифазной форме колебаний подсистем для рассматриваемого режима возбуждения в спектре амплитуд колебаний стержней также имеют место первая и вторая гармоники, но они не являются значимыми, вследствие чего не могут рассматриваться для диагностики наличия повреждения.

Выводы

1. При основном резонансе характер влияния параметра нелинейности на амплитуды основной гармоники модели образца камертонного типа качественно совпадает с таковым, полученным для случая расстройки частот стержней, обусловленной как допусками на их изготовление, так и наличием повреждения типа забоины или открытой трещины.

2. При субгармоническом резонансе, как и в случае изолированного стержня, в качестве вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины усталости в образце камертонного типа может быть использовано отношение амплитуд первой и второй гармоник колебаний стержней

при синфазной форме колебаний системы, в отличие от антифазной, когда амплитуды указанных гармоник являются незначимыми. Вследствие наличия упругой связи стержней величина вибродиагностического параметра для поврежденного стержня образца меньше, чем для стержня в изолированном состоянии. С увеличением коэффициента жесткости упругой связи для поврежденного стержня она уменьшается, в то время как для неповрежденного – увеличивается. С повышением рассеяния энергии в системе величина вибродиагностического параметра также уменьшается.

Авторы выражают искреннюю благодарность академику НАН Украины В. В. Матвееву за поддержку и ценные советы при обсуждении результатов работы.

Резюме

Наведено результати обчислювальних експериментів щодо визначення закономірностей формування коливань дискретної моделі зразка камертонного типу за наявності в одному зі стержнів тріщини втоми, що закривається. Отримано залежності, що описують вплив параметрів тріщини на коливання об'єкта дослідження при основному резонансі та субрезонансі.

1. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
2. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. – № 3. – С. 5 – 23.
3. *Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.
4. *Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А.* О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
5. *Krawczuk M. and Ostachowicz W.* Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a survey // J. Theor. Appl. Mech. – 1996. – 34, No. 2. – P. 307 – 326.
6. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2010. – № 4. – С. 5 – 19.
7. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // Там же. – № 5. – С. 62 – 83.

8. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Приближенные методы и результаты определения вибродиагностических параметров наличия трещины в стержневых элементах при супер- и субгармоническом резонансах // Прочность материалов и элементов конструкций: Тр. междунар. науч.-техн. конф. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2011. – С. 59 – 77.
9. *Чушко В. М.* Зависимость частоты собственных колебаний стержня от размеров имеющейся в нем трещины // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 249 – 253.
10. *Лымаренко Ю. А.* Влияние повреждений на динамические макрохарактеристики напряженно-деформированного состояния изделий // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2008. – № 1. – С. 114 – 118.
11. *Токарь И. Г., Бовсуновский А. П., Дрокин И. В.* Анализ характеристик колебаний лопаток с трещинами усталости с использованием методов цифровой обработки данных испытаний // Вібрації в техніці і технологіях. – 2004. – № 6. – С. 62 – 64.
12. *Воробьев Ю. С., Романенко В. Н., Тишковец Е. В., Стороженко М. А.* Колебания турбинных лопаток с повреждениями // Там же. – № 5. – С. 47 – 51.
13. *Токарь И. Г., Зиньковский А. П.* Влияние параметров локального повреждения регулярной системы на спектр собственных частот колебаний и вибронпряженность однотипных элементов // Пробл. прочности. – 2010. – № 2. – С. 55 – 64.
14. *Huang B.-W. and Kuang J.-H.* Variation in the stability of a rotating blade-disk with a local crack defect // J. Sound Vibr. – 2006. – **294**, No. 3. – P. 486 – 502.
15. *Воробьев Ю. С., Жондковский Р., Чугай М. А.* Особенности колебаний элементов лопаточного аппарата с повреждениями // Авіац.-косм. техніка і технологія. – 2008. – № 9. – С. 98 – 101.
16. *Матвеев В. В., Бовсуновский О. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 2. Сильный резонанс // Пробл. прочности. – 2008. – № 3. – С. 5 – 16.
17. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Паскаль, Фортран и Бейсик. – Томск: МП “Раско”, 1991. – 271 с.
18. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
19. *Адаменко А. Я., Токарь И. Г., Зиньковский А. П., Матвеев В. В.* К исследованию демпфирующей способности стержней в поле центробежных сил // Пробл. прочности. – 1983. – № 8. – С. 89 – 96.
20. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2012. – № 3. – С. 37 – 49.

Поступила 08. 01. 2013