

## Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною при згинальному навантаженні

К. М. Довбня, Н. А. Шевцова

Донецький національний університет, Донецьк, Україна

*Розглядається полого ортотропна оболонка довільної кривини, що послаблена прямолінійним наскрізним розрізом, береги якого контактують під дією згинального навантаження. Розв'язок побудовано за допомогою теорії узагальнених функцій та двомірного інтегрального перетворення Фур'є. Отримане сингулярне інтегральне рівняння розв'язано методом механічних квадратур. Наведено результати розрахунку коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів за різних співвідношень геометричних параметрів (кривина оболонки, довжина тріщини) та знаків заданого навантаження.*

**Ключові слова:** ортотропна оболонка, згинальне навантаження, теорія узагальнених функцій, інтегральне перетворення Фур'є, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

### Позначення

$h$	– товщина оболонки
$2l$	– довжина тріщини
$[\nu]$	– розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки
$[\theta_2]$	– стрибок кута повороту нормалі на берегах розрізу
$M_2^*$	– задане навантаження
$T_2$	– мембранне зусилля
$M_2$	– згинальний момент
$R_1, R_2$	– радіуси головних кривин серединної поверхні розрізу
$E_1, E_2$	– модулі Юнга
$\nu_1, \nu_2$	– коефіцієнти Пуассона, $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$
$G_{12}$	– модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки
$K_M, K_T$	– коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль

**Вступ.** Дослідженню напружено-деформованого стану тонкостінних оболонок із тріщинами присвячено багато робіт. Однак у більшості з них не враховується контакт берегів при згинальному навантаженні, тобто розглядаються задачі про згин та розтяг водночас, при цьому розтяг настільки великий, що контакт берегів відсутній. У [1, 2] обговорюються умови коректності таких суперпозицій.

Урахування закриття тріщин під час згину описується в роботах [3–5]. Результати для задачі про напружений стан ізотропної оболонки двоякої кривини з тріщиною при згинальному навантаженні отримано раніше [6]. У даній роботі підхід, що описаний у [4], узагальнено на визначення напруженого стану ортотропних оболонок довільної кривини з однією тріщиною при згинальному навантаженні.

**Постановка задачі.** Розглянемо ортотропну оболонку довільної кривини сталої товщини  $h$  з наскрізною тріщиною довжини  $2l$  уздовж осі  $Ox$  (рис. 1). Осі координат орієнтовано вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки з

центром у середині розрізу. Оболонка знаходиться під дією згинального навантаження, симетричного відносно лінії тріщини. Поверхні оболонки вільні від напружень. У рамках двовимірної теорії оболонок тріщина моделюється як математичний розріз серединної поверхні оболонки. Напружений стан в оболонці можна записати у вигляді суми напруженого стану без тріщини при заданому зовнішньому навантаженні, яке є відомим (далі – величини із зірочкою), та шуканого додаткового напруженого стану, що виник за наявності тріщини.

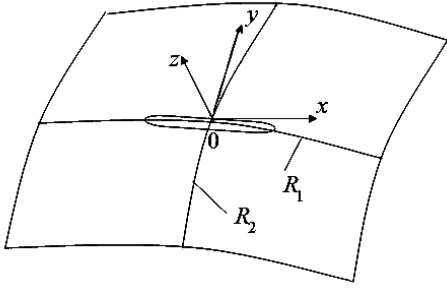


Рис. 1. Елемент оболонки з тріщиною.

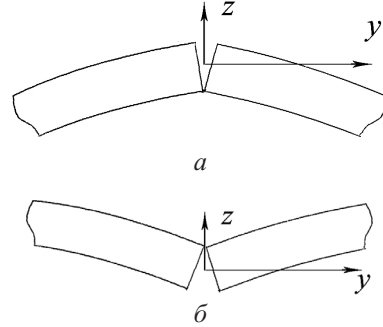


Рис. 2. Розрахункові схеми.

Неповний по висоті контакт берегів розрізу інтерпретуємо як змикання його гострих кромek в одній з лицьових поверхонь оболонки –  $z = h/2$  чи  $z = -h/2$  (рис. 2).

У силу симетрії задачі відносно осі  $Ox$  граничні умови контакту на лінії розрізу [3] мають наступний вигляд:

$$[v] = \frac{h}{2} |[\theta_2]| > 0; \tag{1}$$

$$M_2 = -M_2^* - \frac{h}{2} T_2 \operatorname{sgn} [\theta_2]; \tag{2}$$

$$T_2 \leq 0, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l), \tag{3}$$

де  $[v]$  – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки;  $[\theta_2]$  – стрибок кута повороту нормалі,  $\theta_2 = -\partial\omega/\partial y$ ;  $M_2^*$  – задане навантаження;  $T_2$  – мембранне зусилля;  $M_2$  – згинальний момент.

**Розв’язок задачі.** Поставлену задачу розв’язуємо за допомогою сингулярних інтегральних рівнянь. Запишемо інтегральні зображення зусилля  $T_2$  та моменту  $M_2$  через похідні стрибків переміщення та кута повороту нормалі, отримані в [7]:

$$\begin{aligned} -\pi T_2(l\tau, 0) &= \int_{-1}^1 (K_{11}(t-\tau)\psi_1(t) - K_{13}(t-\tau+2\gamma)\psi_3(t))dt; \\ -\pi c^2 R_2 M_2(l\tau, 0) &= \int_{-1}^1 (K_{31}(t-\tau)\psi_1(t) - K_{33}(t-\tau+2\gamma)\psi_3(t))dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут

$$\psi_1(t) = \frac{Eh}{4\chi^2 l \sqrt{a}} \sqrt{1-\mu} \frac{d[v]}{dt}; \quad \psi_3(t) = \frac{D(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}{4\chi^2 l \sqrt{a}} R^2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{dt};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad c = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}; \quad R = \min(|R_1|, |R_2|); \quad E = \sqrt{E_1 E_2};$$

$E_1, E_2$  – модулі Юнга;  $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ;  $\nu_1, \nu_2$  – коефіцієнти Пуассона;  $|\tau| < 1$ ;

$$K_{11}(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\beta^2\chi^{-2}x \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\beta\chi^{-1}|x|);$$

$$K_{31}(x) = 2\frac{\beta^2\chi}{\chi^2\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(\beta\chi^{-1}|x|); \quad K_{13}(x) = \frac{\sqrt{(1-\mu)}}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)} K_{31}(x);$$

$$K_{33}(x) = \frac{1}{x} + \frac{\beta^2\chi}{\sqrt{a\chi^2(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}(\beta\chi^{-1}|x|),$$

де

$$a_n^{(1)}(\dots) = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |d^2|l_2^{-2} \cos^3 \theta \cos[(2n-1)\theta] \operatorname{Im} G_{n,n-1}(\beta\chi^{-1}|x||d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$$a_n^{(2)}(\dots) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 (l_1 l_2)^{-1} \cos \theta (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos[(2n-1)\theta] \times \\ \times \operatorname{Re} G_{n,n-1}(\beta\chi^{-1}|x||d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$$a_n^{(3)}(\dots) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2|l_1^{-2} \frac{\cos[(2n-1)\theta]}{\cos \theta} (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \operatorname{Im} G_{n,n-1}(\beta\chi^{-1}|x||d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$$d^2 = \frac{\sqrt{(1-\mu)}}{a} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda\chi^2 \sin^2 \theta)}{l_1 l_2}; \quad a = \frac{2-\mu+\mu\nu}{2}; \quad \chi^4 = \frac{E_1}{E_2}; \quad \beta = cl;$$

$$\mu = 1 - 2\frac{G_{12}(1+\nu)}{E};$$

$G_{12}$  – модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки;

$$4\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2a}; \quad l_1^2 = 1 + \tilde{\mu}(1-\nu)\cos^2 2\theta; \quad l_2^2 = 1 - \tilde{\mu}(1+\nu)\cos^2 2\theta;$$

$$G_{n,m}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{m-n} K_{n+m}(z) - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(m+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}; \quad n > 0, \quad \operatorname{Re} m > -1$$

( $K_m(z)$  – модифікована функція Бесселя другого роду порядку  $m$ ;  $\Gamma(m)$  – гамма-функція).

З урахуванням того, що  $\text{sgn}[\theta_2] = \text{sgn} M_2^*$ , підставимо (4) у крайову умову (2). У результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення стрибка повороту нормалі:

$$\pi M_2^* = \frac{D}{4\chi^2 l \sqrt{a}} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-\mu} 3(1-\nu^2) K_{11}(t-\tau) + 2 \text{sgn} M_2^* \sqrt{1-\mu} \sqrt{3(1-\nu^2)} K_{31}(t-\tau) + (1-\nu)(3+\nu-2\mu) K_{33}(t-\tau)) \frac{d[\theta_2]}{dt} dt. \quad (5)$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (5) слід підпорядкувати додатковим умовам:

$$[\theta_2](\pm 1) = 0. \quad (6)$$

Задачу (5), (6) розв'язано методом механічних квадратур [8, 9], який дозволяє звести інтегральне рівняння (3) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

**Аналіз результатів.** Коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль у вершинах тріщини обчислюються за формулами:

$$K_M^\pm = \pm(1-\nu)(3+\nu-2\mu) \frac{D}{4\chi^2 \sqrt{a}} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[\theta_2]}{dt}(t);$$

$$K_T^\pm = \pm \frac{Eh}{4\chi^2} \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[\nu]}{dt}(t).$$

Чисельні дослідження проводилися для композиту на епоксидному зв'язуючому, армованому односпрямованими графітовими волокнами, для якого  $E_1 = 14,9 \cdot 10^4$  МПа;  $E_2 = 0,6 \cdot 10^4$  МПа;  $G_{12} = 0,4 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_1 = 0,31$ .

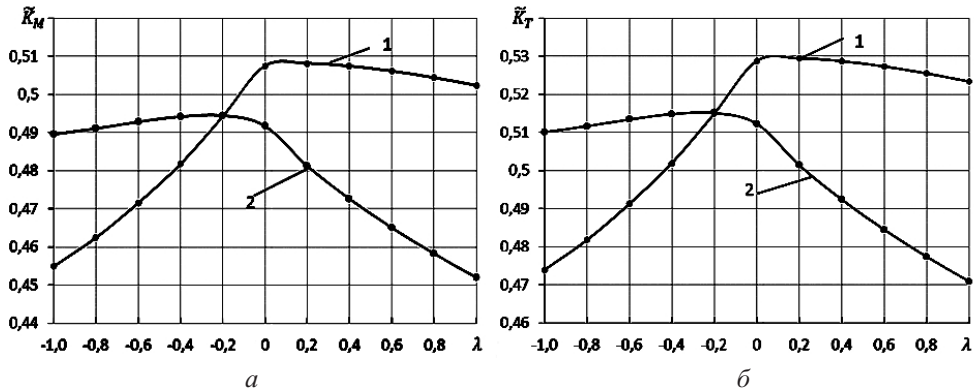


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів  $\tilde{K}_M$  (а) і зусиль  $\tilde{K}_T$  (б) від параметра кривини оболонки  $\lambda$ : 1, 2 – випадки змикання берегів розрізу у внутрішній ( $M_2^* > 0$ ) і зовнішній ( $M_2^* < 0$ ) лицьовій поверхні оболонки при  $\beta = 1$ .

На рис. 3 показано графіки, що характеризують вплив форми оболонки на величини коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $\tilde{K}_T = \frac{h}{2} K_T / M$  і моментів  $\tilde{K}_M = K_M / M$  від

параметра кривини оболонки  $\lambda = R_2/R_1$  побудовано для фіксованих значень параметра  $\beta$ . При  $\lambda = -1$ ; 0 і 1 маємо псевдосферичну, циліндричну та сферичну оболонку відповідно. Для ізотропного матеріалу при  $\nu = 0,3$  результати добре узгоджуються з даними, наведеними в роботі [4].

Як видно, контакт берегів тріщини зумовлює немонотонний характер впливу кривини оболонки на коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів. Найменші значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів отримано для псевдосферичної оболонки у випадку, коли береги тріщини змикаються у внутрішній лицьовій поверхні ( $M_2^* > 0$ ), та сферичної, коли береги тріщини змикаються у зовнішній лицьовій поверхні ( $M_2^* < 0$ ).

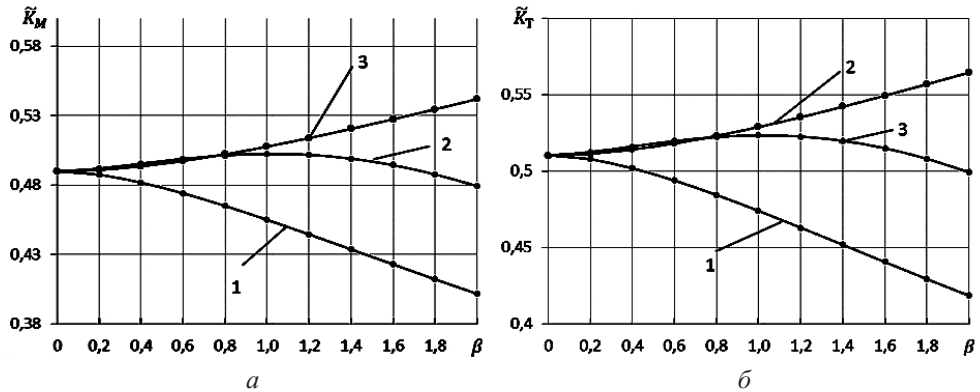


Рис. 4. Вплив параметра  $\beta$  на коефіцієнти інтенсивності моментів  $\tilde{K}_M$  (а) і зусиль  $\tilde{K}_T$  (б): 1, 2, 3 – відповідно псевдосферична, сферична і циліндрична оболонки.

На рис. 4 представлено графіки зміни безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів у залежності від параметра  $\beta$  для  $M_2^* > 0$ . При  $\beta = 0$  оболонка перетворюється в пластину.

Видно, що у сферичній оболонці зі збільшенням параметра  $\beta$  коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів зростають, у псевдосферичній вони зменшуються, а в циліндричній мають немонотонну залежність.

Збільшення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів призводить до зменшення несівної здатності оболонок.

## Резюме

Рассматривается полая ортотропная оболочка произвольной кривизны, ослабленная прямолинейным сквозным разрезом, береги которого контактируют под действием изгибного нагружения. Решение построено с помощью теории обобщенных функций и двухмерного интегрального преобразования Фурье. Полученное сингулярное интегральное уравнение решено методом механических квадратур. Приведены результаты расчета коэффициентов интенсивности усилий и моментов при разных соотношениях геометрических параметров (кривизна оболочки, длина трещины) и знаках заданного нагружения.

1. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами // *Механика деформируемого твердого тела.* – М.: ВИНТИ, 1986. – Т. 18. – С. 3 – 52.

2. Довбня Е. Н. О корректности постановки симметричных задач механики полых оболочек с разрезами // Теоретическая и прикладная механика. – Харьков: Вища шк., 1988. – Вып. 19. – С. 98 – 100.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С.49 – 51.
4. Шацький І. П. Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 164 – 173.
5. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 189 – 195.
6. Довбня К. М., Григорчук Ю. В. Напружений стан оболонки двоякої кривини з тріщиною при згинальному навантаженні // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 112 – 116.
7. Механика композитов. В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 7. Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с.
8. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 64 – 74.
9. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.

Поступила 12. 03. 2013