

УДК 536.2

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОСТИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОМ И ОПТИЧЕСКИ ТОНКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Авраменко А.А.<sup>1</sup>, член-корреспондент НАН Украины, Дмитренко Н.П.<sup>2</sup>, кандидат технических наук,  
Коваленко В.М.<sup>1</sup>, Горобец В.Г.<sup>2</sup>, доктор технических наук

<sup>1</sup>Институт технической теплофизики НАН Украины, ул. М. Капнист, 2а, Киев, 03057, Украина

<sup>2</sup>Национальный университет биоресурсов и природопользования, ул. Героев Оборона, 15, Киев, 03041, Украина

<https://doi.org/10.31472/ttpe.3.2019.3>

В статті розглянуто основні аспекти процесу складного теплообміну в оптично тонкому і оптично товстому турбулентному пограничному шарі.

В статье рассмотрено основные аспекты процесса сложного теплообмена в оптически тонком и оптически толстом пограничном турбулентном слое.

The article analyzes the main aspects of the process of complex heat transfer in an optically thin and optically thick boundary turbulent layer.

Библ. 12, рис. 2.

**Ключевые слова:** теплообмен, турбулентный пограничный слой, тепловое излучение.

$c_p$  – теплоемкость;  
 $n$  – коэффициент преломления среды;  
 $R$  – средний коэффициент поглощения по Росселанду;  
 $T$  – температура;  
 $y$  – поперечная к поверхности координата;  
 $\lambda, \lambda_T$  – молекулярная и турбулентная теплопроводность;  
 $\nu$  – кинематическая вязкость;  
 $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  
 $\tau_w$  – поверхностное трение.

### Критерии подобия:

$Bo^*$  – число Больцмана;  
 $Kn_r$  – радиационное число Кнудсена;  
 $Pr$  – число Прандтля;  
 $Sr^*$  – число Старка;  
 $St^*$  – число Стентона.

### Введение

В последнее время резко вырос интерес к проблемам сложного (кондуктивного, конвективного, радиационного) теплообмена, что обусловлено быстрым развитием техники. При не слишком высокой температуре и не слишком низкой плотности газа, перенос теплоты излучением обычно пренебрежимо мал по сравнению с переносом теплоты кондукцией и конвекцией. Однако, при гиперзвуковых скоростях полета, при ядерных реакциях, при течении плазмы температура газа может быть очень высокой, а плотность очень низкой [1]. При этом необходимо учитывать перенос теплоты излучением.

В книге [1] изложены фундаментальные концепции теплового излучения и радиационного переноса в различных средах, при решении задач теплового излучения, а также в реальных приложениях, включая преобразование солнечной энергии.

Основные аспекты моделирования излучения высокотемпературного воздуха при входе спускаемых

аппаратов со второй космической скоростью приведены в работе [2]. Основной вклад в лучистый теплообмен в области максимальных скоростей полета таких аппаратов дают процессы с изменением состава газа и температуры в пограничном слое. Рассмотрен случай движения аппарата со скоростью  $V \geq 9$  км/с с осесимметричным обтеканием тела (угол атаки  $\alpha = 0^\circ$ ) при этом толщина пограничного слоя рассчитывалась для чисел Маха  $\sim 35$ . В ходе моделирования получены зависимости изменения толщин ударного и пограничного слоев и релаксационной зоны от высоты полета и зависимость коэффициента поглощения высокотемпературного воздуха от длины волны.

После изучения процессов переноса при нелинейных граничных условиях в [3] были получены приближенно-аналитические решения нелинейного тепло- и массообмена, установлены связи между режимными параметрами и физической трактовкой результатов исследования. Выполненное исследование позволило установить, что наличие поперечного перетока тепла в стенке,

а также излучение поверхности оказывают существенное влияние на характер распределения поверхностных температур.

Теоретическое исследование влияния тока Холла, пористой среды Дарси, теплового излучения на гидродинамику и теплообмен в пограничном слое потока с твердыми частицами на неизотермической поверхности проведено в [4]. Проанализировано динамику изменения трения потока на поверхности и числа Нуссельта для различных определяющих параметров. Определено, что скорость теплопередачи выше для пыльной вязкой жидкости, чем для чистой жидкости.

Существует достаточно большое количество работ по сложному теплообмену в потоках газа при ламинарном режиме течения. Например, в [5] численно исследована проблема устойчивого ламинарного потока двумерного пограничного слоя и теплообмена несжимаемой вязкой жидкости при наличии теплового излучения над экспоненциально растягивающейся поверхностью. Основные уравнения пограничного слоя сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью преобразования подобия. Приводятся численные решения для коэффициента трения, коэффициента теплопередачи, и проанализированы профили скорости и температуры.

Значительно меньше работ по сложному теплообмену при турбулентном течении потока. Так в работе [6] исследована сопряженная задача радиационно-конвективного теплообмена при турбулентном обтекании термически тонкой пластины потоком высокотемпературной газодисперсной среды. Пластина подвергалась интенсивному радиационному нагреву от внешнего источника, излучающего в ограниченном спектральном диапазоне. Полученные результаты позволяют изучить влияние типа частиц и их концентрации на динамику теплового состояния среды в пограничном слое, и влиянии нагрева пластины.

Сложный теплообмен также следует учитывать при оценке устойчивости потока в микроканалах [7], при расчете естественной конвекции [8], а также при изучении процессов в биотехнологиях [9, 10].

В связи с тем, что существует большое количество недостаточно изученных аспектов в вопросе изучения сложного теплообмена при турбулентном режиме течения целью настоящей работы является попытка исследования закономерностей сложного теплообмена в турбулентном пограничном слое для оптически толстой ( $Kn_r \ll 1$ ) и оптически тонкой ( $Kn_r \gg 1$ ) среды ( $Kn_r = L_r/L$  – радиационное число Кнудсена, где  $L_r$  – длина волны излучения,  $L$  – характерный размер).

### Теоретический анализ

Два предельных случая для оптически толстой ( $Kn_r \ll 1$ ) и оптически тонкой ( $Kn_r \gg 1$ ) среды позволяют провести приближенное аналитическое исследование. Исследование было проведено при  $Pr \approx 1$  и при  $Pr \gg 1$ .

В случае оптически толстой среды радиационный тепловой поток можно найти по градиентной зависимости Росселанда [11]

$$q_R = (4n^2\sigma/3R) \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (1)$$

Если представить  $T^4$  в виде ряда Тейлора в окрестности температуры внешнего потока  $T_\infty^*$  или температуры поверхности  $T_w$ , то получим

$$T^4 \approx 4T^{*3} - 3T^{*4}, \quad (2)$$

где  $T^*$  равна  $T_\infty$  или  $T_w$ . Подставляя (2) в (1) будем иметь

$$q_R = \frac{16n^2\sigma T^{*3}}{3R} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (3)$$

Следуя гипотезе Прандтля, принимаем, что в окрестности поверхности существует область постоянного суммарного теплового потока  $q \approx q_w = \text{const}$ . В этой области  $q_w = (\lambda + \lambda_T + \lambda_R) \frac{dT}{dy}$  где,  $\lambda_R = 16n^2\sigma T^{*3}/(3R)$ . С учетом (3) предыдущее соотношение можно представить в следующем виде

$$1 = \left[ \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \left[ \left( \frac{du^+}{dy^+} \right)^{-1} - 1 \right] + \frac{16}{3} Sr Pr^{-1} \right] \frac{d\Theta^+}{dy^+}, \quad (4)$$

где  $u^+ = u/v^*$ ,  $v^* = \sqrt{\tau_u/\rho}$ ,  $y^+ = yv^*/\nu$ ,

$$\Theta^+ = c_p(T - T_w)\rho v^*/q_w, Sr = \frac{n^2\sigma T^{*3}}{R\lambda} - \text{число Старка,}$$

характеризующее соотношение между радиационным и кондуктивным теплообменом.

Для интегрирования уравнения (4) необходимо знать распределение универсальной скорости  $u^+(y^*)$ . Примем двухслойную модель турбулентного пограничного слоя, в соответствии с которой в пограничном слое можно

выделить ламинарный подслой с линейным профилем скорости и турбулентное ядро с логарифмическим профилем

$$u^+ = \begin{cases} y^+ \text{ при } y^+ = 0 \dots y_L^+ (y_L^+ \approx 11,5) \\ \frac{1}{\phi} \ln y^+ + c, \text{ при } y^+ = y_L^+ \dots y_\delta^+ \end{cases}, \quad (5)$$

где  $y_L^+$  – граница ламинарного подслоя,  $y_\delta^+$  – внешняя граница пограничного слоя,  $\phi = 0,4$  – постоянная Кармана.

$$\frac{St^* Pr}{\phi} = \left[ y_L^+ \frac{\phi Pr / Pr_T}{1 + \frac{16}{3} Sr Pr} + \ln \left| \frac{\frac{Pr_T}{Pr} - 1 + \phi y_\delta^+ + \frac{16}{3} Sr \frac{Pr_T}{Pr}}{\frac{Pr_T}{Pr} - 1 + \phi y_L^+ + \frac{16}{3} Sr \frac{Pr_T}{Pr}} \right| \right]^{-1}. \quad (6)$$

Данная формула получена для двухслойной схемы течения, т.е. для чисел Прандтля порядка единицы. Иначе обстоит дело для больших чисел Прандтля. В этом случае толщина теплового пограничного слоя много меньше толщины динамического, т.е. можно считать, что по всей толщине теплового пограничного слоя распределение скорости линейно и следовательно формула (4) не пригодна. Формулу для теплового потока в этом случае удобно представить в следующем виде

$$St^* Pr = \left[ \frac{Pr_T}{Pr} + \frac{v_T}{v} + \frac{16}{3} Sr Pr^{-1} \right] \frac{d}{dy^+} \left( \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \right). \quad (7)$$

Для интегрирования этого выражения необходимо знать закон изменения турбулентной вязкости. Из модели Прандтля для турбулентной вязкости при  $\frac{du^+}{dy^+} = 1$  следует, что

$$\frac{v_T}{v} = \phi^2 y^{+2}. \quad (8)$$

Если использовать модель Ван-Дрифта [12] демпфирующего множителя, то

$$\frac{v_T}{v} = \gamma^4 y^{+4}, \quad (9)$$

где  $\gamma = 0,124$  – постоянная. Подставляем (8) в (7) и интегрируем по  $y^+$  от нуля до бесконечности получим

$$St^* Pr_T = \frac{2\phi}{\pi} \sqrt{\frac{Pr_T}{Pr} \left( 1 + \frac{16}{3} Sr \right)}. \quad (10)$$

При использовании модели (9) имеем

$$St^* Pr_T = \frac{2^{3n} \gamma}{\pi} \left[ \frac{Pr_T}{Pr} \left( 1 + \frac{16}{3} Sr \right) \right]^{\frac{3}{4}}. \quad (11)$$

В случае оптически тонкого пограничного слоя уравнение для теплового потока имеет вид

$$q_w \approx (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y} + \epsilon_w \sigma (T^4 - T_w^4), \quad (12)$$

где  $\epsilon_w$  – степень черноты поверхности. Используя зависимость (2) выражение (12) можно представить следующим образом

$$1 = \left[ \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v} \right] \frac{d\theta^+}{dy^+} + 4\epsilon_w Bo^* \theta^+, \quad (13)$$

где  $Bo^* = \frac{\sigma T^{*3}}{\rho c_p \delta^*}$  – число Больцмана, которое харак-

теризует состояние между радиационным и конвективным теплообменом. Интегрируя (13) при условии, что  $\theta^+ = 0$  при  $y^+ = 0$ , получим

$$\theta^+ = \frac{1}{4Bo^* \epsilon_w} \left[ 1 - \exp \left( -4Bo^* \epsilon_w \int_0^{y^+} f(y^+) dy^+ \right) \right], \quad (14)$$

где  $f(y^+) = \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \left( \frac{v_T}{v} \right)$ .

Если в (14) верхний предел приравнять  $y_\infty^+$  или  $\infty$ , то уравнение (14) превращается в выражение для числа

Стентона

$$St^{*-1} = \frac{1}{4\varepsilon_w Bo^*} \left[ 1 - \exp \left( -4\varepsilon_w Bo^* \int_0^{y^+_{\sigma(\infty)}} \frac{dy^+}{f(y^+)} \right) \right]. \quad (15)$$

В случае  $Pr \approx 1$ , используя модель (8), получим из (15).

$$\frac{St^* Pr_T}{\phi} = Z / \left( 1 - \exp \left( -Z y_L^+ \frac{\phi Pr}{Pr_T} \right) \right) \left[ \frac{Pr_T}{Pr} - 1 + \phi y_{\delta}^+ / \frac{Pr_T}{Pr} - 1 + \phi y_L^+ \right]^{-Z}, \quad (16)$$

где  $Z = 4\varepsilon_w Bo^* Pr_T / \phi$ .

При  $Pr \gg 1$  при использовании модели (8) из (16) имеем

$$\frac{St^*}{St_0^*} = \frac{4\varepsilon_w Bo^* \frac{\pi}{2\phi} \sqrt{Pr Pr_T}}{1 - \exp(-4\varepsilon_w Bo^* \frac{\pi}{2\phi} \sqrt{Pr Pr_T})}. \quad (17)$$

Для модели (9) запишем

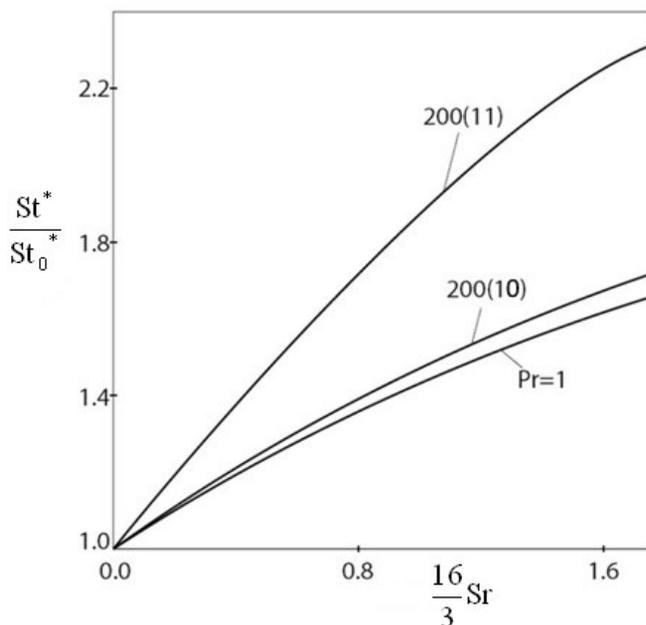


Рис. 1. Оптически толстый пограничный слой.

$$\frac{St^*}{St_0^*} = \frac{4\varepsilon_w Bo^* \frac{\pi}{2^{3/2} \gamma} Pr^{0.75} Pr^{0.25}}{1 - \exp \left( -4\varepsilon_w Bo^* \frac{\pi}{2^{3/2} \gamma} Pr^{0.75} Pr^{0.25} \right)}, \quad (18)$$

где  $St_0^*$  – число Стентона при отсутствии излучения, которое определяется по формулам (10) и (11), если положить в них  $Sr = 0$ .

### Результаты расчета

Относительное значение коэффициента теплоотдачи  $St^*/St_0^*$  для оптически толстого и оптически тонкого пограничного слоя представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Из этих рисунков видно, что относительное увеличение коэффициентов теплоотдачи по мере роста числа Прандтля усиливается. Это и понятно, т.к. при отсутствии излучения коэффициент теплоотдачи резко снижается по мере увеличения числа Прандтля и, следовательно, наложение радиационной составляющей теплового потока при больших числах Прандтля приведет к более интенсивному росту суммарного теплового потока. Формулы (11) и (17) являются, очевидно, более точными по сравнению с (10) и (16). Это следует из того факта, что формулы (11) и (17) получены на основании гипотезы Дейслера (9), которая дает довольно точные результаты при отсутствии радиационного переноса теплоты.

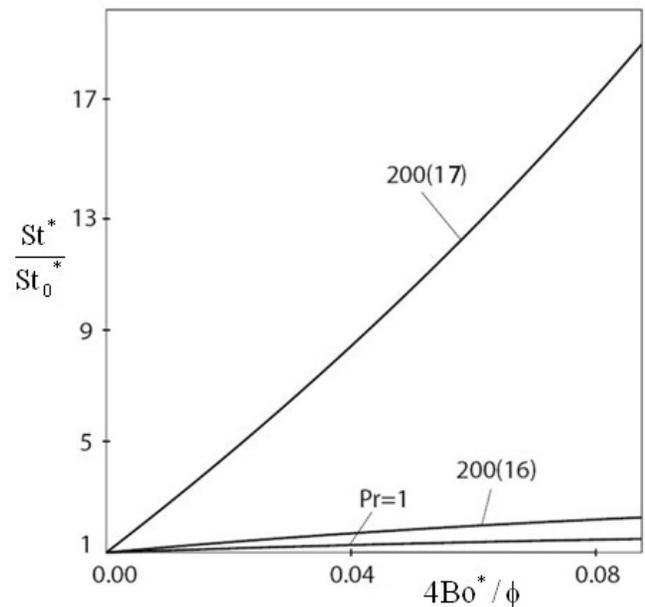


Рис. 2. Оптически тонкий пограничный слой.

Статья выполнена в рамках выполнения научной работы № 1.7.1.886 «Термогидравлическая неустойчивость потоков теплоносителей и разработка теплофизических механизмов преодоления их разрушительного влияния на элементы энергетического оборудования».

### Выводы

В статье представлены результаты аналитического моделирования влияния различных значений числа Прандтля на интенсивность теплообменных процессов в оптически тонком и оптически толстом турбулентном пограничном слое. Результаты исследования могут быть учтены при создании или эксплуатации различного рода аппаратов или их элементов, где присутствует режимы работы рабочих тел с очень высокой температурой и очень низкой плотностью.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Thermal Radiation* Heat Transfer. – CRC Press Taylor & Francis Group Boca Raton London New York, 2016. – 951 p.
2. Прутько К.А. Моделирование излучения высокотемпературного воздуха при входе спускаемых аппаратов со второй космической скоростью // ТРУДЫ МФТИ. – 2014. – Том. 6, № 2. – С. 75–79.
3. Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А. Теплообмен в пограничных слоях на излучающих поверхностях при градиентном течении // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона». – 2017. – №3. [http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_58\\_Ivanov.pdf\\_57aac1784.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_58_Ivanov.pdf_57aac1784.pdf)
4. Gireesha B. J., Mahanthesh B., Gorla R. Thermal radiation and Hall effects on boundary layer flow past a non isothermal stretching surface embedded in porous medium with non uniform heat source/sink and fluid particle suspension // Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol.52, № 4. – pp. 75–79.

5. Bidin B., R. Nazar R. Numerical Solution of the Boundary Layer Flow Over an Exponentially Stretching Sheet with Thermal Radiation // European Journal of Scientific Research. – 2009. – Vol.33, № 4. – pp. 710–717.

6. Рубцов Н.А., Синицин В.А. Численное моделирование нестационарного радиационно-конвективного теплообмена в пограничном слое селективно-излучающей и рассеивающей среды на плоской пластине // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т.42, №1. – С. 124 – 130.

7. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V. Instability of a slip flow in a curved channel formed by two concentric cylindrical surfaces // European Journal of Mechanics B/Fluids. – 2009. – 28, N 6. – P. 722–727.

8. Vargas M., Sierra F.Z., Ramos E., Avramenko A.A. Steady natural convection in a cylindrical cavity // Int. Comm. Heat Mass Transfer. - 2002. - 29, N 2. - P. 213 - 221.

9. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. The onset of convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in superimposed fluid and porous layers: effect of vertical throughout // Transport in Porous Media. - 2006. - vol. 65. - P. 159 - 176.

10. Kuznetsov A. V., Avramenko A. A. A minimal hydrodynamic model for a traffic jam in an axon // Int. Comm. Heat Mass Transfer. - 2009. – 36, N 1. - P. 1 - 5.

11. Бай Шу-и, Динамика излучающего газа. – Москва, Изд-во Мир, 1968, 324 с.

12. Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. – Springer, Berlin, 2000, 799 pp.

**APPROXIMATE ESTIMATES OF COMPLEX  
HEAT EXCHANGE IN OPTICALLY  
THICKNESS AND OPTICALLY THIN  
TURBULENT BOUNDARY LAYER**

**Avramenko A.A.<sup>1</sup>, Dmitrenko N.P.<sup>2</sup>, Kovalenko V.M.<sup>1</sup>,  
Gorobets V.G.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Engineering Thermophysics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine, vul.*

*M. Kapnist, 2a, Kyiv, 03057, Ukraine*

<sup>2</sup>*National University of Life and Environmental Sciences of  
Ukraine, Heroiv Oborony st., 15, Kyiv, 03041, Ukraine*

<https://doi.org/10.31472/ttpe.3.2019.3>

The study of various problems of radiation and complex heat transfer in the systems and elements of powerful power plants, high-temperature chemical reactors and other technological devices is an interesting and complex process. In these systems, the working environments operate at such pressures and temperatures when construction materials are very often in extreme conditions. Conducting high-temperature experimental studies in such objects is an expensive and labor-intensive process. In this connection, the analytical modeling of complex heat transfer in the boundary layer allows us to deepen and expand knowledge about the dynamics of changes various parameters in heat transfer models. Since the processes of complex heat exchange in the turbulent boundary layer are still not sufficiently studied. The purpose of this work is to attempt an analytical study of the various features of such systems for optically thick ( $Kn_r \ll 1$ ) and optically thin ( $Kn_r \gg 1$ ) media.

As a result, graphical dependences of the relative values of heat transfer coefficient ( $St^*/St_0^*$ ) for optically thick and optically thin boundary layer were obtained. It can be seen from these figures that the relative increase in the heat-transfer coefficients increases with increasing Prandtl number. And consequently, the imposition of the radiation component of the heat flux at large Prandtl numbers will lead to a more intensive growth of the total heat flux

**Key words:** heat exchange, turbulent boundary layer, thermal radiation.

References 12, figures 2.

1. *Thermal Radiation* Heat Transfer. – CRC Press Taylor & Francis Group Boca Raton London New York, 2016. – 951 p.

2. *Prutko K.A.* [Simulation of high-temperature air radiation at the entrance of the descent vehicles with the second cosmic velocity], Trudy MIFI [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology], 2014. V.6. № 2. P. 75–79. (Rus.)

3. *Ivanov V.V., Karaseva L.V., Tihomirov S.A.* [Heat transfer in boundary layers on radiating surfaces with a gradient flow], Elektrannyy zhurnal "Inzhenernyy vestnik Dona" [Electronic scientific journal "Engineering Bulletin of the Don"], 2017. № 2. [http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_58\\_Ivanov.pdf\\_57aacc1784.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_58_Ivanov.pdf_57aacc1784.pdf) (Rus)

4. *Giresha B. J., Mahanthesh B., Gorla R.* Thermal radiation and Hall effects on boundary layer flow past a non isothermal stretching surface embedded in porous medium with non uniform heat source/sink and fluid particle suspension // Heat and Mass Transfer. 2015. Vol.52, № 4. pp. 75–79

5. *Bidin B., R. Nazar R.* Numerical Solution of the Boundary Layer Flow Over an Exponentially Stretching Sheet with Thermal Radiation // European Journal of Scientific Research. 2009. Vol.33, № 4. pp. 710–717.

6. *Rubtsov N.A., Sinitin B.A.* [Numerical simulation of non-stationary radiational-convective heat transfer in the boundary layer of selectively radiating and scattering medium on a flat plate], Prikladnaya mehanika I tehniceskaya fizika [Applied mechanics and technical physics], 2001. V.42. № 1. P. 124–130. (Rus.)

7. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V.* Instability of a slip flow in a curved channel formed by two concentric cylindrical surfaces // European Journal of Mechanics B/ Fluids. 2009. 28, № 6. – P. 722–727.

8. *Vargas M., Sierra F.Z., Ramos E., Avramenko A.A.* Steady natural convection in a cylindrical cavity // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 2002. 29, № 2. P.213–221.

9. *Avramenko A.A., Kuznetsov A.V.* The onset of convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in superimposed fluid and porous layers: effect of vertical throughout // Transport in Porous Media. 2006. vol. 65. P. 159–176.

10. *Kuznetsov A. V., Avramenko A. A.* A minimal hydrodynamic model for a traffic jam in an axon // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. 36, № 1. P. 1–5.

11. *Buy Shee.* Dinamika izluchayustchego gaza [Emitting gas dynamics], Moskva, Mir. 1968. 324 p. (Rus).

12. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. Springer, Berlin, 2000, 799 pp.

*Отримано 10.04.2019*

*Received 10.04.2019*