

С.И.КРИЛЬ, доктор технических наук
И.В. СКОРОХОД, кандидат физико-математических наук
В.В. ФАДЕИЧЕВ, главный гидротехник
Институт гидромеханики НАН Украины

О ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ КРУПНОСТИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

Запропоновано простий графічний метод визначення гідравлічної крупності зерен ґрунтових матеріалів область застосування якого не обмежена значеннями числа Рейнольдса. Наведено приклад графічного розрахунку гідравлічної крупності.

Ключові слова: гідравлічна крупність, число Рейнольдса, коефіцієнт опору, графічний метод.

Предложен простой графический метод определения гидравлической крупности зерен грунтовых материалов, область применения которого не ограничена значениями числа Рейнольдса. Приведен пример графического расчета гидравлической крупности.

Ключевые слова: гидравлическая крупность, число Рейнольдса, коэффициент сопротивления, графический метод.

The simple graphical method for determining the hydraulic size of grains for earth materials has been presented in this paper. The area of application of this method is not limited of the Reynolds number. The example of a graphical calculation calculation of the hydraulic size is also discussed.

Key words: hydraulic size, Reynolds number, coefficient of resistance, graphical calculation.

Понятие гидравлической крупности частиц зернистых материалов широко используется при изучении движения взвешенных и донных наносов в реках и каналах, гидротранспорта твердых дисперсных материалов, флотации руд черных и цветных металлов и т.п. Под термином гидравлическая крупность понимают обычно скорость установившегося падения одиночной твердой частицы в безграничной, покоящейся на бесконечности, жидкости. Гидравлическая крупность – это универсальная гидравлическая характеристика твердых частиц. Она учитывает форму, плотность и размеры твердой частицы, плотность и вязкость жидкости, а также режимы обтекания частицы жидкостью. Величина гидравлической крупности определяется в основном экспериментально. Исключением

являются известные классические работы Стокса и Озеена, в которых формулы для гидравлической крупности получены теоретическим путем для шара, ламинарно обтекаемого жидкостью.

К настоящему времени накоплен большой объем экспериментального материала по измерению гидравлической крупности зерен различных грунтовых материалов и предложено значительное количество эмпирических формул для ее определения. В свете сказанного следует отметить работы А.П. Зегжды [1], А.В. Караушева [2], В.Н. Гончарова [3] и многих других исследователей. Однако, как отмечено в работе А.Б.Векслера [4], в рекомендациях различных авторов по определению гидравлической крупности имеется несогласованность в выборе характерного размера частиц исследуемого материала, имеющих неправильную форму, что приводит к существенному расхождению результатов исследований. Это обстоятельство, а также большое разнообразие зернистых материалов на практике создают определенные трудности в выборе расчетной формулы для определения гидравлической крупности. Поэтому есть необходимость в разработке единой более общей методики определения гидравлической крупности, пригодной для широкого класса зернистых материалов, чему и посвящена настоящая статья.

В [4] показано, что в качестве характерного размера частиц естественных зернистых материалов нужно принимать приведенный диаметр d , равный диаметру шара, равновеликого по объему со среднестатистическим объемом частиц данной фракции, при этом установлено соотношение между приведенным диаметром частицы и среднеарифметическим значением отверстий сит, определяющих рассматриваемую фракцию. Это позволило не только устранить упомянутую выше несогласованность в выборе характерного размера частиц, но и получить на основании анализа результатов многочисленных экспериментальных исследований гидравлической крупности единую для всех разнообразий форм зерен грунтов среднестатистическую зависимость коэффициента сопротивления движения частиц C от числа Рейнольдса

$Re = \frac{dw}{\nu}$, где w и ν – гидравлическая крупность частицы и кинематическая вязкость жидкости соответственно. В [4] зависимость C от Re аппроксимируется выражением

$$C(Re) = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{Re}{S} \right) \left(1 - \frac{3}{4} \frac{Re^2 (1 + 1,25 Re^3 10^{-7}) - Re}{4 Re^2 (1 + 1,25 Re^3 10^{-7}) + 10 Re + 51} \right). \quad (1)$$

Формула (1) носит обобщающий характер, поскольку она применима при любых значениях числа Рейнольдса и относится к ламинарному, переходному и турбулентному режимам обтекания твердой частицы. Расчетная кривая зависимости C от Re , полученная по формуле (1),

представлена на рис.1. На этом рисунке показана также аналогичная кривая для шаров, заимствованная из [5].

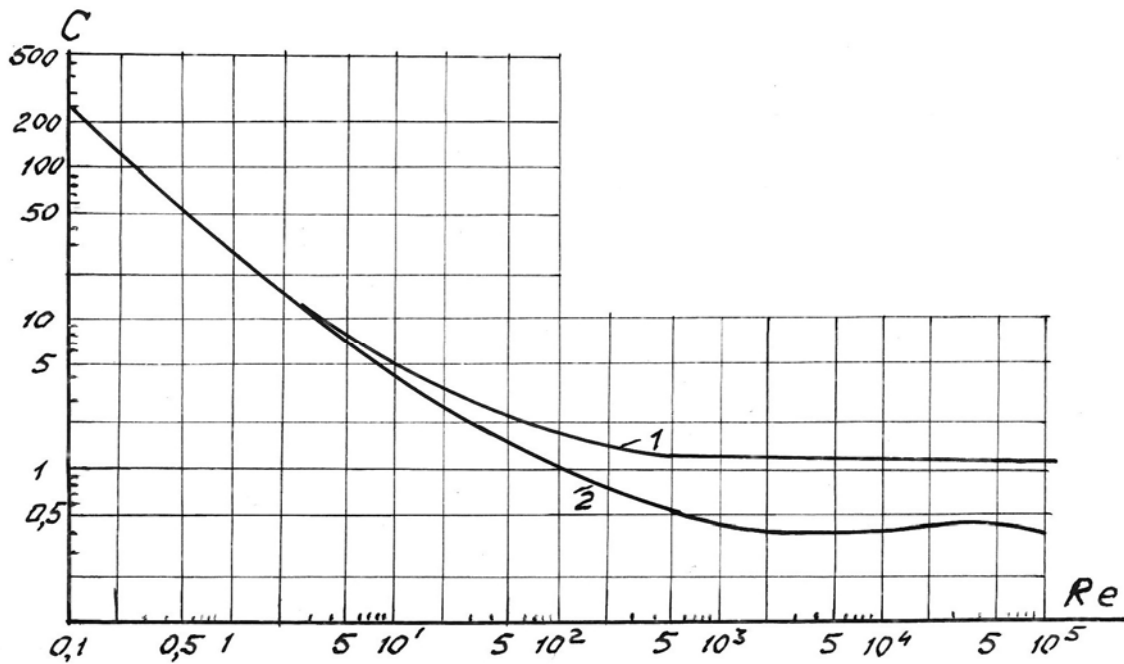


Рис.1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса:
1 – грунтовые материалы; 2 – шары

Формулу (1) используем ниже для графического определения гидравлической крупности. При этом будем условно схематизировать твердую частицу в виде шара диаметром d .

В случае установившегося падения частицы в покоящейся жидкости на частицу будут действовать сила тяжести, архимедова сила и сила сопротивления жидкости падению частицы. Балансовое уравнение названных сил имеет вид [6]:

$$(\rho_T - \rho)g \frac{\pi d^3}{6} = c \frac{\pi d^2}{4} \rho \frac{w^2}{2}, \quad (2)$$

где ρ_T и ρ – плотность твердой частицы и жидкости соответственно; g – ускорение свободного падения.

Путем элементарных преобразований уравнения (2) получаем:

$$\frac{4}{3} Ar \cdot g \frac{d^3}{v^2} = Re^2 C(Re), \quad (3)$$

$$Ar = \frac{\rho_T}{\rho} - 1, \quad (4)$$

где символом Ar обозначено число Архимеда. Далее, для удобства обозначим левую часть уравнения (3) через B , затем извлечем корень квадратный из левой и правой частей полученного уравнения. В результате будем иметь

$$B = \frac{4}{3} Ar \cdot g \frac{d^3}{v^2}, \quad (5)$$

$$\sqrt{B} = Re \sqrt{C(Re)}. \quad (6)$$

Согласно уравнению (6), каждому заданному значению числа Рейнольдса будет соответствовать определенное значение \sqrt{B} , т.е.

$$Re \approx \sqrt{B}. \quad (7)$$

Учитывая, что числа Re и \sqrt{B} могут быть большими, их целесообразно заменить соответственно на $lg Re$ и $lg \sqrt{B}$, так что

$$lg Re \approx lg \sqrt{B}. \quad (8)$$

Таким образом, если построить график зависимости величины $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$, то по известному для исследуемой частицы значению $lg \sqrt{B}$ можно определить из названного графика соответствующее значение $lg Re$, а затем и число Re . Найденному числу Рейнольдса будет соответствовать гидравлическая крупность, равная:

$$W = \frac{v}{d} Re. \quad (9)$$

Для построения графика зависимости величины $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$ задавались значения $lg Re$: -1, -0,5, 0; 1; 1,5; 2; 3; 4. Для каждого из этих значений определялись число Рейнольдса Re , соответствующий ему коэффициент сопротивления C для грунтовых материалов, найденный по формуле (1), а затем параметры \sqrt{B} и $lg \sqrt{B}$. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры для построения графика зависимости $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$

$lg Re$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3	4
Re	0,1	0,3162	1	3,162	10	31,62	100	1000	10000
C	245	81	28,4	12	5,26	2,6	1,61	1,2	1,2
\sqrt{B}	1,56	2,85	5,33	10,95	22,94	51,01	127	1095	10954
$lg \sqrt{B}$	0,19	0,45	0,73	1,04	1,36	1,71	2,10	3	4

График зависимости $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$, построенный на основании представленных в таблице 1 данных, показан на рис. 2. На этом рисунке показан также аналогичный график для шаров.

На кривой 1 рисунка 2 отмечены три характерных участка. Участок, соответствующий значениям параметра $lg \sqrt{B} \leq 0,73$, относится к ламинарному режиму обтекания частицы.

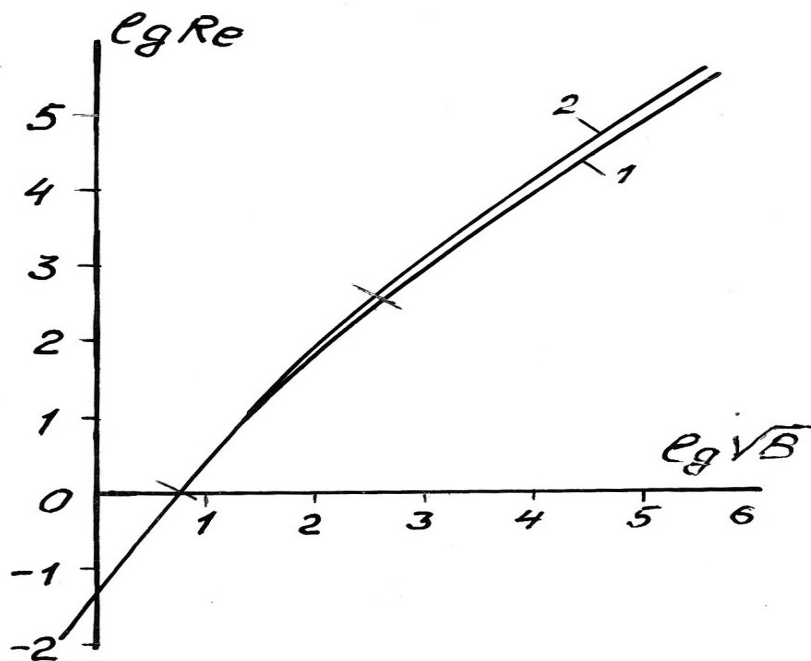


Рис. 2. Зависимость $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$:
1 – грунтовые материалы; 2 – шары

В данном случае гидравлическую крупность можно определить не только вышеуказанным графическим методом, но и по формуле:

$$W = \frac{Ar d^2}{18\nu}, \quad (10)$$

которая вытекает из уравнения (2) при учете закона Стокса

$$C \frac{24}{Re}. \quad (11)$$

Второй участок кривой 1 на рис.2, соответствующий значениям $0,73 \leq lg \sqrt{B} \leq 2,6$, относится к переходному режиму обтекания, тогда как третий участок при $lg \sqrt{B} > 2,6$ – к автомодельности части по числу Re .

Рассмотрим пример графического определения гидравлической крупности для частицы песка диаметром $d = 1$ мм, падающей в воде. В данном случае $\nu = 10^{-6}$ м²/с (при $t = 20^\circ\text{C}$), $\rho = 10^3$ кг/м³, $\rho_T = 2650$ кг/м³. Определяем число Архимеда:

$$Ar = \left(\frac{2650}{1000} - 1 \right) = 1,65.$$

Затем вычисляем параметр B и $lg \sqrt{B}$:

$$B = \frac{4}{3} 1,65 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,001^3}{10^{-12}} = 21582,$$

$$lg \sqrt{B} = lg \sqrt{21582} = 2,17.$$

Найденному значению $lg \sqrt{B}$ соответствует, согласно графику 1 на рис 2, значение $lg \sqrt{B} = 2,05$, т.е. $Re = 112,2$. Наконец, по формуле (9) определяем W :

$$W = \frac{10^{-6}}{10^{-3}} \cdot 112,2 = 0,112 \text{ м/с.}$$

В случае падения шара диаметром $d = 1$ мм при $Ar = 1,65$ и $\nu = 10^{-6}$ м²/с величина $lg \sqrt{B}$ та же, что и в предыдущем примере, тогда как $lg Re$ будет равняться 2,2, что следует из графика 2 на рис.2. Поскольку в данном случае число Рейнольдса $Re = 158$, гидравлическая крупность шара равняется

$$W = \frac{10^{-6}}{10^{-3}} \cdot 158 = 0,158 \text{ м/с.}$$

В таблице 2 представлены расчетные значения гидравлической крупности, полученные графическим методом, и соответствующие им экспериментальные значения $W_{оп}$, заимствованные из [2], для различных крупностей частиц грунтовых материалов. Среднее относительное отклонение расчетных значений гидравлической крупности составило 4%, что свидетельствует о достоверности рассматриваемого графического метода определения гидравлической крупности.

Таблица 2

Сопоставление расчетных значений W с экспериментальными значениями

№	d , мм	$lg \sqrt{B}$	$lg Re$	Re	W , м/с	$W_{оп}$, м/с	$\Delta = \frac{ W - W_{оп} }{W_{оп}} 100\%$
1	0,2	1,12	0,60	3,98	0,0199	0,0192	3,6
2	0,4	1,57	1,27	18,62	0,046	0,048	4,2
3	0,6	1,83	1,61	40,74	0,068	0,072	5,5
4	0,8	2,02	1,90	79,43	0,099	0,095	4,2
5	1	2,17	2,05	112	0,112	0,117	4,3
6	2	2,62	2,57	371	0,185	0,184	0,5
7	4	3,07	3,00	1000	0,250	0,234	6,8
8	6	3,33	3,30	1995	0,332	0,323	2,8
9	8	3,52	3,45	2818	0,352	0,370	4,8
10	10	3,67	3,60	3981	0,398	0,420	5,2
11	12	3,78	3,70	5012	0,418	0,450	7,1
12	15	3,93	3,86	7244	0,483	0,500	3,4

$$\Delta_{ср} = 4\%$$

Отметим, что предложенный графический метод определения гидравлической крупности твердых частиц является простым и носит универсальный характер поскольку область применения его не ограничена не только значениями числа Рейнольдса, но, вообще говоря, и формой

частиц. В случае частиц произвольной правильной формы, например, шаров, дисков, пластинок, эллипсоидов и др. для определения гидравлической крупности данным графическим методом достаточно знать соответствующую этим частицам эмпирическую (аналитическую или графическую) зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса, на основании которой можно построить график зависимости $lg Re$ от $lg \sqrt{B}$ и использовать его для определения искомой гидравлической крупности.

Список литературы

1. Зегжда А.П. Падение зерен песка и гравия в стоячей воде // Изв. ВНИИГ, 1934. – Т.12. – С.24–27.
2. Караушев А.В. Проблемы динамики естественных водных потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1960. – 392 с.
3. Гончаров В.Н. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1962. – 374 с.
4. Векслер А.Б. К вопросу о гидравлической крупности и коэффициенте сопротивления наносов // Изв. ВНИИГ, 1971. – т.96. – С.74–88.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
6. Константинов Ю.М. Гидравлика, – К.: Вища школа, 1981. – 358 с.