

В.Л. ПОЛЯКОВ, доктор технических наук

Институт гидромеханики НАН Украины

А.А. КРАВЧУК, аспирант

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## О ГИДРАВЛИКЕ ВОДООЧИСТНЫХ БЕЗНАПОРНЫХ ФИЛЬТРОВ НА НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЯХ ФИЛЬТРОВАНИЯ

*У технологічному процесі фільтрування виділені дві початкові стадії, протягом яких безнапірний фільтр фактично готується до інтенсивного освітлення суспензії. Сформовані та строго вирішені дві математичні задачі, які описують динаміку руху води, що очищається, над шаром завантаження, у самому завантаженні та відвідних комунікаціях. На типових прикладах обґрунтована правочинність умовного розподілу вищезгаданого процесу на три стадії.*

**Ключові слова:** фільтрування; суспензія; кінетика; осад; фільтроцикл; фільтрат.

*В технологическом процессе фильтрования выделены две начальные стадии, в течении которых безнапорный фильтр фактически подготавливается к интенсивному осветлению суспензии. Сформулированы и строго решены две математические задачи, описывающие динамику движения очищаемой воды над слоем загрузки, в самой загрузке и отводящих коммуникациях. На типичных примерах обоснована правомочность условного разделения вышеупомянутого процесса на три стадии.*

**Ключевые слова:** фильтрование; суспензия; кинетика; осадок; фильтроцикл; фильтрат.

*Two initial stages were derived in the technological process of deep bed filtration during which the filter was prepared for intensive suspension clarification. To describe dynamics of pure water above the filter medium layer, within it and in discharge communications, two mathematical tasks were formulated and solved exactly. Correctness of formal separation of the above-mentioned process into three stages was substantiated at typical examples.*

**Key words:** filtration; suspension; kinetics; sediment; filtration cycle; filtrate.

### Введение

Для подготовки воды необходимого качества в практике водоочистки находят широкое применение безнапорные фильтры с зернистой загрузкой. Схема такого фильтра приведена на рис. 1.

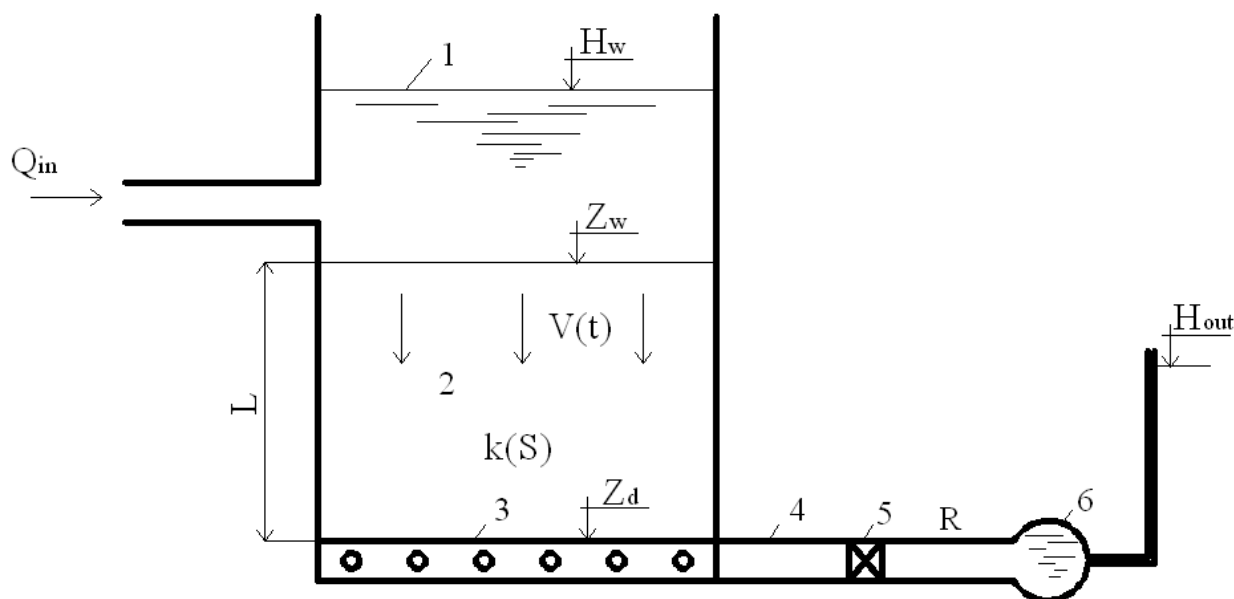


Рис. 1. Схема фильтровальной установки:

1 – уровень воды над фильтром; 2 – тело фильтра; 3 – сборный или распределительный трубопровод; 4, 5 – трубы и арматура; 6 – отводящий трубопровод

Часто причиной остановки фильтровальной установки становятся чрезмерные затраты механической энергии на преодоление гидравлического сопротивления всех составляющих ее конструктивных элементов, включая подводящие и отводящие коммуникации, а также сам фильтр. Поэтому для оптимизации ее работы большое значение приобретает прогноз роста общих потерь напора и особенно потерь в слое пористой загрузки. Как правило, из-за превышения проходной составляющей водного баланса безнапорного фильтра расходной составляющей, выше слоя загрузки интенсивно накапливается неосветленная вода. С самого начала очередного фильтроцикла над поверхностью загрузки появляется уровень воды, который затем в течение всего периода фильтрования постепенно, причем неравномерно во времени, поднимается. Как следствие, напор на входе в загрузку соответствующим образом увеличивается, а значит растут скорость фильтрации и производительность фильтра. Подобное усиление фильтрации важно вследствие прогрессирующего заиления, фильтрующего материала, что неизбежно ведет к уменьшению указанной скорости. Однако, характерные времена процессов аккумуляции в фильтре воды и взвешенного вещества существенно разнятся, что дает основание в технологическом процессе осветления суспензии выделить начальные стадии, которые предшествуют основной. Благодаря их кратковременности в загрузке успевает образоваться лишь минимальное количество осадка, так что им на данных стадиях оправдано пренебрегать и ограничиться рассмотрением исключительно гидравлических аспектов действия фильтра. Итак, ниже аналитическими методами последовательно изучается формирование

поверхностного слоя сырой воды сначала при заполнении пор загрузки суспензией (первая стадия), а затем быстрый подъем вышеупомянутого уровня при практически чистой загрузке (вторая стадия). Подача воды на фильтр осуществляется с постоянным расходом, что характерно для промышленного фильтрования. Целью этих теоретических исследований является установление исходного входного напора (уровня) для последующего длительного разделения суспензии.

### Первая стадия

Для первой стадии характерно образование и перемещение вниз по загрузке фронта насыщения, который разделяет ее на участки с заполненными и незаполненными сырой водой порами. Здесь и в дальнейшем принимается более распространенное в практике фильтрования нисходящее направление фильтрационного потока, хотя в рассматриваемом диапазоне скоростей фильтрования  $V$  его выбор для теоретических исследований не имеет принципиального значения. Тогда математическая модель, совместно описывающая на данной стадии динамику воды над загрузкой и внутри нее, имеет следующий вид:

$$\omega \frac{dH_{w1}}{dt} = Q_{in} - \omega V_1(t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} = 0; \quad (2)$$

$$t = 0, \quad H_{w1} = Z_w; \quad (3)$$

$$z = Z_w, \quad h_1 = H_{w1}; \quad z = Z_f, \quad h_1 = Z_f. \quad (4)$$

Здесь  $H_{w1}$ ,  $Z_w$ ,  $Z_f$  – отметки уровня воды над загрузкой, поверхности загрузки и фронта насыщения (рис.1);  $\omega$  – площадь поверхности загрузки;  $Q_{in}$  – расход подаваемой на фильтр воды;  $V_1$ ,  $h_1$  – скорость фильтрования и пьезометрический напор на первой стадии. В модели (1)–(4) не принимаются во внимание капиллярные силы, действующие на фронте насыщения [1-3], что оправдано вследствие кратковременности данной стадии и высокой проницаемости пористой среды. Глубина промоченной зоны загрузки быстро увеличивается, причем отметка  $Z_f$  является неизвестной функцией от времени.

Решение уравнения (2) при граничных условиях (4) дает такие выражения для напора  $h_1$  и скорости  $V_1$ :

$$h_1(z, t) = H_{w1}(t) + \frac{H_{w1}(t) - Z_f(t)}{Z_w - Z_f(t)}(z - Z_w), \quad (5)$$

$$V_1(t) = k_0 \frac{H_{w1}(t) - Z_f(t)}{Z_w - Z_f(t)}, \quad (6)$$

где  $k_0$  – коэффициент фильтрации чистой загрузки. На фронте насыщения справедливо кинематическое условие, которое с учетом (6) будет:

$$-\frac{dZ_f}{dt} = \frac{V_1}{n_0} = \frac{k_0}{n_0} \cdot \frac{H_{w1} - Z_f}{Z_w - Z_f}, \quad (7)$$

где  $n_0$  – пористость чистой загрузки. К условию (7) присоединяется трансформированное уравнение (1), а именно,

$$\omega \frac{dH_{w1}}{dt} = Q_{in} - k_0 \omega \frac{H_{w1} - Z_f}{Z_w - Z_f}, \quad (8)$$

а также начальные условия (3) и

$$t = 0, \quad Z_f = Z_w. \quad (9)$$

Таким образом имеет место относительно двух неизвестных величин ( $Z_f$ ,  $H_{w1}$ ) система двух уравнений (7), (8). Прежде всего из нее вытекает связь между указанными величинами

$$H_{w1} = \frac{Q_{in}}{\omega} t + n_0 Z_f. \quad (10)$$

После подстановки (10) в уравнение (7) получено:

$$\frac{dZ_f}{dt} - \frac{k_0}{n_0 \omega} \cdot \frac{\omega(1-n_0)(Z_w - Z_f) + Q_{in}t}{Z_w - Z_f} = 0. \quad (11)$$

Задаче (9), (11) удовлетворяет простое выражение

$$Z_w - Z_f = \lambda t. \quad (12)$$

Тогда из (11) следует квадратное уравнение относительно  $\lambda$

$$\lambda^2 - \frac{k_0(1-n_0)}{n_0} \lambda - \frac{k_0 Q_{in}}{n_0 \omega} = 0. \quad (13)$$

Физический смысл имеет следующий корень

$$\lambda = \frac{k_0(1-n_0)}{2n_0} \left( \sqrt{\frac{4n_0 Q_{in}}{k_0 \omega (1-n_0)^2} + 1} + 1 \right). \quad (14)$$

Из (3), (8) с учетом выражения (14) найдено

$$H_{w1}(t) = Z_w + \left( \frac{Q_{in}}{\omega} - n_0 \lambda \right) t. \quad (15)$$

Скорость  $V_1$ , как вытекает из (6), (12) и (15), будет постоянной

$$V_1 = \frac{k_0}{\lambda} \left( \frac{Q_{in}}{\omega} + \lambda - n_0 \lambda \right). \quad (16)$$

Очевидно, что загрузка полностью промочится (заполнится сырой водой) к моменту времени

$$t_1 = \frac{Z_w - Z_d}{\lambda}, \quad (17)$$

где  $Z_d$  – отметка основания загрузки. При этом уровень воды над загрузкой окажется на отметке

$$H_{w1}(t_1) = Z_w + \left( \frac{Q_{in}}{\omega} - n_0 \lambda \right) \frac{Z_w - Z_d}{\lambda}. \quad (18)$$

Чтобы придать расчетным зависимостям и уравнениям более общий вид, здесь и дальше вводятся безразмерные переменные и параметры

$$\tilde{H}_{w1} = \frac{H_{w1} - H_{out}}{Z_w - Z_d}, \quad \bar{t} = \frac{k_0 t}{Z_w - Z_d}, \quad \tilde{Z}_w = \frac{Z_w - H_{out}}{Z_w - Z_d},$$

$$\bar{Q}_{in} = \frac{Q_{in}}{\omega k_0},$$

так что

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0} = \frac{1 - n_0}{2n_0} \left( \sqrt{\frac{4n_0 \bar{Q}_{in}}{(1 - n_0)^2} + 1} + 1 \right).$$

Здесь  $H_{out}$  – напор в коллекторе фильтрата,  $Z_w - Z_d = L$  – высота загрузки. Тогда относительное время окончания первой стадии будет

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad (19)$$

а к этому моменту приведенная отметка  $\tilde{H}_{w1}$  достигает величины

$$\tilde{H}_{w1}(\bar{t}_1) = \tilde{Z}_w + (\bar{Q}_{in} - n_0 \bar{\lambda}) \bar{t}_1. \quad (20)$$

### Вторая стадия

Вторая стадия характеризуется интенсивным накоплением сырой воды выше поверхности загрузки ввиду недостаточной пропускной способности пока еще фактически незаиленной пористой среды. Ниже используется индекс “2”, означающий, что соответствующая характеристика относится ко второй стадии. Пренебрегая процессом осветления суспензии и его влиянием на динамику и баланс жидкости в фильтре, за основу новой модели можно взять предыдущую модель и при этом дополнительно учесть влияние отводящих коммуникаций, последствия первой стадии. В результате исходная модель принимает такой вид

$$\omega \frac{dH_{w2}}{dt} = Q_{in} - \omega V_2(t); \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} = 0; \quad (22)$$

$$V_2 = k_0 \frac{\partial h_2}{\partial z}; \quad (23)$$

$$H_d(t) = H_{out} + R\omega^2 V_2^2(t); \quad (24)$$

$$t = 0, \quad H_{w2} = H_{w1}(t_1) = H_{w2}^0; \quad (25)$$

$$z = Z_w, \quad h_2 = H_{w2}; \quad z = Z_d, \quad h_2 = H_d; \quad (26)$$

где  $R$  – гидравлическое сопротивление отводящих коммуникаций;  $H_d$  – напор в основании загрузки;  $V_2$ ,  $h_2$  – скорость фильтрования и пьезометрический напор на второй стадии.

В первую очередь найдено распределение напора в загрузке

$$h_2(z, t) = H_{w2}(t) + \frac{H_{w2}(t) - H_d(t)}{L} (z - Z_w). \quad (27)$$

С учетом (24) из (27) получено квадратное уравнение относительно  $V_2$

$$R\omega^2 V_2^2 + \frac{L}{k_0} V_2 - H_{w2} + H_{out} = 0.$$

Таким образом

$$V_2 = \frac{L}{2k_0 R \omega^2} \left( \sqrt{\frac{4k_0^2 \omega^2 R (H_{w2} - H_{out})}{L^2} + 1} - 1 \right). \quad (28)$$

Тогда задача относительно отметки уровня воды над загрузкой включает уравнение

$$\omega \frac{dH_{w2}}{dt} = Q_{in} - \frac{L}{2k_0 R \omega} \left( \sqrt{\frac{4k_0^2 \omega^2 R (H_{w2} - H_{out})}{L^2} + 1} - 1 \right) \quad (29)$$

и условие (25). В общем случае решение этой задачи имеет следующую интегральную форму

$$t(H_{w2}) = 2k_0 \omega^2 R \mathfrak{Y}(H_{w2}), \quad (30)$$

где

$$\mathfrak{Y}(H_{w2}) = \int_{H_{w2}^0}^{H_{w2}} \frac{d\xi}{2k_0 \omega R Q_{in} + L - \sqrt{4k_0^2 \omega^2 R (\xi - H_{out}) + L^2}}.$$

После перехода к относительным величинам вид основной расчетной зависимости (30) заметно упрощается и, с учетом времени первой стадии, составит:

$$\bar{t}(\tilde{H}_{w2}) = 2\bar{R} \mathfrak{Y}(\tilde{H}_{w2}) + \bar{t}_1, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(\tilde{H}_{w2}) = \int_{\tilde{H}_{w2}^0}^{\tilde{H}_{w2}} \frac{d\xi}{2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1 - \sqrt{4\bar{R}\xi + 1}} &= \frac{1}{4\bar{R}} \left[ (2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1) \ln \frac{\tilde{H}_{w2}^0 - \bar{Q}_{in} - \bar{R}\bar{Q}_{in}^2}{\tilde{H}_{w2} - \bar{Q}_{in} - \bar{R}\bar{Q}_{in}^2} + 2\sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2}^0 + 1} \right. \\ &\left. - 2\sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2} + 1} + (2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1) \ln \frac{(2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1 + \sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2} + 1})(2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1 - \sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2}^0 + 1})}{(2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1 - \sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2} + 1})(2\bar{R}\bar{Q}_{in} + 1 + \sqrt{4\bar{R}\tilde{H}_{w2}^0 + 1})} \right], \end{aligned}$$

$$\bar{R} = \frac{k_0^2 \omega^2}{L} R.$$

Из формулы (31) в двух предельных случаях вытекают простые выражения для искомой функции  $\tilde{H}_{w2}(\bar{t})$ . Так, при  $\bar{R} \rightarrow 0$  (ничтожно малое сопротивление отводящих коммуникаций) легко получить

$$\tilde{H}_{w2}(\bar{t}) = \bar{Q}_{in} - (\bar{Q}_{in} - \tilde{H}_{w2}^0) e^{-\bar{t}}. \quad (32)$$

Если же, наоборот, сопротивление указанных коммуникаций бесконечно большое ( $\bar{R} \rightarrow \infty$ ), то вся поступающая на фильтр вода будет аккумулироваться над загрузкой и тогда

$$\tilde{H}_{w2}(\bar{t}) = \tilde{H}_{w2}^0 + \bar{Q}_{in}\bar{t}. \quad (33)$$

В действительности подъем уровня сырой воды в фильтре происходит выражено неравномерно – очень быстро на первой стадии и в начале второй, а затем резко замедляется, асимптотически приближаясь к приведенной отметке

$$\tilde{H}_m = \tilde{H}_{w2}(\infty) = \bar{Q}_{in} + \bar{R}\bar{Q}_{in}^2. \quad (34)$$

Очевидно, что величина  $\tilde{H}_m$  линейно зависит от  $\bar{R}$  и при варьировании последнего от 0 до  $\infty$ , что согласуется с (32), (33).

### Обсуждение результатов расчетов примеров

Для иллюстрации выведенных выше расчетных зависимостей, а также демонстрации правомочности выделения в технологическом процессе фильтрования начальных стадий выполнен количественный анализ с использованием типичных исходных данных. Так, зафиксированы значения  $n_0 = 0,4$ ,  $\tilde{Z}_w = 1,25$ , а сопротивление  $\bar{R}$  в примерах дискретно изменялось от 0 до 2. Предметом расчетов стали приведенные отметки – текущая  $\tilde{H}_{w2}$  и установившаяся  $\tilde{H}_m$ . В первую очередь определялась уровенная динамика на обеих рассмотренных стадиях при дополнительно заданном  $\bar{Q}_{in}$  (1,5) и четырех значениях  $\bar{R}$ . Результаты вычислений  $\tilde{H}_{w2}$  вплоть до момента времени  $\bar{t} = 10$  представлены на рис. 2.

Как следует из рисунка все четыре графика совпадают на интервале времени от 0 до 0,345 (время окончания первой стадии) поскольку здесь отводящие коммуникации еще не влияют на фильтрационный процесс (соответствующая единая линия показана пунктиром). К моменту  $\bar{t} = \bar{t}_1 = 0,345$  отметка  $\tilde{H}_w$  достигает значения 1,381 и последующее ее увеличение теперь существенно зависит от  $\bar{R}$ . При неограниченной во времени фильтрации чистой воды приведенная отметка стабилизировалась на следующих отметках: 2,0625 при  $\bar{R} = 0,25$ ; 2,625 при  $\bar{R} = 0,5$ ; 3,1875 при  $\bar{R} = 0,75$  и 3,75 при  $\bar{R} = 1$ . Однако, судя по рис.2, уже при  $\bar{t} \geq 5$  текущая отметка оказывается близкой к максимальной для данных условий. Вместе с тем характерное время фильтрования суспензии на один – два порядка больше, что и оправдывает разделение указанного процесса на три стадии. Итак, на протяжении первых двух стадий фильтр фактически только подготавливается к основной своей работе по осветлению суспензии, которая затем выполняется на третьей, главной стадии.

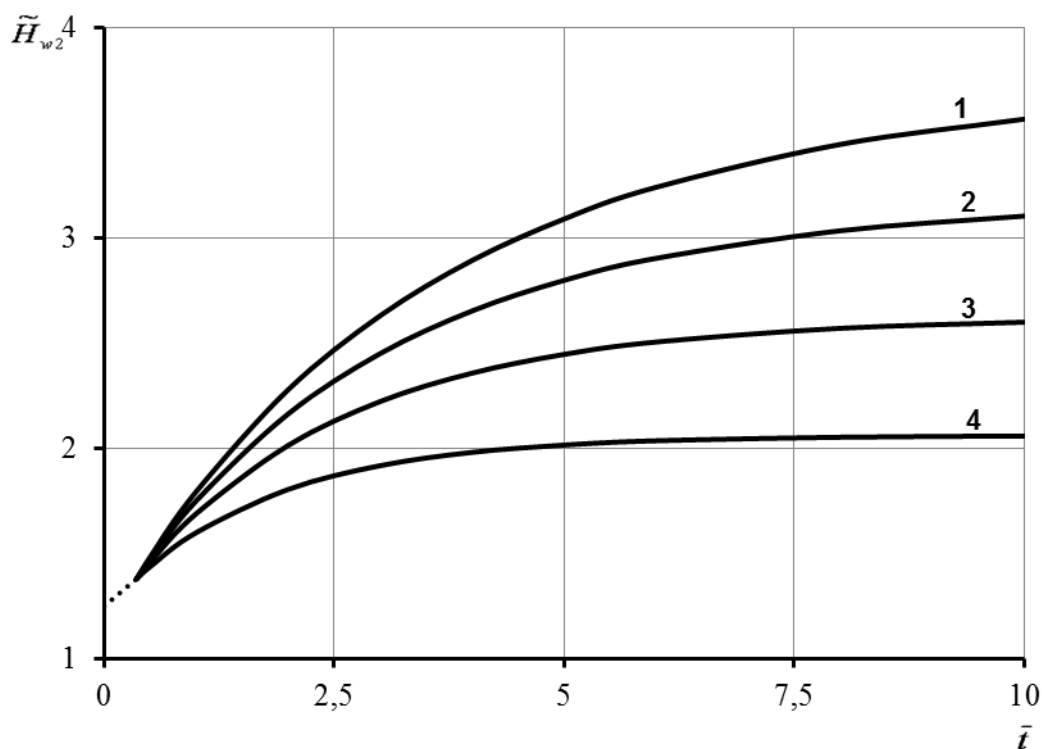


Рис. 2. Подъем уровня сырой воды над загрузкой со временем:

$$1 - \bar{R} = 1; \quad 2 - \bar{R} = 0,75; \quad 3 - \bar{R} = 0,5; \quad 4 - \bar{R} = 0,25$$

Именно эта стадия будет нами в дальнейшем обстоятельно изучаться аналитическими методами. Начальную же отметку для третьей стадии  $\tilde{H}_w(0)$  предполагается вычислять по формуле (34), согласно которой ее значение зависит от двух параметров –  $\bar{Q}_{in}$  и  $\bar{R}$ .

Данные расчетов  $\tilde{H}_m$  для шести значений  $\bar{R}$  и при изменении от 1 до 2 параметра  $\bar{Q}_{in}$ , характеризующего превышение подаваемой на фильтр сырой воды над пропускной способностью чистого слоя загрузки, показаны на рис. 3.

### Выводы

В технологическом процессе осветления суспензии выделяют две начальные стадии, которые предшествуют основной. На протяжении первой стадии происходит формирование поверхностного слоя сырой воды при заполнении пор загрузки. На протяжении второй – быстрый подъем вышеупомянутого уровня при практически чистой загрузке.

На первой стадии сопротивление отводящих коммуникаций не влияет на фильтрационный процесс. Но начинает существенно влиять на второй стадии.

На протяжении первых двух стадий фильтр фактически только подготавливается к основной третьей стадии по осветлению суспензии. Значение начальной отметки уровня воды над загрузкой для третьей стадии зависит от расхода подаваемой на фильтр воды и сопротивления в отводящих коммуникациях.



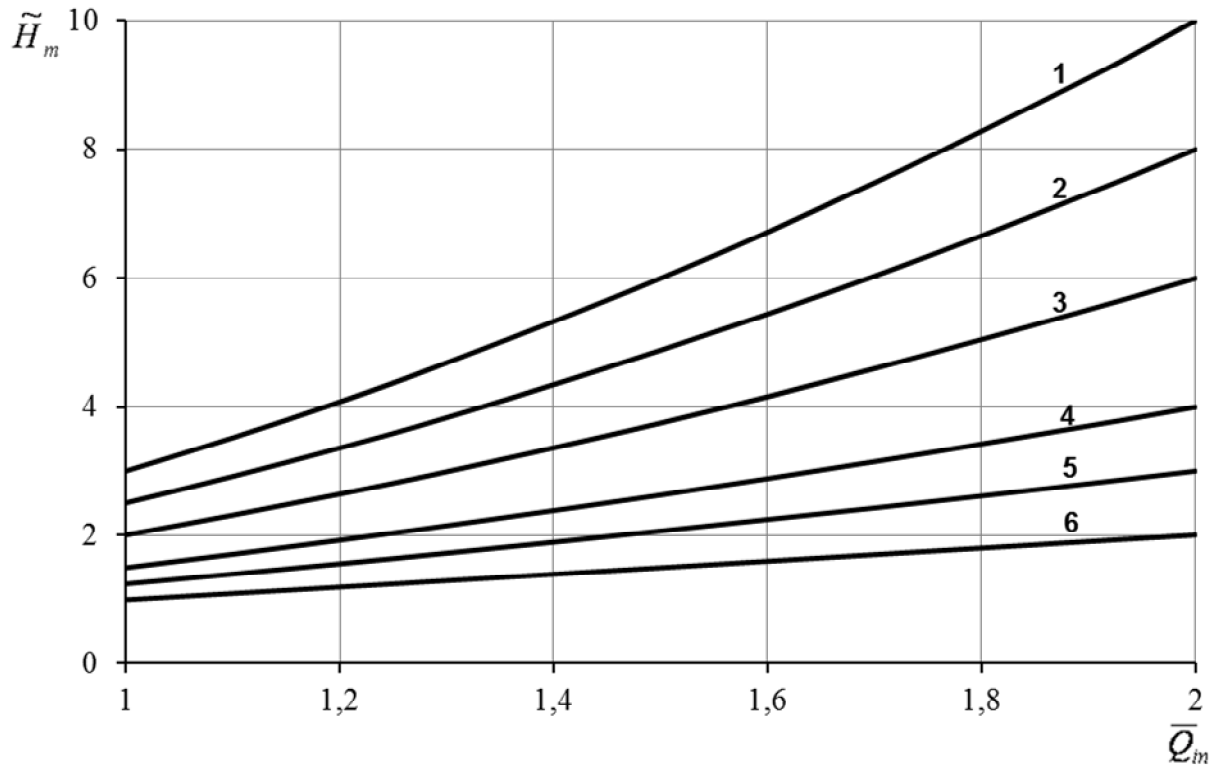


Рис. 3. Зависимость  $\tilde{H}_m(\bar{Q}_{in})$ :

1 –  $\bar{R} = 2$ ; 2 –  $\bar{R} = 1,5$ ; 3 –  $\bar{R} = 1$ ; 4 –  $\bar{R} = 0,5$ ; 5 –  $\bar{R} = 0,25$ ; 6 –  $\bar{R} = 0$

Очевидно, что отводящие коммуникации в состоянии оказать серьезное влияние на интенсивность фильтрования.

### Список литература

1. Тусев Е.М. Экспериментальные исследования напорного впитывания. – В кн.: физика почвенных вод. – М.: Наука. – 1981. – С.195-205.
2. Elric D.E., Parkin G.W., Reynolds W.D., Fallow D.J. Analysis of early-time and steady-state single ring infiltration under falling head conditions // Water Resour. Res. – 1995.-31. – P.1883-1893.
3. Neuman S.P. Hydraulic head at the wetting front in the Green-Ampt model // Water Resour. Res. – 1976. –12. – P.564-566

Надійшло до редакції 28.04.2015