

УДК 628.35

Ю.Д. КОПАНИЦЯ, кандидат технічних наук  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## РОЗРАХУНОК ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА НЕСИМЕТРИЧНУ ПЛОСКУ ПОВЕРХНЮ. УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ТРЬОХ КОМАНД – К123

*Приведено приклад організації розрахунку в комп'ютерних програмах сили тиску для задач гідростатики.*

**Ключові слова:** сила тиску, центр ваги.

*Приведен пример организации расчёта в компьютерных программах силы давления для задач гидростатики.*

**Ключевые слова:** сила давления, центр тяжести.

*The example of organisation of counting a pressure force for hydraulic task with computer programs is produced.*

**Key words:** pressure force, center of pressure.

Представлено розрахунок сили гідростатичного тиску на плоску несиметричну поверхню довільної форми на прикладі трикутної поверхні. Кожна грань плоскої поверхні утворено відповідно прямою, параболою й колом, які задані аналітично рівняннями в Декартові системи координат. Величина сили й координати центра тиску визначено за авторським алгоритмом метода трьох команд К123 – для плоскої поверхні - відносно двох ортогональних напрямків [1-4].

Проблема використання загальноприйнятих алгоритмів розрахунку сили гідростатичного тиску на плоскі поверхні полягає в суттєвому обмеженні умовних учбових прикладів, які представлено симетричними відносно вертикальної осі трикутними й прямокутними поверхнями, колом та півколом. Стандартні алгоритми, які широко представлено в підручниках, дозволяють визначати тільки одну – вертикальну координату та відповідну глибину занурення центру тиску відносно вільної поверхні рідини.

Будь-яка несиметрична плоска поверхня, наприклад трикутної форми, вимагає визначати координати центру дії вектора сили гідростатичного тиску за двома ортогональними напрямками, що не представлено в літературі

стандартними учбовими формулами та алгоритмами. Алгоритм універсального авторського методу трьох команд K123 дозволяє рахувати координати центру тиску за будь-яким ортогональним або довільним напрямом. Остання особливість запропонованого алгоритму [4] дозволяє поширювати можливості методу K123 на широке коло аналогічних задач визначення гідростатичного тиску на довільні несиметричні плоскі поверхні [2].

Розроблено авторський метод трьох команд K123, який дозволяє визначати аналітично або чисельними методами за єдиним стандартним алгоритмом силу тиску на поверхні довільної форми [3]. Алгоритм розроблено із урахуванням широкого розповсюдження мобільних технологій та портації систем комп'ютерної алгебри на персональні мікропроцесорні мобільні пристрої. У такий спосіб знімаються всі обмеження на складність представлення в диференціалах рівняння визначення сили гідростатичного тиску на горизонтальній прошарок поверхні із послідуєчим інтегруванням в межах висоти площини вертикальної проекції змоченої поверхні для остаточного визначення величини й координат точки прикладання – горизонтальної проекції рівнодіючої сили гідростатичного тиску.

Для вертикальної поверхні – горизонтальна проекція сили тиску співпадає із вектором сили. У випадках відхилення плоскої поверхні від вертикальної осі – із аналітично заданого рівняння поверхні визначаємо координати центру тиску на поверхні, а горизонтальна проекція сили дозволяє визначити величину самої сили тиску. Особливість методу трьох команд K123 полягає саме в тому, що ми маємо справу із розрахунками **горизонтальної проекції сили тиску на горизонтальний прошарок вертикальної проекції змоченої поверхні** із послідуєчим інтегруванням по висоті означеної проекції.

Сучасні інженерні розрахунки із використанням мобільних та он-лайн технологій в учбовому процесі ставлять задачу розробки та впровадження нових алгоритмів й методів із урахуванням особливостей реалізації комп'ютерних алгоритмів і методів аналітичних та чисельних розрахунків.

Системи комп'ютерної алгебри на мобільних платформах дозволяють суттєво розширити види учбових завдань та індивідуальних розрахунків. Звичайні смартфони із системою комп'ютерної алгебри MAXIMA, яка належить до вільного програмного забезпечення, дозволяють розгортати мобільні комп'ютерні класи в звичайних учбових аудиторіях. Авторський метод трьох команд K123 для визначення гідростатичного тиску на поверхні довільної форми дозволяє без обмежень проводити широкий спектр розрахунків в учбовому процесі без обмежень складності аналітичних викладок.

В світовій практиці існують приклади впровадження в учбовий процес систем комп'ютерної алгебри [5], які суттєво зменшують витрати часу на механічні розрахунки за стандартними формулами обмеженого класу умовних учбових завдань. За рахунок вивільнення часу збільшується й

розширюється об'єм й якість учбових курсів, додаються елементи моделювання, обчислювального експерименту й дослідження.

Представлено варіант розрахунку сили гідростатичного тиску на плоску несиметричну поверхню методом K123. Звичайні алгоритми й правила розрахунку, які представлено в учбових підручниках та прикладах задач, **не дозволяють розглядати** даний клас задач. Універсальний інтегральний алгоритм метода трьох команд K123, який розроблено із урахуванням можливостей сучасних систем комп'ютерної математики (на прикладі системи MAXIMA) розраховано на використання в учбовому процесі. На прикладі вирішення запропонованого класу задач студенти можуть засвоювати можливості використання системи комп'ютерної алгебри, вивчати оператори, команди й стандартні алгоритмічні блоки (цикл, умова...), елементи вводу, зберігання, графічного виводу, які складають вбудовану мову програмування системи комп'ютерної алгебри. Означені елементи є стандартними для широкого класу задач. Вони дозволяють: проводити моделювання й чисельне дослідження поставлених задач; будувати в загальному вигляді графічне відображення результатів розрахунків для загальних випадків.

Саме розповсюдження систем комп'ютерної алгебри в мобільних персональних розрахунках дозволяє повернути в процес навчання елементи «обчислення нескінченно малих» – будувати рівняння в диференціалах із послідовним інтегруванням для отримання результатів – основа методу трьох команд K123. Історичний екскурс в розвиток і якісні зміни наповнення збірників задач по розділу гідростатика за останні сто років автор приводить в своїй роботі [1] – приклади інженерного розрахунку із елементами «обчислення нескінченно малих» практично виключено із сучасних підручників.

**Прикладним аспектам** використання потужного методу «обчислення нескінченно малих» в учбових завданнях – на прикладі **метода трьох команд K123** – присвячена головна ідея даної статті. Представлена задача аналітичного й чисельного розрахунку сили гідростатичного тиску на несиметричну плоску трикутну поверхню із визначенням координат центра тиску по двом ортогональним напрямкам, що однозначно визначає вектор сили для будь якої плоскої поверхні заданої аналітично (рис.1).

Для ілюстрації обчислювального методу K123 обрано два типових тестових об'єкта у вигляді трикутної несиметричної поверхні. Грані поверхні задано аналітичними рівняннями прямих ліній в першому варіанті. Для другого варіанту грані трикутної плоскої несиметричної поверхні задано рівняннями лінії, кола й параболи.

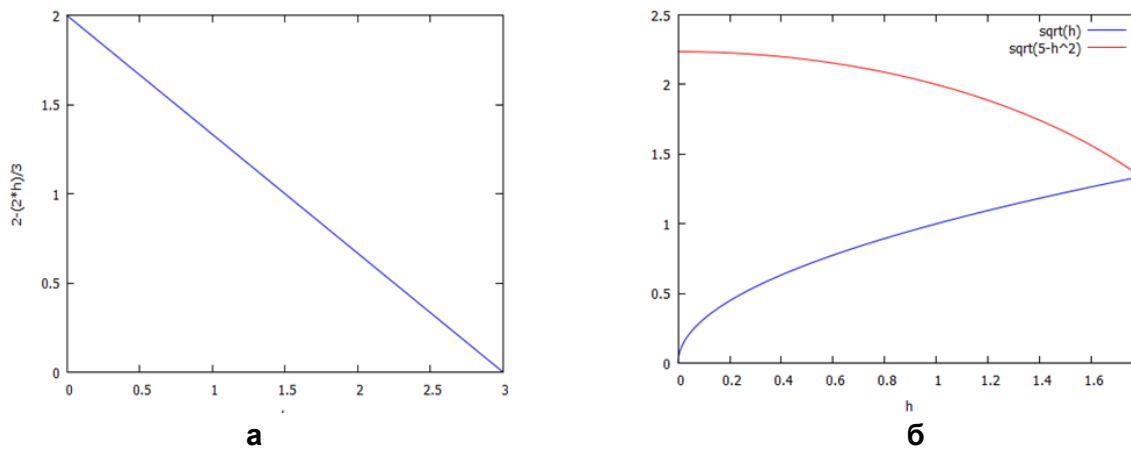


Рис.1. Плоскі трикутні несиметричні поверхні задані аналітично  
**а** – поверхню обмежено осями координат й прямою лінією із координатами (0,0) та (2,3); **б** – грані поверхні утворено віссю “Ox”, дугою й параболою.

Отримано аналітичне рішення задач на смартфоні із операційною системою Андроїд в системі комп’ютерної математики MAXIMA. Приклад коду програми варіанту задачі рис. 1.б:

```
kill(all);
RO: 1000; g:9.81;
x1(h):=sqrt(h);
x2(h):=sqrt(5-(h**2));
m:0; while sqrt(5-(m**2))>sqrt(m) do (m:m+0.001);
H:m;
x3(h):=x2(h)-x1(h);
P:integrate(RO*g*(H-h)*(x3(h)),h,0,H), numer;
mP:integrate(RO*g*(H-h)*(x3(h))*h,h,0,H), numer;
hdy:mP/P;
mPx:integrate(RO*g*(H-h)*(x1(h)+(x2(h)-x1(h))/2),h,0,H), numer;
hdx:mPx/P;
```

Аналітичні розрахунки величини та координати вектору сили тиску по існуючим ортогональним напрямкам виконуються за єдиним універсальним інтегральним методом трьох команд K123 [1,2]. Алгоритм складається із трьох послідовних команд й не залежить від складності аналітичного завдання граней плоскої поверхні (рис. 1.б). В розглянутій задачі обрано вертикальну поверхню [4]:

$$P = \int_0^H \rho g (H - h) (\sqrt{5 - h^2} - \sqrt{h}) dh \quad (K1)$$

$$mP = \int_0^H \rho g (H - h) (\sqrt{5 - h^2} - \sqrt{h}) h dh \quad (K2)$$

$$h_{Dy} = mP/P \quad (K3)$$

За приведеними формулами визначаємо величину сили гідростатичного тиску та координату центру тиску по вертикальній осі для конкретного наведеного приклада вертикальної несиметричної плоскої

трикутної поверхні (рис. 1.б), яка має криволінійні грані. В загальному вигляді рівняння методу трьох команд K123 представлено в роботах автора [2,4].

Для визначення координати центра тиску по осі "x" необхідно визначити момент сили відносно вертикальної осі за формулами:

$$mP_x = \int_0^H \rho g (H-h) (\sqrt{5-h^2} - \sqrt{h}) (\sqrt{h} + ((\sqrt{5-h^2} - \sqrt{h})/2)) dh \quad (K2x)$$

$$h_{D_x} = mP_x / P \quad (K3x)$$

Рівняння відповідають конкретному наведеному прикладу (рис. 1.б). В загальному випадку: ввести відповідні аналітичні формули бокових граней поверхні; змінити межі інтегрування. У разі завдання бокової грані кусочною функцією – необхідності зробити декомпозицію поверхні на горизонталіні складові шари. Отримані часткові рішення за єдиним алгоритмом методу K123 зводяться до рівнодіючої. Для плоскої поверхні, яка розташована під кутом до вертикальної осі – рахуємо за алгоритмом трьох команд K123 для криволінійної поверхні [4].

Запропоновані приклади розрахунків тестових задач наочно демонструють потужний потенціал методу K123 в реалізації розрахунку координат центру тиску за **різними ортогональними напрямками**, визначення тиску на поверхні із **криволінійними гранями**.

Грані плоскої поверхні утворено відповідно ортогональними осями "OX" та "OY" та прямою заданою аналітично рівнянням в Декартові системи координат (рис.1.а, 2.а).

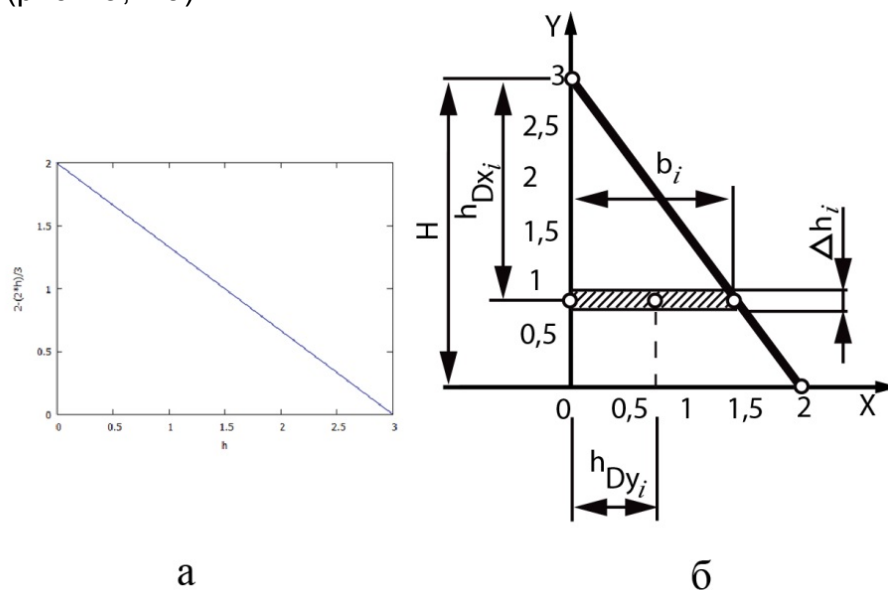


Рис.2. Трикутна несиметрична поверхня обмежена осями координат й прямою: **а** – поверхню обмежено осями координат  $x = 0$ ,  $y = 0$  й прямою лінією  $x = f(h)$  із координатами (0;2) та (3;0); **б** – статичні моменти ( $i$ -того) прошарку шириною ( $b_i$ ), висотою ( $\Delta h$ ) плоскої поверхні відносно ортогональних осей ( $h_{Dxi}$ ,  $h_{Dyi}$ )

Отримано відносну та абсолютну оцінку точності результатів чисельного розрахунку в порівнянні із аналітичним алгоритмом. Проведено

аналіз впливу збільшення кількості ітерацій чисельного алгоритму й відповідна відносна оцінка помилки.

Представлено варіант розрахунку сили гідростатичного тиску на плоску несиметричну поверхню чисельною реалізацією інтегрального методу трьох команд K123 (на прикладі системи MAXIMA). Визначена сила гідростатичного тиску, розраховано координати центра тиску по двом ортогональним напрямкам, що однозначно визначає вектор сили.

Для ілюстрації доповіді обрано трикутну несиметричну поверхню. Грані поверхні задано аналітичними рівняннями прямих ліній (рис.1.а і 2.а). Статичні моменти обраного горизонтального прошарка поверхні позначено на рис. 2.б.

За алгоритмом трьох команд для визначення ширини і-го прошарка поверхні використовується **обернене рівняння** (рис.2.а) грані поверхні. Висота і-го горизонтального прошарка поверхні обирається в залежності від заданої точності інженерних розрахунків. Оцінка точності розрахунків визначалась відносно отриманого точного аналітичного рішення (рис.3). В загальному випадку, оцінка точності розрахунку за чисельними алгоритмами, визначається в порівнянні результатів, які отримано із різним числом ітерацій. У такий спосіб проводиться відносна оцінка наближення до точного результату при зміні кількості ітерацій в операції чисельного інтегрування (рис.4).

Чисельний розрахунок величини та координати вектору сили тиску по існуючим ортогональним напрямкам виконуються за єдиним інтегральним методом K123. Алгоритмом розрахунку величини сили гідростатичного тиску та координати центру тиску вздовж вертикальної осі відносно вільної поверхні рідини складається із трьох послідовних команд за формулами (K1, K2x, K3x). Чисельний алгоритм методу трьох команд K123 дозволяє реалізацію розрахунків для будь-якого аналітичного завдання граней плоскої поверхні.

В складних випадках можливо вирішувати систему двох рівнянь, які задають бокові грані плоскої поверхні при фіксованому значенні глибини та визначати ширину кожного прошарку. У такий спосіб ми уникаємо необхідності, обов'язкового для аналітичного розрахунку, визначення оберненої функції бокових граней поверхні у формі запису  $x = f(h)$ .

$$P = \sum_1^n \rho g (H - n\Delta h) \left(2 - \frac{2n\Delta h}{3}\right) \Delta h \quad (K1)$$

$$mP_x = \sum_1^n \rho g (H - n\Delta h)^2 \left(2 - \frac{2n\Delta h}{3}\right) \Delta h \quad (K2x)$$

$$h_{Dx} = \frac{mP_x}{P} \quad (K3x)$$

Визначення координати центра тиску вздовж горизонтальної осі (відстань від осі "OY") проводиться за формулами (K2y, K3y) для осі "OY":

$$mP_y = \sum_1^n \rho g (H - n\Delta h) \left(2 - \frac{2n\Delta h}{3}\right) \left(\left(2 - \frac{2n\Delta h}{3}\right) / 2\right) \Delta h \quad (K2y)$$

$$h_{Dy} = \frac{mP_y}{P} \quad (K3y)$$

В залежності від обраної висоти горизонтального прошарку ми визначаємо кількість ітерацій та отримуємо відповідну точність результату. Оцінка точності результату розрахунку проведено **відносно існуючого точного аналітичного варіанту** розрахунку за методом трьох команд K123. Чисельний розрахунковий експеримент показав, що загальноприйняту в техніці 5% точність розрахунку отримано за п'ятнадцять ітерацій (рис.3.).

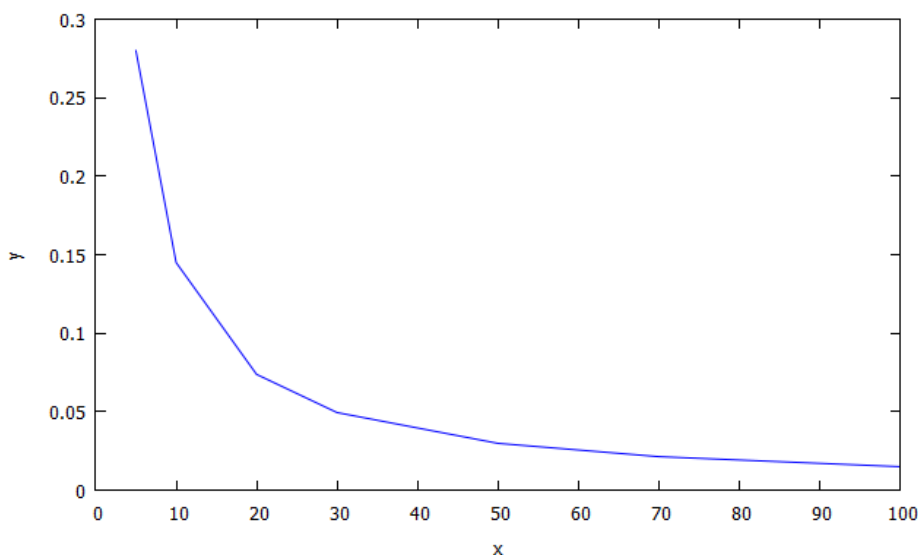


Рис.3. Оцінка відносної похибки розрахунку сили гідростатичного тиску на плоску трикутну несиметричну поверхню залежно від кількості ітерацій:  
x – кількість ітерацій чисельного розрахунку методом трьох команд K123;  
y – відносна помилка чисельного розрахунку в порівнянні із точним аналітичним алгоритмом розрахунку методом трьох команд K123

Відносну оцінку наближення до точного результату **за чисельним алгоритмом** розрахунку метода K123 можна провести порівняльним аналізом результатів при збільшенні числа ітерацій. На рис. 3 приведено величину відносної помилки у відсотках. Загальноприйнята в технічних розрахунках 5% помилка отримана при 30-ти ітераціях (рис.4).

Порівняльний аналіз величин похибки розрахунку по відношенню до точного аналітичного розрахунку та оцінка відносної величини наближення, яку отримано чисельними розрахунками відрізняються в два рази. Аналіз показав в чисельних розрахунках за методом трьох команд K123 величина подвоєної оцінки відносного відхилення результатів розрахунків при збільшенні кількості ітерацій дозволяє отримати надійну оцінку наближення до точного розрахунку.

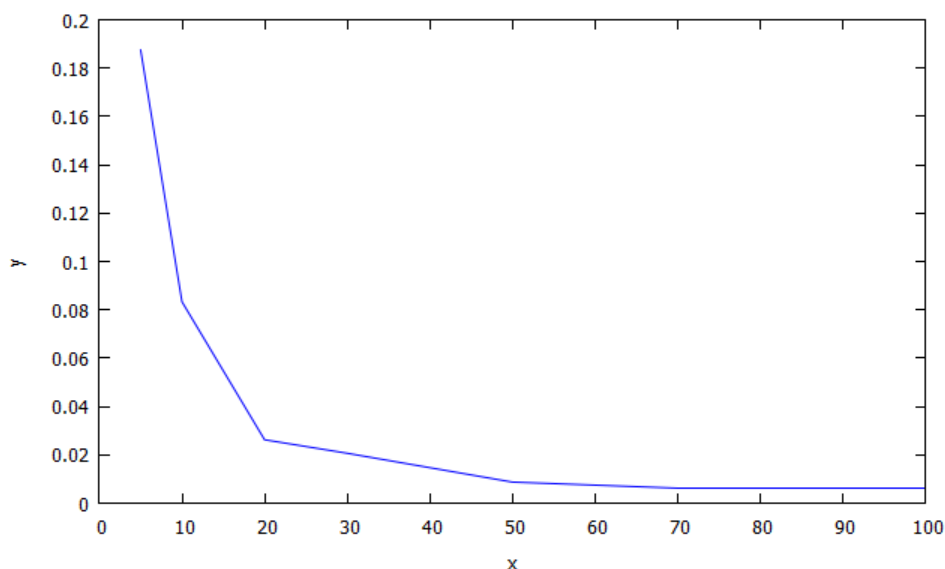


Рис.4. Оцінка відносної величини наближення розрахованої за чисельним алгоритмом сили гідростатичного тиску на плоску трикутну несиметричну поверхню залежно від кількості ітерацій:

$x$  – кількість ітерацій чисельного розрахунку методом трьох команд K123;  
 $y$  – відносна оцінка наближення величини сили гідростатичного тиску, яку отримано за чисельним алгоритмом методом трьох команд K123

Приведені чисельні розрахунки методом трьох команд K123 можливо проводити в звичайних електронних таблицях для будь-якої, заданої аналітично, поверхні. Універсальний алгоритмом K123 розроблено на базі нових теоретичних основ [3,4] із урахуванням вимог уніфікації алгоритму розрахунку та можливостей програмної реалізації на персональних комп'ютерах, он-лайн сервісах та мобільних гаджетах.

Чисельний алгоритм й оцінка точності розрахунку гідростатичного тиску на плоску несиметричну поверхню методом K123 розраховано на реалізацію інженерних викладок в умовах обмеженого доступу до обчислювальних можливостей або при наявності складних аналітичних залежностей щодо визначення форми поверхні. Також, суттєвим елементом комп'ютерного розрахунку є тестові розрахунки. Останні передбачають наявність альтернативних алгоритмів для незалежних тестових обчислень. У такій спосіб аналітичні й чисельні алгоритми суттєво розширюють прикладні аспекти використання методу трьох команд K123.

Саме смартфони дозволяють проводити мобільні розрахунки в «польових» умовах без обмежень. Універсальні хмарові сервіси системи MAXIMA дозволяють проводити розрахунки на звичайних мобільних телефонах із доступом до мережі Інтернет. ВЕБ-інтерфейс до хмарових розрахунків дозволяє використовувати потужні сервери в мережі Інтернет за допомогою звичайного мобільного телефону з будь-якого міста без обмежень та особливих вимог до персонального пристрою. У такий спосіб не обов'язково мати сучасний телефон та встановлене на ньому відповідне спеціальне програмне забезпечення. Єдина вимога до мобільного телефону



– наявність доступу в мережу Інтернет за тією або іншою технологією: GSM, CDMA, загальнодоступні безкоштовні точки WiFi доступу.

Потужні обчислювальні можливості сучасних мобільних платформ суттєво змінюють підходи до впровадження комп'ютерних розрахунків в учбовому процесі. Комп'ютерні класи, персональні ноутбуки та нетбуки відходять на другий ряд, як дуже коштовне та швидко застаріваюче обладнання із пропрієтарним програмним забезпеченням. Персональні мобільні гаджети (планшети й смартфони) із вільним програмним забезпеченням докорінно змінюють парадигму розвитку сучасного учбового процесу.

### **Висновки**

Використання систем комп'ютерної алгебри на мобільних платформах та он-лайн технології в учбовому процесі вимагає розробки та впровадження нових аналітичних та чисельних реалізацій алгоритмів й методів.

Чисельні студентські доклади на наукових конференціях університету [6-13] щодо прикладів практичної реалізації розрахунків, успішне використання системи комп'ютерної алгебри MAXIMA, яка розповсюджується за умовою Відкритої публічної ліцензії, дозволяє рекомендувати обрану систему та аналітичні й чисельні алгоритми метода трьох команд K123 в розрахункові завдання учбового курсу «Технічна механіка рідини та газів», а саму систему MAXIMA використовувати в курсах: «Спеціальні питання гідравліки», «Масопередача», «Метрологія і стандартизація», «Сертифікація наукової праці», «Основи наукових досліджень».

### **Список літератури**

1. *Копаниця Ю.Д.* Комп'ютерний розрахунок сили тиску. Універсальний алгоритм трьох команд – K123. // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". К.: КНУБА, 2012. Вип.18. С.148–163.
2. *Копаниця Ю.Д.* Розрахунок гідростатичного тиску на криволінійну поверхню. Універсальний алгоритм трьох команд – K123. // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". К.: КНУБА, 2012. Вип.20. С.105–119.
3. *Копаниця Ю.Д.* Аналіз виміру епюри гідростатичного тиску на криволінійну поверхню. Універсальний метод розрахунку K123. // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". К.: КНУБА, Вип.21. 2013. С.165–180.
4. *Копаниця Ю.Д.* Інтегральні рівняння методу трьох команд K123 // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". К.: КНУБА, Вип.21. 2013. Вип. 22. С.160-173.
5. *Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB.* 3-е издание: Пер. с англ. М.: ООО «И.Д.Вильямс», 2008. – 1104 с.

6. *Копаниця Ю.Д., Мосейчук Я.* Комп'ютерний розрахунок сили гідростатичного тиску на плоску поверхню. Універсальний метод трьох команд K123 // Тези 75 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2014.

7. *Копаниця Ю.Д., Олешко Д.* Визначення сили гідростатичного тиску на поверхню довільної форми. Універсальний комп'ютерний метод трьох команд K123 // Тези 75 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2014.

8. *Копаниця Ю.Д., Пахомов Д.* Порівняльний аналіз ефективності класичного і інтегрального методу трьох команд K123 в мобільних розрахунках на смартфоні // Тези 74 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2013.

9. *Копаниця Ю.Д., Ємчура Б.* WEB інтерфейс програми MAXIMA в мобільних розрахунках сучасних інженерних задач на прикладі визначення тиску інтегральним методом трьох команд K123 // Тези 74 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2013.

10. *Копаниця Ю.Д., Олександренко О.* Розрахунок гідростатичного тиску на криволінійну поверхню методом трьох команд K123. Чисельний розрахунок // Тези 74 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2013.

11. *Копаниця Ю.Д., Євсєєнко О.* Гідростатичний тиск на плоску сегментну поверхню довільної форми. Чисельний і аналітичний розрахунок методом трьох команд K123 // Тези 74 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2013.

12. *Копаниця Ю.Д., Берест Ю.* Універсальний метод трьох команд K123. Приклади розрахунку гідростатичного тиску на плоску поверхню // Тези 74 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2013.

13. *Копаниця Ю.Д., Волошенко Р., Самородний М.* Розрахунок сили гідростатичного тиску на плоску поверхню. Комп'ютерний розрахунок методом трьох команд // Тези 73 науково-практичної конференції. К: КНУБА, 2012.

*Надійшло до редакції 20.11.2016*