

**А.О. КОСТИКОВ**, д-р техн. наук, доцент  
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Дм.Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4,  
г. Харьков, 61077, Украина

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЁТОМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИСТОЧНИКАХ ГЕНЕРАЦИИ ТЕПЛОТЫ

*Рассмотрена обратная некорректная задача математической физики по идентификации параметров источника теплоты. Показано, что отсутствие или наличие априорной информации об идентифицируемом источнике существенно влияет на постановку задачи. В первом случае обратная задача относится к классу внутренних, во втором – геометрических. Рассмотрен модельный пример, в котором наличие априорной информации энергетического характера позволило определить область месторасположения источника генерации теплоты.*

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* обратная задача теплопроводности, идентификация источника теплоты, априорная информация, геометрические характеристики.

---

### Введение

Помимо прямых задач математической физики, которые применяются для математического моделирования различных физических процессов, при разработке, модернизации или реконструкции энергетического оборудования, последнее время довольно часто прибегают к использованию инструментария обратных задач. Обратные задачи теплопроводности (ОЗТ), связанные с идентификацией источников теплоты, известны и востребованы уже не один десяток лет. Прежде всего это задачи оптимального проектирования, в которых за счет правильного выбора или размещения источников теплоты в исследуемом объекте обеспечивается выполнение некоторого критерия, накладываемого на температурное поле. В такой постановке рассматриваются, например, задачи проектирования разных теплонагруженных объектов, прежде всего электронных устройств в системах управления энергетическим объектом [1–4]. К данной группе относятся и задачи, встречающиеся при разработке систем термостабилизации, когда за счёт изме-

© А.О.КОСТИКОВ, 2014

нения размеров и выделяемой тепловой мощности необходимо обеспечить приближение получаемого температурного поля к заданному.

Задачи компоновки устройств, в которых в качестве источников теплоты выступают их тепловыделяющие элементы известной конструкции, связаны с размещением тепловых источников известной тепловой мощности. В качестве критерия оптимальности здесь, как правило, выступает требование минимизации температуры объекта. На сегодняшний день задачи оптимального размещения источников успешно решаются как в двухмерной, так и трехмерной постановке. В качестве примеров можно упомянуть работы [5–9]. При размещении источников в произвольных местах применяются, как правило, традиционные методы минимизации целевого функционала ОЗТ. Задачи назначения источников на фиксированные места сводятся к задачам дискретной оптимизации. Поскольку сами тепловые источники рассматриваются либо точечными, либо вполне определенной геометрической формы (как правило, прямоугольной), решение этих задач не требует применения таких сложных математических инструментариев для

описания геометрии, как, например, в случае задач идентификации границы объекта.

В последние годы получили развитие и методы идентификации положения источников теплоты на основании результатов термометрирования, что, помимо прочего, позволяет производить диагностику различного теплонагруженного оборудования, в том числе и энергетического. При этом следует отметить, что если источник занимает всю рассматриваемую расчётную область, то такая ОЗТ относится к так называемым внутренним (согласно классификации [10]) или коэффициентным (согласно классификации [11]). Если же источник заведомо меньше рассматриваемого объекта, то помимо идентификации удельной мощности необходимо вести речь и об определении его геометрических характеристик, то есть рассматривать комбинированную ОЗТ.

Поскольку тепловой источник в задаче теплопроводности однозначно описывается свободным членом уравнения теплопроводности, то задача по его идентификации заключается в определении функциональной зависимости этого свободного члена от пространственных и временной координат. Методы решения внутренних (коэффициентных) ОЗТ по идентификации теплового источника хорошо проработаны и достаточно полно освещены в соответствующей литературе (см., например, монографии [10, 12, 13]). Поэтому подробно останавливаться на таких задачах мы не будем.

Среди комбинированных ОЗТ по идентификации внутреннего источника теплоты можно выделить следующие. В работах [14, 15] по результатам измерений температуры на границе двумерной области определяются две координаты и мощность точечного источника, положение которого изменяется с течением времени. Нестационарная задача идентификации движущегося линейного источника теплоты рассматривается в [16, 17]. В работах [18, 19] решаются одномерные, двумерные и трехмерные комбинированные ОЗТ в стационарной постановке для идентификации очагов самовозгорания растительного сырья. Здесь авторы заранее задаются формой источника (прямоугольный, цилиндрический) и определяют несколько скалярных параметров, характеризующих его положение и размеры. Довольно много ОЗТ по идентификации местоположе-

ния источников теплоты связаны с исследованиями процессов сварки. При этом в математической модели тепловой источник представляет собой небольшое круглое пятно, соответствующее области расплава, а идентифицируются его положение и размер [20–23].

Таким образом, комбинированные задачи по идентификации источника теплоты рассматриваются преимущественно в постановке, когда его форма известна и определяется одна или несколько геометрических скалярных величин. Вместе с тем во многих прикладных задачах идентифицируемый источник может иметь произвольную, заранее неизвестную форму. Таким образом, исследования, направленные на дальнейшее развитие методологии решения рассматриваемых комбинированных задач, являются актуальными. Целью данной статьи является изучение влияния априорной информации об источнике на постановку и решение задачи его идентификации.

#### Постановка задачи идентификации источника теплоты

Явление теплопереноса в объекте с источниками теплоты описывается уравнением теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = q_V, \quad (1)$$

начальным

$$T|_{\tau=0} = T_0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$BT|_{\Gamma} = \mu. \quad (3)$$

Здесь  $T = T(\tau, x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \Omega$ ,  $\tau > 0$ ) – температурное поле рассматриваемого объекта;  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  – его теплоемкость, плотность и теплопроводность;  $q_V = q_V(\tau, x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \Omega$ ,  $\tau > 0$ ) – удельная мощность тепловыделения внутренних источников теплоты;  $T_0 = T_0(x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \Omega$ ) – начальное распределение температуры;  $B$  – оператор граничных условий;  $\mu = \mu(\tau, x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \Gamma$ ,  $\tau > 0$ ) – свободный член в граничных условиях;  $\Omega$  – пространственная область, занимаемая рассматриваемым объектом;  $\Gamma$  – её граница.

В рассматриваемой ОЗТ искомой является функциональная зависимость  $q_V(\tau, x, y, z)$ . В качестве дополнительных исходных данных

выступают результаты измерений  $T_{ik}^*$  в конечном числе точек измерения  $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , в конечном числе моментов времени  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Отметим, что все наши дальнейшие рассуждения справедливы и в стационарном случае, когда нестационарный член уравнения (1) и начальное условие (2) отсутствуют, с той лишь разницей, что во всех функциональных зависимостях исключается переменная времени  $t$ .

Если данную ОЗТ рассматривать в экстремальной постановке, то она сводится к минимизации целевого функционала, в качестве которого можно рассматривать невязку между измеренными и рассчитанными согласно модели (1)–(3) температурами:

$$J(q_V) = \left( \frac{1}{N \cdot M} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N (T_{ik}^* - T(\tau_k, x_i, y_i, z_i))^2 \right)^{1/2} \rightarrow \min.$$

В случае, если тепловой источник занимает весь рассматриваемый объект, то функция  $q_V$  отлична от 0 во всех точках области  $\Omega$ . Если же размеры источника меньше объекта, то он занимает некоторую подобласть  $\Omega_n$ , вне которой  $q_V \equiv 0$ , то есть  $\Omega_n$  – носитель функции  $q_V$ . Отметим, что в общем случае носитель  $\Omega_n$  может не являться односвязной областью (например, источник может иметь форму кольца или иной фигуры, содержащей подобласть без тепловыделения). Он также может состоять из нескольких обособленных подобластей, что соответствует наличию двух или более источников теплоты, разнесённых в объекте. Помимо источника теплоты в рассматриваемом объекте могут быть и стоки теплоты, то есть функция  $q_V$  может принимать отрицательные значения в пределах своего носителя.

Будем считать, что идентифицируется неподвижный источник. Иными словами, даже если рассматривается нестационарная задача, то носитель  $\Omega_n$  функции  $q_V$  остаётся неизменным во времени.

### Влияние априорной информации на постановку задачи идентификации источника теплоты

В подавляющем большинстве случаев решение ОЗТ является приближенным, в силу того, что используются приближенные методы минимизации целевого функционала. Кроме того, в случае некорректной постановки ОЗТ стремление получить как можно более точное решение приводит к его неустойчивости, и приходится применять регуляризирующие процедуры, которые являются причиной возникновения дополнительных погрешностей. Погрешности измерений исходных данных и погрешности вычислений на компьютере также являются факторами, снижающими точность получаемого решения. К возникновению методической погрешности в решении, как правило, приводит параметризация искомой функциональной зависимости  $q_V$ , поскольку она сужает класс функций, на котором отыскивается решение.

Из всего сказанного выше можно сделать вывод о том, что при идентификации удельной мощности тепловыделения она находится с некоторой погрешностью. Введём следующие обозначения:  $q_V^T$  – точное решение рассматриваемой ОЗТ,  $q_V^n$  – приближённое решение, найденное в результате идентификации источника.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} q_V^T(\tau, x, y, z) &\neq 0 \text{ при } (x, y, z) \in \Omega_n, \\ q_V^T(\tau, x, y, z) &= 0 \text{ при } (x, y, z) \notin \Omega_n, \end{aligned}$$

а для функции  $q_V^n$  аналогичные соотношения выполняются для другой области  $\Omega_n \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} q_V^n(\tau, x, y, z) &\neq 0 \text{ при } (x, y, z) \in \Omega_n, \\ q_V^n(\tau, x, y, z) &= 0 \text{ при } (x, y, z) \notin \Omega_n. \end{aligned}$$

Отметим также, что на практике  $\Omega_n$ , как правило, совпадает со всей расчётной областью  $\Omega$ .

Если идентификация удельной мощности источника проведена с достаточно высокой точностью, то отклонение между ее точным и приближенным значением невелико, а следовательно

$$q_V^n(\tau, x, y, z) \approx 0 \text{ при } (x, y, z) \notin \Omega_n$$

или, по крайней мере, соотношение  $q_V^{\Pi}(\tau, x, y, z) \approx 0$  будет выполняться на некотором удалении от  $\Omega_{\Pi}$ . Тем не менее, для того, чтобы в конечном итоге можно было вести речь об определении подобласти  $\Omega_{\Pi}$ , необходимо задаться какой-то положительной величиной  $q_{min}$ , что позволит приближенно найти  $\Omega_{\Pi}$  следующим образом:

$$\Omega_{\Pi}^{\Pi} = \{(x, y, z) : |q_V^{\Pi}(\tau, x, y, z)| > q_{min}\}.$$

При этом  $q_{min}$  должно быть заведомо больше погрешности определения  $q_V^{\Pi}$ , так как в противном случае части подобласти, где  $q_V^{\Pi}(\tau, x, y, z) \approx 0$ , войдут в  $\Omega_{\Pi}^{\Pi}$ .

Фактически величина  $q_{min}$  является дополнительным исходным данным, а неравенство

$$|q_V(\tau, x, y, z)| > q_{min} \quad (4)$$

— дополнительным условием задачи.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при отсутствии априорной информации об искомом источнике теплоты идентифицировать область  $\Omega_{\Pi}$  не представляется возможным, и рассматриваемую задачу можно решать только как внутреннюю (коэффициентную).

Помимо соотношения (4) в качестве априорной информации об источнике можно рассмотреть и другие условия.

Например, если известно, что область  $\Omega_{\Pi}$  является односвязной, то можно параметризовать уравнение её границы и одновременно с параметрами, определяющими функцию  $q_V$ , искать и параметры границы области  $\Omega_{\Pi}$ . Изначальное задание формы идентифицируемой подобласти, занимаемой источником, как уже отмечалось во введении, также используется при решении подобных задач.

В качестве априорной информации могут выступать не только информация о геометрии области  $\Omega_{\Pi}$ , а и некоторые данные о мощности тепловыделения. Фактически, условие (4) является энергетической, а не геометрической априорной информацией. Можно также изначально задаться суммарной мощностью тепловыделения (например, рассчитать её по резуль-

татам измерения теплоотдачи на поверхности всего рассматриваемого тела) или предположить, что мощность тепловыделения источника равномерно распределена в его пределах (в этом случае  $q_V(\tau, x, y, z) \equiv \text{const}$  при  $(x, y, z) \in \Omega_{\Pi}$ ) и т. п.

### Численный пример

В качестве иллюстрации изложенных выше рассуждений рассмотрим модельную одномерную стационарную задачу теплопроводности на отрезке  $0 < x < 1$ .

Источниковый член  $q_V(x)$  идентифицировался в виде линейной комбинации известных базисных функций  $\varphi_k(x)$  с неизвестными коэффициентами  $a_k$ :

$$q_V(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (5)$$

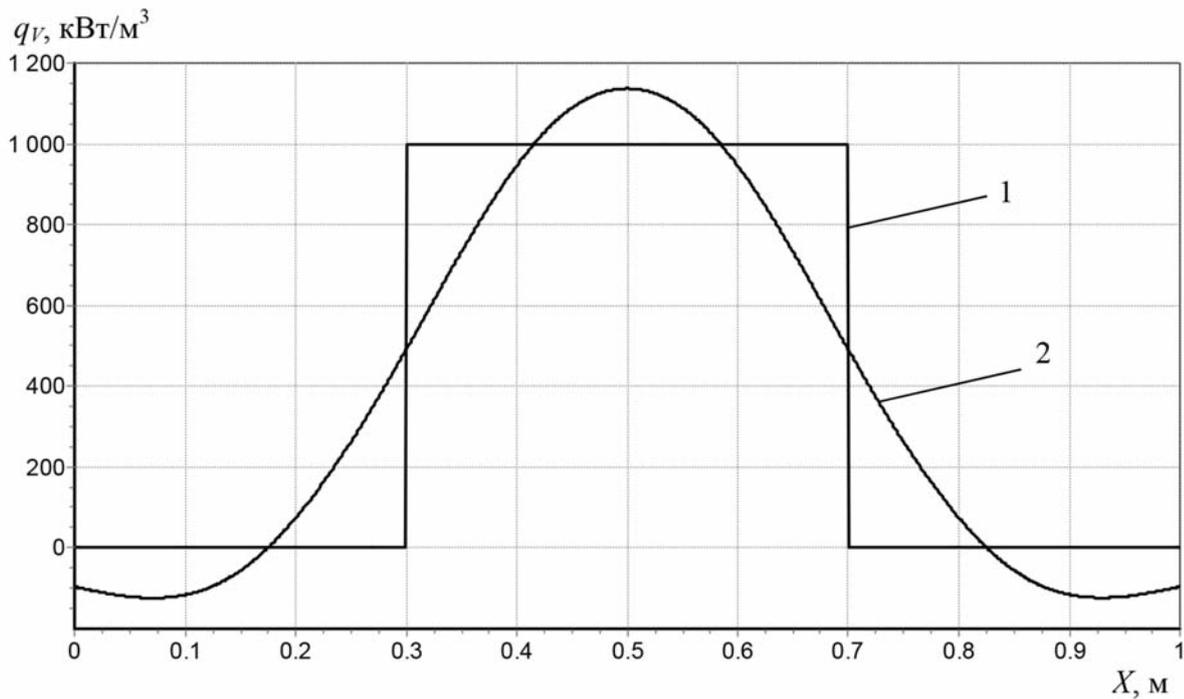
В качестве базисных функций использовались кубические В-сплайны, а температурные «измерения», задаваемые как исходные данные ОЗТ, получались путём решения прямой задачи теплопроводности с источником, равномерно распределённым на отрезке  $0,3 < x < 0,7$ .

На рис. 1 представлены результаты идентификации удельной мощности тепловыделения с использованием 10 базисных функций в случае отсутствия априорной информации об идентифицируемом источнике. На рис. 2 изображены результаты идентификации при условии, что носитель функции  $q_V(x)$  является связанной областью, то есть представляет собой отрезок  $a < x < b$ , координаты начала и конца которого необходимо идентифицировать как и коэффициенты зависимости (5).

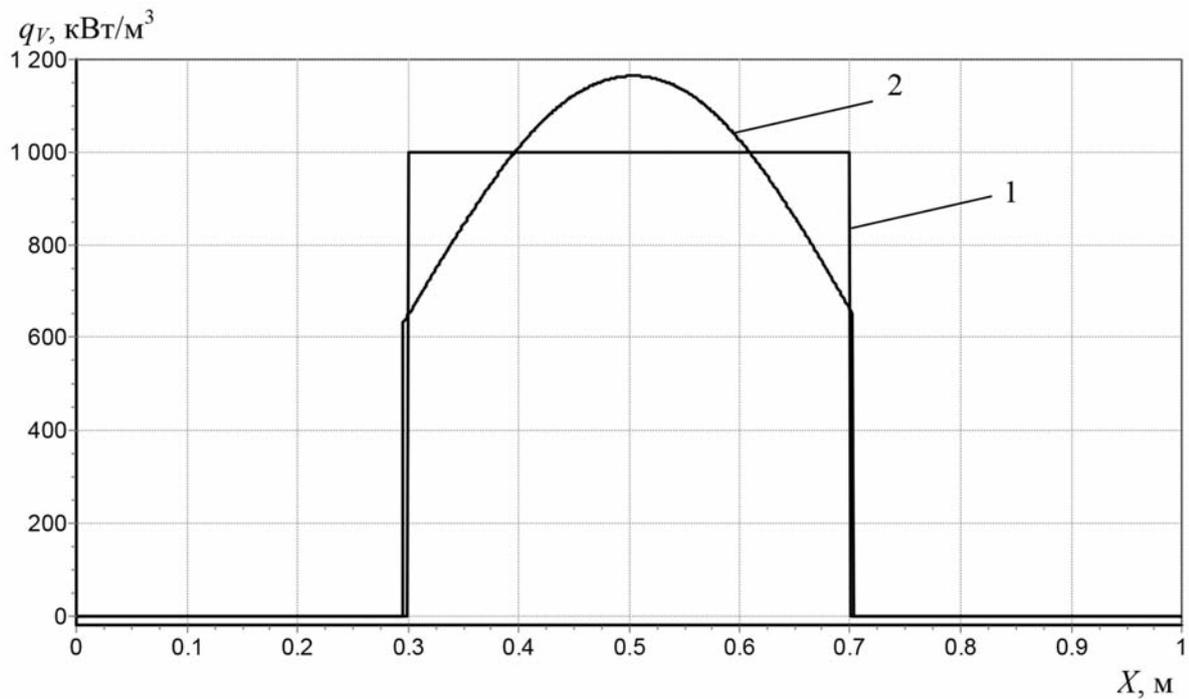
Как видно из рисунков, в первом случае отсутствие априорной информации привело к тому, что область расположения источника определить не представляется возможным. Во втором случае, при наличии априорной информации, идентификация месторасположения источника проведена с приемлемой точностью.

### Заключение

Рассмотрена ОЗТ идентификации источника теплоты на основании результатов термометрирования. Показано, что в случае отсутствия априорной информации об идентифицируемом источнике ОЗТ является внутрен-



**Рис. 1.** Идентификация источника при отсутствии априорной информации:  
1 – истинные значения  $q_V(x)$ ; 2 – значения  $q_V(x)$ , найденные в результате идентификации



**Рис. 2.** Идентификация источника при наличии априорной информации:  
1 – истинные значения  $q_V(x)$ ; 2 – значения  $q_V(x)$ , найденные в результате идентификации

ней (коэффициентной). При наличии априорной информации об источнике (причём неважно, какого характера эта информация – геометрическая или энергетическая) можно вести речь об одновременной идентификации его местоположения и мощности тепловыделения.

1. Дульнев Г.Н. Тепловые режимы радиоэлектронной аппаратуры / Г. Н. Дульнев, Н. Н. Тарновский. – Л.: Энергетика, 1971. – 248 с.
2. Автоматизация теплового проектирования микроэлектронных устройств средствами САПР / В. А. Коваль, Д. Ф. Федасюк, В. В. Маслов, В. Ф. Тарновский. – Львов: Вища школа, 1988. – 256 с.
3. Роткоп Л.Л. Обеспечение тепловых режимов при конструировании радиоэлектронной аппаратуры / Л.Л. Роткоп, Ю.Е. Спокойный. – М.: Советское радио, 1976. – 232 с.
4. Федасюк Д.В. Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Видавництво Державного університету «Львівська політехніка», 1999. – 228 с.
5. Бартман А.Б. Решение обратной задачи по расположению тепловых источников и стоков на плоскости / А.Б. Бартман // Инж.-физ. журн. – 1985. – 49, № 6. – С. 940–943.
6. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин. – Киев: Наук. думка, 1988. – 192 с.
7. Cahlon B. Optimal placement of heat sources on a rectangular grid / B. Cahlon, I.E. Schochetman, M. Shillor // Mathematics and Computers in Simulation. – 1992. – № 34. – P. 351–364.
8. Da Silva A.K. Optimal distribution of discrete heat sources on a plate with laminar forced convection / A.K. da Silva, S. Lorente, A. Bejan. // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2004. – № 47. – P. 2139–2148.
9. Мацевитый Ю.М. Геометрические обратные задачи теплопроводности: последовательное размещение тепловых источников / Ю.М. Мацевитый, Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин, А.О. Костиков // Электронное моделирование. – 2002. – 24,

№ 2. – С. 99–105.

10. Matsevity Yu.M. Inverse Heat Conduction Problems in 2 volumes. / Yu.M. Matsevity. – Kyiv: Naukova Dumka, 2008. – Vol. 1. Methodology. – 428 p.
11. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем / О.М. Алифанов, П.Н. Вабищевич, В.В. Михайлов и др. – М.: Логос, 2001. – 400 с.
12. Alifanov O.M. Extreme Methods for Solving Ill-posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems / O.M. Alifanov, E.A. Artyukhin, S.V. Rumyantsev. – New York: Begell House, 1995. – p.
13. Beck J.V. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems / J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St. Clair Jr. – New York: John Wiley & Sons. – 308 p.
14. Abou Khachfe R. Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two dimensional heat flow – numerical and experimental study / R. Abou Khachfe, Y. Jarny // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2001. – 44. P. 1309–1322.
15. Abou Khachfe R. Estimation of heat Sources within two dimensional shaped bodies / R. Abou Khachfe, Y. Jarny // Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Port Ludlow, Washington, June 13-18, 1999, (Ed. Keith Woodbury). – P. 309–316.
16. Le Nilliot C. A method for multiple point heat sources identification in a diffusive system: application to a 2D experiment / C.Le Nilliot, F. Lefevre // 34th Nat. Heat Transfer Conf., Pittsburgh, Pennsylvania, August 20–22, 2000. – Paper NHTC2000-12025.
17. Lefevre F. Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion: Application to experimental 2D problems / F. Lefevre, C.Le Nilliot // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2002. – 45. – P. 1951–1964.
18. Криса И.А. Идентификация параметров очагов самонагрева растительного сырья в стационарном режиме / И.А. Криса, В.П. Ольшанский. – К.: Пожинформтехника, 2002. – 152 с.
19. Ольшанский В.П. Определение параметров стержневого очага кругового и квадратного сечений при стационарном самонагревании растительного сырья / В.П. Ольшанский // Вестник науки и техни-

ки. — 2002. — № 2–3. — С. 11–16.

20. *Estimation* of a source term in a two-dimensional heat transfer problem: application to an electron beam welding / J. Guo, P. Le Masson, E. Artioukhine et al. // *Inverse Problems in Sci. and Eng.* — 2006. — 14, № 1. — P. 21–38.

21. *Estimation* of heat source and thermal efficiency in GTAW process by using inverse techniques / C.V. Gonzalves, L.O. Vilarinho, A. Scotti, G. Guimarras // *J. Materials Proc. Techn.* — 2006. 172. — P. 42–51.

22. *Hsu Y.F.* An inverse finite element method for the analysis of stationary arc welding

processes / Y.F. Hsu, B. Rubinsky, K. Mahin // *J. Heat Transfer.* — 1986. — 108. — P. 734–741.

23. *Kharkin V.* Solution of inverse heat conduction problem for determining heat input, weld shape, and grain structure during laser welding / V. Kharkin, V.V. Plochikhine, H.W. Bergmann // *Sci. and Techn. Welding and Joining.* — 2002. — 7. — P. 224–231.

Надійшла до редколегії 14.11.2014