УДК 35

ЛИТВИНОВСЬКА Поліна Сергіївна,
аспірант ОРІДУ НАДУ

ДЕМ’ЯНЧУК Борис Олександрович,
д-р техн. наук

МОДЕЛЮВАННЯ КОРИСНОСТІ ТА РИЗИКУ РІШЕНЬ ЩОДО ДЕРЖАВНО-ПРИВАТНОГО ПАРТНЕРСТВА

Пропонується методика математичного моделювання тренду функції корисності та ризику, що адекватно описує виграш, втрати і рівень їх імовірностей в умовах безкомпромісної конкуренції, а також застосування методу розв’язання задачі відновлення цієї функції корисності й ризику (через випадкові перешкоди) шляхом статистичної оцінки параметрів тренду цієї функції методом максимальної правдоподібності.

Ключові слова: державно-приватне партнерство, моделювання корисності та ризику рішень, детерміновані фактори, випадкові фактори, очікувані величини, конкуренція.

Литвиновская П. С., Демьянчук Б. О. **Моделирование пользы и рисков решений относительно государственно-частного партнерства**

Предлагается методика математического моделирования тренда функции полезности и риска, которая адекватно описывает выигрыш, потери и уровни их вероятностей в условиях бескомпромиссной конкуренции, а также применения метода решения задачи восстановления этой функции полезности и риска (из-за помех случайного характера) путем статистической оценки параметров тренда функции методом максимального правдоподобия.

Ключевые слова: государственно-частное партнерство, моделирование полезности и риска решений, детерминированные факторы, случайные факторы, ожидаемые величины, конкуренция.

Lytvynovska P. S., Demyanchuk B. O. **Simulation of usefulness and risk of solutions to public-private partnerships**

The method of mathematical modeling of the trend of the usefulness function and the risk that describes gain, losses, and the level of their probabilities in the conditions of uncompromising competition, and application of this method for problem solving of the restoration of the usefulness function and risk (due to accidental obstacles) by means of statistical parameter estimation of this function trend by the method of the maximum likelihood is offered.

Key words: public-private partnerships, simulation of usefulness and risk decisions, determined factors, accidental factors, expected values, competition.

Постановка проблеми. Для соціально-економічного розвитку регіонів і країни в цілому в даний час важливою є взаємодія держави з бізнесом, де слід ураховувати наявність конкуренції та певних ризиків, наприклад на основі побудови функції корисності та ризиків, яка адекватно описує виграш та втрати в умовах конкуренції, а також на основі відновлення цієї функції (через випадкові перешкоди) шляхом статистичної оцінки параметрів її тренду.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У 2010 р. було прийнято Закон України «Про державно-приватне партнерство», у якому зазначається, що держава передає приватному сектору частину повноважень, відповідальності та ризиків щодо реалізації інвестиційних проектів [4]. Сучасні науковці, такі як С. Саркисян, П. Фишберн, Н. Мікула та ін., обґрунтовують важливість наслідків прийнятих рішень в умовах кокуренції та ризиків щодо державно-приватного партнерства, пов’язаних з величиною вкладання та отримання певних матеріальних та нематеріальних ресурсів [3; 6; 7]. У публікаціях останніх років активно досліджується прогнозування соціально-економічних процесів інвестиційної діяльності.

Корисність та ризики прийнятих рішень щодо державно-приватного партнерства завжди визначаються безліччю випадкових факторів, які складно визначити, але вони однозначно пов’язані з величиною виграшу та втрат конкурентів. Об’єктивний прогноз очікуваних величин корисності та ризику під дією як детермінованих, так і випадкових факторів можливий за умови, коли відомий

механізм, що спричиняє кінцеві результати, є постійно діючим. Як відомо, основою розв'язання задачі прогнозування, як прибутку, так і втрат, є функція корисності, що описує закономірність зміни результатів (наслідків) рішення, прийнятого у невизначених умовах. На жаль, відомі моделі оцінки корисності та ризику рішень є не завжди адекватними під час прийняття рішень в умовах безкомпромісної конкуренції [1; 2; 7].

Математичні моделювання функції корисності та ризику доцільно будувати з урахуванням безкомпромісної протидії факторів, які звичайно недостатньо враховуються, а також із використанням статистичного прогнозування параметрів цієї функції яка, на відміну від відомих [2; 5], більш адекватно враховує наявність одночасної протидії факторів, що сприяють досягненню мети протидії конкурентів, а також факторів, що перешкоджають досягненню цього результату.

Метою статті є розробка методики математичного моделювання тренду функції корисності та ризику, що адекватно описує виграш та втрати в умовах конкуренції, а також відновлення функції (через випадкові перешкоди) за умов наявності початкових даних функції, що одержані, наприклад, у процесі ділової гри чи експеримента для реалізації статистичної оцінки параметрів її тренду.

Виклад основного матеріалу. Для побудови функції корисності та ризику спочатку розглянемо допоміжну функцію – ймовірність чи ступінь f досягнення результату деякого відносно виграшу (в умовах конкуренції) заданого рівня, що дорівнює v. При цьому через антагоністичну протидію багатьох факторів ступінь недосягнення зазначеного результату дорівнює $(1-f)$.

Швидкість, тобто інтенсивність зміни ймовірності досягнення результату, що зазначений в умовах одночасної протидії різних факторів, як відомо, пропорційна добутку ймовірностей чи ступенів, що є взятим з деяким коефіцієнтом пропорційності α, який можна назвати показником різниці протидій конкурентів, і віднесена до результатів дій v, що досягаються. У розглянутій ситуації отримуємо залежність у вигляді ймовірнісного диференційного рівняння:

$$\frac{df}{dv} = \alpha f(1-f), \quad 0 < f < 1 \ \alpha > 0. \tag{1}$$

Вирішуючи (1), наприклад, за початкових умов $f(v = v_0) = 0{,}5$, тобто в ситуації, коли очікуваний успіх та свої втрати рівноймовірні, а нормована різниця успішних впливів на конкурента позитивна, тобто при $\alpha > 0$, одержимо інтегральну залежність ступінь успіху від величини виграшу v у вигляді:

$$f(v) = \{1 + \exp[-\alpha(v - v_0)]\}^{-1}. \tag{2}$$

Перетворюємо (2), так, щоб через множення f на двійку, а також через зсув f вліво по осі v на величину v_0 і вниз по осі f – на одиницю, отримана після перетворення функція f мала зміст функції корисності прийнятого рішення для $\alpha > 0$. Тоді отримуємо, що очікуваний виграш особа, що приймає рішення (ОПР), оцінює при цьому величину $v > 0$. Для $v < 0$ ця сама функція набуває змісту функції ризику прийнятого рішення, яка дорівнює $f < 0$. Таким чином, для $v < 0$ функція f є негативною, а величина v відповідає при цьому очікуваним своїм втратам.

Узагальнена функція корисності, що отримана із (2), у вигляді непарної функції від рівня виграшу і втрат, очікуваних ОПР, має вигляд гіперболічного тангенса:

$$\varphi(\alpha, v) = \left\{[1 + \exp(-\alpha(v + v_0 - v_0))]^{-1} - \frac{1}{2}\right\}2 = \frac{e^{\frac{\alpha v}{2}} - e^{\frac{\alpha v}{2}}}{e^{\frac{\alpha v}{2}} + e^{\frac{\alpha v}{2}}} = th\left(\frac{\alpha v}{2}\right). \tag{3}$$

Вона відображає залежність ступеня корисності та ризику рішення, які очікує ОПР. Аргументом функції є рівні виграшу і втрат v. Важливо підкреслити, що функція (3) відображає лише порівняння виграшу і втрати, що очікуються. Зрозуміло, залежність будується шляхом аналізу даних про конкурента та про власні можливості, у результаті об’єктивної оцінки обставин. Однак ступінь корисності та ризику рішення часто має суб’єктивний характер, тому що відображає також особистісні погляди ОПР, залишаючись непарною S-подібною функцією очікуваних виграшу та втрат. Так, якщо становлення ОПР до ситуації (до очікуваного успіху і невдачі) «рівне», то це відображається параметром функції $\alpha = 2$, що означає помірне зростання виграшу та втрат через очікувану приблизну рівність інтенсивностей взаємного впливу протидіючих сторін.

У випадку «сміливо-песимістичної» оцінки очікуваного результату це відображається параметром $\alpha = 4$. Тоді це означає, що очікується швидке зростання

втрат та виграшу через інтенсивний, але порівняний взаємний вплив. При «обережно-оптимістичному» ставленні ОПР до успіху та своїх втрат для функції (3) маємо $\alpha = 1$, що відповідає ситуації, коли ОПР вважає корисним прийняти таке рішення, що сприятиме повільному зростанню виграшу при одночасному запобіганні швидкого зростання своїх втрат.

Зазначені погляди ОПР відображаються як аналітично, так і графічно (рис. 1):

$$\varphi(\alpha, v) = \begin{cases} th(2, v) - \textit{рівне відношення ОПР до очікуваного результату бою}; \\ th(4, v) - \textit{сміливо} - \textit{песимістичне відношення ОПР}; \\ th(1, v) - \textit{обережно} - \textit{оптимістичне відношення ОПР}: \end{cases}$$

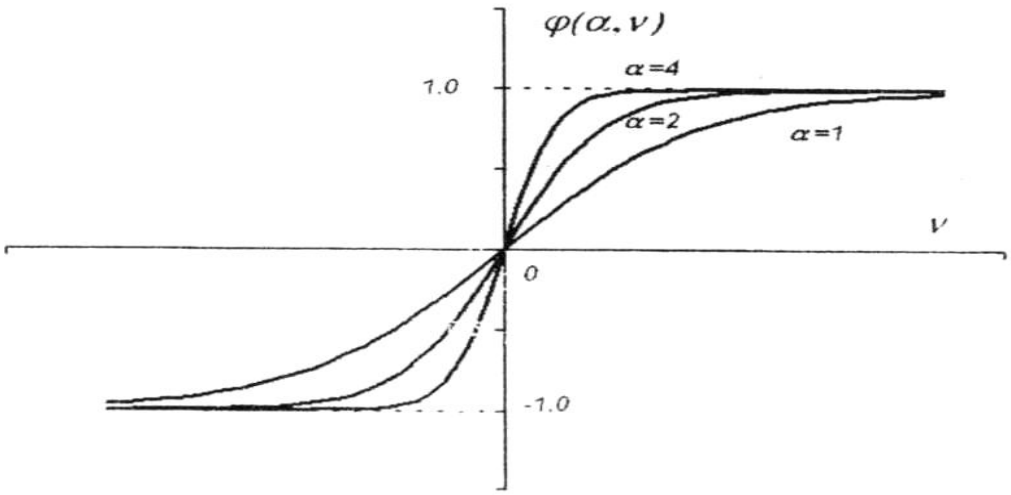

Рис. 1. Приклад непарної функції корисності та ризику

Однак функція може виявитися і функцією загального вигляду. Так, при «сміливо-оптимістичному» ставленні ОПР до очікуваних наслідків прийнятого рішення функція може мати інший вигляд (рис. 2):

$$\varphi(\alpha, v) = \begin{cases} th(3, v) & \textit{при } v > 0; \\ th(1, v) & \textit{при } v < 0. \end{cases} \tag{4}$$

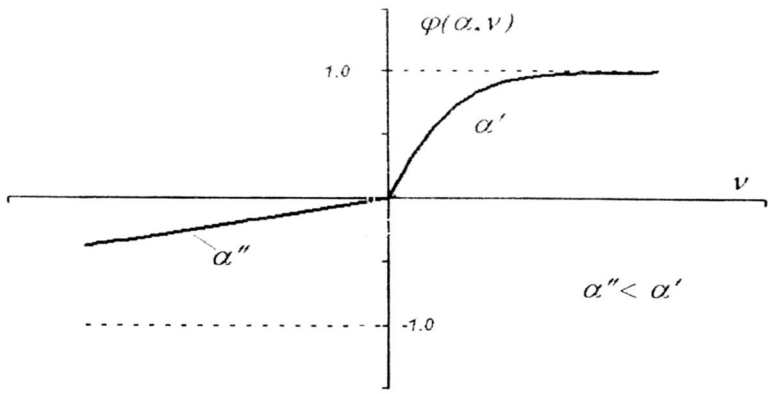

Рис. 2. Приклад функції корисності та ризику загального вигляду

З (3) та (4) видно, що у випадку, якщо нормований показник α інтенсивності впливу факторів точно відомий, наприклад, за даними оцінки обставин перед прийняттям рішення (він може бути розрахований як різниця інтенсивностей заходів, прийнятих протидіючими сторонами), значення функцій у вигляді ступеня корисності та ризику може бути розраховано для будь-якого заданого значення виграшу ($v > 0$) і програшу ($v < 0$). Оскільки значення α, наприклад, для ситуації (4) на практиці звичайно невідомі через фактори, що перешкоджають, рівні α повинні бути визначені, наприклад, методами статистичного прогнозування за сукупністю декількох дискретних значень функції корисності та ризику, узятих з урахуванням міркувань ОПР про деякі очікувані початкові значення виграшу і втрат. Ці дискретні значення функції, а також рівні, відповідні виграшу та втратам, доцільно отримувати шляхом ділової гри.

Отримані далі прогнозовані оцінки параметрів тренду функції корисності та ризику дозволяють мати прогнозовані значення ступеня, тобто функції корисності та ризику для виграшу і втрат повільного рівня, а також дозволяють визначати очікуваний рівень виграшу і втрат, коли значення функції корисності відомі.

Розв’яжемо задачу визначення параметрів функції корисності та ризику для більш загального випадку, коли ця функція є безперервною та диференційованою функцією двох параметрів і має вигляд, подібний до функції (4) (див. рис. 2), що є характерним для «сміливо-оптимістичного» ставлення ОПР до успіху і до своїх втрат.

З цією метою модифікуємо (3), тобто перетворимо непарну функцію на функцію загального вигляду шляхом її зрушення на постійну величину по двох осях координат:

$$\varphi(\alpha, v_0, v) = \frac{th\left[\frac{\alpha}{2}(v - v_0)\right] + th\left(\frac{\alpha}{2}v_0\right)}{1 + th\left(\frac{\alpha}{2}v_0\right)} = \frac{e^{\alpha v} - 1}{e^{\alpha v} + e^{\alpha v_0}}, \tag{5}$$

де α – показник різниці відносних потужностей впливу сторін, що є конкурентами;

v_0 – показник асиметрії функції корисності та ризику, що відображає ступінь оптимістичності ставлення ОПР до очікуваних наслідків прийнятого рішення (рис. 3).

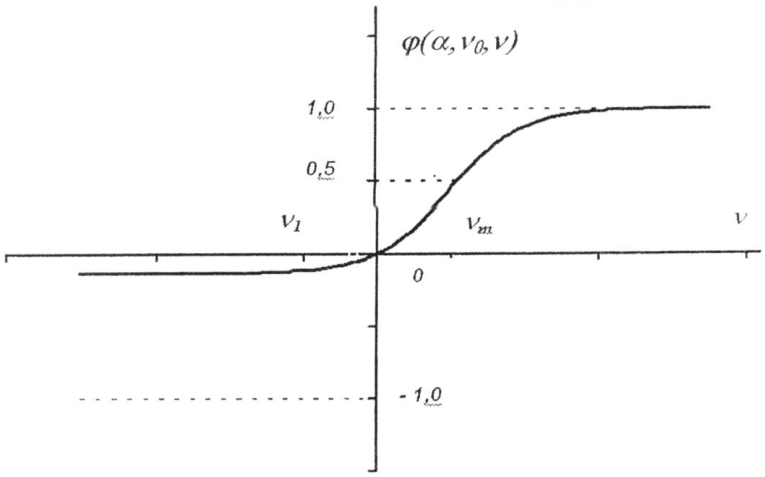

Рис. 3. Функція корисності та ризику модифікованого вигляду

Визначимо алгоритм та похибки оцінок максимальної правдоподібності параметрів функції корисності та ризику для випадку, коли діють випадкові неконтрольовані перешкоди, які викривляють залежність (5). За цих умов доцільним є статистичне визначення справжніх параметрів функції корисності та ризику з урахуванням декількох значень цієї функції, які містяться на початку кординат (див. рис. 3), тобто за малого рівня показників виграшу і ризику v.

Сумісні оцінки α і v_0, тобто параметрів функції (5) без прийняття спеціальних заходів для лінеаризації цієї функції (5), знайти неможливо. Тому знайдемо їх у два

прийоми. Спочатку за відомими дискретними значеннями $\varphi(\alpha,v_0,v_k)$, $\forall\kappa=\overline{1,m}$ знайдемо опорні значення у вигляді:

$$\alpha = \alpha^0; v_0 = v_0^0.$$

Припустимо, що відомі декілька початкових значень функції (5) і значення $\varphi_{v_1}=\varphi(\alpha,v_0, v_1)$ та $\varphi_{v_m}=\varphi(\alpha,v_0, v_m)$, що взяті на кінцях кожного з напівінтервалів. Тоді опорні значення α^0 і v_0^0 знаходимо відповідно до (5) у вигляді:

$$\alpha^0 = -\frac{1}{v_m}\ln\left[\frac{\varphi_{v_1}}{\varphi_{v_m}}(\varphi_{v_m}-1)\right]; \quad v_0^0 = v_m\frac{\ln(-\varphi_{v_1})}{\ln\left[\frac{\varphi_{v_1}}{\varphi_{v_m}}(\varphi_{v_m}-1)\right]}. \tag{6}$$

Для знаходження оптимальних оцінок параметрів α і v_0 тренду функції (5) методом максимальної правдоподібності з урахуванням їх опорних значень (6) та всіх значень на інтервалі, що відомі з похибками, уводячи позначення:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^0 + \Delta\alpha = \alpha_1 = \alpha_1^0 + \Delta\alpha_1; \\ v_0 &= v_0^0 + \Delta v = \alpha_2 = \alpha_2^0 + \Delta\alpha_2, \end{aligned} \tag{7}$$

розкладемо функцію (5) у ряд Тейлора за параметрами (α,v) в околі вектора (α^0, v_0^0), обмежившись першими членами ряду. При цьому отримаємо:

$$\varphi(v_k) = \varphi_{0,0}(v_k) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi(v_k)}{\partial\alpha_i(\alpha_{0,i})}(\alpha_i - \alpha_i^0) = \varphi_{0,0}(v_k) + \varphi_1(v_k)\Delta\alpha_1 + \varphi_2(v_k)\Delta\alpha_2, \tag{8}$$

де

$$\varphi_{0,0}(v_k) = \frac{e^{\alpha_1^0 v_k} - 1}{e^{\alpha_1^0 v_k} + e^{\alpha_1^0 \alpha_2^0}};$$

$$\varphi_{1k} = \varphi_1(v_k) = (v_k - \alpha_2)\frac{e^{\alpha_1(v_k+\alpha_2)}}{(e^{\alpha_1 v_k} + e^{\alpha_1\alpha_2})^2};$$

$$\varphi_{2k} = \varphi_2(v_k) = \alpha_1 \frac{e^{\alpha_1\alpha_2} - e^{\alpha_1(v_k+\alpha_2)}}{(e^{\alpha_1 v_k} + e^{\alpha_1\alpha_2})^2} \tag{9}$$

Для всіх $v=v_k$, $k=\overline{1,m}$ вирази типу (8) утворюють систему вигляду

$$A^T \Delta\alpha = C, \tag{10}$$

де:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1)...\varphi_1(v_m) \\ \varphi_2(v_1)...\varphi_2(v_m) \end{pmatrix}, \quad \Delta\alpha = \begin{pmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) - \varphi_{0,0}(v_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(v_m) - \varphi_{0,0}(v_m) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Перш ніж перейти до пошуку вектора оцінок $\Delta\hat{\alpha}$, знайдемо, використовуючи правило Саррюса, показник інформаційної матриці Фішера, який, згідно з (11), дорівнює:

$$\left|A^T A\right| = \sum_{k=1}^{m} \varphi_1^2(v_k) \sum_{k=1}^{m} \varphi_2^2(v_k) - \left[\sum_{k=1}^{m} \varphi_1(v_k)\varphi_2(v_k)\right]^2. \tag{12}$$

З (12), маючи на увазі (9), можна зробити висновок про те, що показник матриці $A^T A$ не дорівнює нулю, тобто під час розв’язання рівняння (10) можна отримати оцінки, які мають кінцеву дисперсію.

Візьмемо до уваги неточне описання залежності $\varphi(v)$ на інтервалі $[v_1, v_m]$. Значення вектора C містить помилку. Таким чином, маємо випадковий вектор $C+\delta$, а його реалізація має вигляд

$$y = C + \delta. \tag{13}$$

Якщо помилки опису закономірності $\varphi(v_k)$, $\forall\kappa=\overline{1,m}$ розподілені нормально з нульовим середнім значенням, то їх щільність імовірності має вигляд

$$\varphi(\delta) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left|\Pi\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\delta^T \Pi^{-1} \delta\right\}. \tag{14}$$

Функція правдоподібності параметрів $\Delta\alpha$, які підлягають оцінці, згідно з (13), (14), дорівнює:

$$\psi(\Delta\alpha \neq y) \quad (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left|\Pi\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - A\Delta\alpha)^T \Pi^{-1}(y - A\Delta\alpha)\right\}, \tag{15}$$

де $A=A(\alpha_0)$; $y=y(\Delta_{ist},\delta)$.

Для незалежних помилок нерівноточного опису закономірності зміни функції корисності та ризику $\varphi(v)$ матриця коваріацій та оборотна їй є діагональними:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_m^2 \end{pmatrix};$$

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_m \end{pmatrix}, W_\kappa = \delta_\kappa^{-2}, \tag{16}$$

де δ_k^2 – дисперсія помилки k *-го* підрахунку $\varphi(v_k)$, що дорівнює $\sigma_k^2 = M\left[\delta^2\right]$.

Рівняння правдоподібності одержується з (15) після диференціювання та дорівнювання нулю логарифма ψ:

$$(A^T \Pi^{-1} A)\Delta\hat{\alpha} = A^T \Pi^{-1} y. \tag{17}$$

Матриця $(A^T \Pi^{-1} A)^{-1}$ згідно з (11) і (16) дорівнює

$$(A^T \Pi^{-1} A)^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right)^2 \right]^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 & -\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \\ -\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} & \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Відповідно до виразів (6 – 9; 17 – 18) у результаті отримуємо пошукові оцінки параметрів функції корисності та ризику, що нормована показником виграша та втрат у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0 + \dfrac{\sum_{l=1}^{m} \left[W_1 \varphi_{1l} \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - W_1 \varphi_{2l} \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right] y_1}{\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right)^2} \\ v_0^0 + \dfrac{\sum_{l=1}^{m} \left[W_1 \varphi_{2l} \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 - W_1 \varphi_{1l} \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right] y_1}{\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right)^2} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Дисперсії цих оцінок згідно з (18) дорівнюють:

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \Bigg/ \left[\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right)^2 \right],$$

$$\sigma_{\hat{v}_0}^2 = \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 \Bigg/ \left[\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k \varphi_{1k} \varphi_{2k} \right)^2 \right] \quad (20)$$

Підставляючи оцінки (19) в (5), одержуємо результуючу очікувану закономірність, тобто залежність функції корисності та ризику від очікуваних результатів прийнятого рішення.

Висновки. Відповідно до проведеного дослідження можна зробити такі висновки:

1. За допомогою запропонованої моделі можна оцінювати, по-перше, рівень корисності та ризику при досягненні заданого рівня виграшу або втрат; по-друге, рівень очікуваних виграшів або втрат, якщо задано прийнятний рівень корисності або ризику.

2. Практичне застосування викладеного методичного інструментарію не викликає труднощів, особливо за умови застосування спеціальної комп'ютерної програми.

3. Істотно більш складною є проблема з'ясування об'єктивних початкових даних про залежність між дискретними значеннями функції корисності та ризику зі значеннями виграшу або втрат у відповідних точках за їх малих значень.

4. Похибки прогнозованих значень параметрів тренду функції корисності та ризику залежать не тільки від похибок у початкових даних, але й від тривалості інтервалу спостереження початкових значень залежності функції корисності та ризику від втрат і виграшів.

Список використаних джерел

1. **Гарлицька Д. А.** Фінансові механізми екологізації глобального розвитку / Д. А. Гарлицька. – Режим доступу : www.confcontact.com/20110225/ek8_garlic.htm.

2. **Марси Д.** Стохастическая модель для прогнозирования технологических изменений / Д. Марси // Экономика промышленности. – 1980. – № 1. – С. 22 – 27.

3. **Мікула Н.** Міжтериторіальне та транскордонне співробітництво : монографія / Н. Мікула. – Л. : ІРДНАН України, 2004. – 395 с.

4. **Про державно-приватне** партнерство : Закон України від 1 лип. 2010 р. № 2404–VI. – Режим доступу : www.president.gov.ua/documents/12134.html.

5. **Райфа Г.** Анализ решений / Г. Райфа. – М. : Наука, 1977. – 186 с.

6. **Теория** прогнозирования и принятия решений / С. А. Саркисян, В. И. Каспин, В. А. Лисичкин [и др.] ; под ред. С. А. Саркисяна. – М. : Высш. шк., 1977. – 351 с.

7. **Фишберн П.** Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. – М., 1978. – 290 с.