

Загальний опис динаміки колеса пожежної машини у феноменологічних термінах

Протиставляються один одному феноменологічний і модельний підходи до укладання опису енергоперетворення в еластичному (пневматичному, зокрема) колесі мобільної (пожежної, зокрема) машини. Еластичність колеса запропоновано моделювати у формі ефекту від дії двох узагальнених силових чинників: сили пружності, що скерована до так званого центра пружності колеса, та дисипативної сили, перпендикулярної до згаданої сили пружності. Наводяться окремі приклади можливої конкретизації загального феноменологічного опису колісного рушія. Такий підхід до моделювання може стати в нагоді у разі синтезу «віртуального пожежного автомобіля».

Ключові слова: пожежна машина, еластичне колесо, динаміка колеса, феноменологічний опис, модельний опис.

Мотивація. «Поводження колеса із шиною може бути вельми дивним, і щоби висвітлити всі його таємниці, навіть світла ньютонівської механіки не завжди вистачає. І сьогодні колесо сповнене сюрпризів та розгортає широке поле для досліджень... Складність структури й поведіння колеса із шиною такі, що дотепер ще не запропоновано теорію, яка б вирізнялася довершеністю або хоча б була задовільною. Явище кочення колеса із шиною досі кидає дослідникам виклик розробити теорію, яка б перебувала у гармонії з більшістю досвідних даних і правила б за дороговказ для інженерів. Це бажане поле для використання тих методів ідеалізації й моделювання, які є звичними у разі застосування математики до світу фізичних явищ». Це сказано ще в 1956 році [1]. Але якщо те саме висловити стосовно сьогоднішнього, то мало хто з педантичних дослідників обурився б такою «скромною» оцінкою результатів надзвичайно наполегливих, без жодного перебільшення, зусиль, зроблених дотепер у царині теорії колісного рушія.

Допоки про кочення колеса йдеться як про явище, виняткове саме по собі, трактоване в сутнісній єдності й пізнаване цілісно, доти можна вважати, що воно розглядається суто феноменно (феноменологічно*). Феноменний підхід спирається на поєднання в систему низки припущень-гіпотез та на експериментальну ідентифікацію підвладних контролю вимірювальними засобами впливових параметрів та нетривіальних співвідношень (див., приміром, [2—5]). Якщо ж загальні властивості колеса висновувати [5—8], покладаючись на поєднання елементарних модельних пружності, в'язкості, сухого тертя абощо, то йтиметься про методологію модельного відображення явища.

Феноменний метод дослідження сутнісно вельми подібний до дедуктивного**, засобами якого окремі положення логічно виводяться із загальних положень (припущень, гіпотез, аксіом, постулатів, законів). Натомість, за аналогію модельному методу може правити так званий індуктивний*** метод. Отож ознаки «дедуктивний» і «індуктивний» нічим не гірші за «феноменний» і «модельний», якщо не кращі. Навряд чи можна погодитись з думкою [4], що феноменний підхід простіший за модельний та ще й доступніший для розуміння). Застосовувати кожний з них доцільно не через те, що він має якісь переваги, а через те, що по-іншому неможливо. Поняття крипу і збочення, приміром, визріли з рутини, але стали надбанням феноменології; фрикційну взаємодію (як явище) вдається пояснити з позицій модельності...

* Якщо казати «феноменологічно», то водночас пасувало б казати «моделологічно», а якщо — «модельно», то чому б не «феноменно»!

** Дедуктивний метод (лат. *deductio*, від *deduco* — відводжу, виводжу) — метод дослідження, який полягає в переході пізнання від загального до окремого, конкретнішого; одна з форм умовиводу, коли із застосуванням певної процедури з одних істинних положень виводиться нове обов'язково істинне положення.

*** Індуктивний метод (від лат. *inductio* — наведення, збудження) — інструментарій дослідження, що спонукає від спостереження окремих фактів і явищ переходити до встановлення загальних закономірностей і законів; система логічних процесів переходу від знання про одиничне й окреме до знання про ціле й загальне.

Застосування феноменного (дедуктивного) методу — здебільшого інтелектуально напружена робота, а застосування модельного (індуктивного) методу — радше рутинна. Але не буває так, що цінний результат дається чи без інтелектуальної напруги, чи без рутини. Тому теорія колеса має у всій повноті спиратись і на феноменність (дедукцію), і на модельність (індукцію) одночасно. Але «панувати» має все ж методологія трактування колеса як феномена.

Поставмо собі за мету з'ясувати принципову можливість укладання опису руху колеса, покладаючись, перш за все, на дедуктивні засоби. Досягнення мети було б внеском в теорію колісного руху та водночас сприяло б формуванню так званого «віртуального пожежного автомобіля» [9]. А розпочати слід з укладання загальних рівнянь динаміки колеса, в яких про надто конкретні властивості колеса не йдеться.

1. Загальні рівняння руху колеса. Позначмо через 0 долівку, через 1 — колесо, через 2 — кузов (облавок) автомобіля (рис. 1). В такому разі $A_{\kappa\zeta}$ ($\kappa, \zeta = 0, 1, 2$) позначатиме певний силовий чинник A , що діє на елемент ζ з боку елемента κ . Тож рух тяжного (веденого) колеса, зумовлений прикладеною до його маточини силою X_{21} і воно (колесо) навантажує поверхню дороги силами X_{10}, Z_{10} . Кочення тягового колеса зумовлене обертовим моментом M_{21} , скерованим так само, як кутова швидкість ω обертання колеса ($M_{21}\omega > 0$). Якщо обертовий момент M_{21} скерований протилежно до напрямку кутової швидкості ω , то він і колесо є гальмівними ($M_{21}\omega < 0$). Але загалом (рис. 1) одне й те саме колесо за одних обставин може перебувати у стані тяжного колеса, а за інших бути тяговим чи гальмівним.

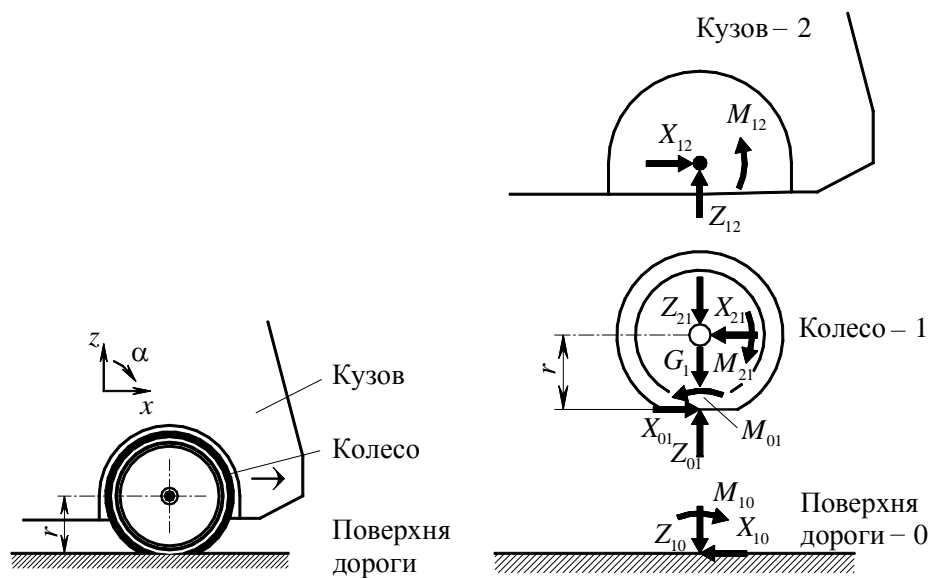


Рис. 1. Сили й моменти, що діють на кузов автомобіля, колесо, дорогу

Вважатимемо, що центр мас колеса розташований на осі його обертання, а рухається колесо поступом у напрямі координатної осі x ; кут, на який воно обернеться до часової миті t , позначмо через α . При поділі системи «повіз (кузов, облавок) — колесо — долівка (підложжя, дорога)» на окремі складові, див. рис. 1, взаємовплив цих складових відобразимо, як зазвичай, реакційними силами та моментами. Тож величини X_{01}, Z_{01}, M_{01} позначають, як умовлено, дію на колесо дороги (це реакції дороги на дію колеса), а X_{10}, Z_{10}, M_{10} — дія на дорогу з боку колеса; X_{21}, Z_{21}, M_{21} — це дія на колесо з боку кузова, а X_{12}, Z_{12}, M_{12} — дія на кузов з боку колеса. Нерівномірний розподіл тиску на поверхні дороги, спостережуваний в сліді шини при коченні колеса, можна врахувати, вводячи в описові рівняння саме момент сил M_{10} . Відповідно, на колесо має діяти реактивний момент M_{01} .

Позначаючи масу й момент інерції колеса через m_k і I_k , силу ваги колеса — через G , рух колеса можна описати системою рівнянь

$$m_k \frac{d^2 x}{dt^2} = m_k \ddot{x} = m_k \frac{dv}{dt} = m_k \dot{v} = X_{01} - X_{21}; \quad (1)$$

$$m_k \frac{d^2 z}{dt^2} = m_k \ddot{z} = Z_{01} - (Z_{21} + G); \quad (2)$$

$$I_k \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = I_k \ddot{\alpha} = I_k \dot{\omega} = M_{21} - X_{01} r - M_{01}. \quad (3)$$

Звісно, для того, аби опис (1)—(3) став справді конкретним, до нього доведеться долучити ще багато додаткової інформації. Зокрема, модель кочення колеса принципово залежна від того, на які властивості долівки і автомобіля доводиться зважати. Можна, приміром, припустити, що долівка цілком жорстка й горизонтальна. Це суттєва конкретизація моделі явища кочення колеса. Але ще потрібно вирішити, як формально відображати в моделі фрикційні ефекти, що виникають в контактні колеса з долівкою. Не відомо, як слід розуміти радіус r колеса. Отож рівноцінних за рівнем адекватності та конкретності моделей можна, мабуть, синтезувати безліч. А ще й саме колесо можна бачити по-різному.

2. Модель колеса. Звернімося до схеми, наведеної на рис. 2: колесо котиться твердою горизонтальною долівкою. Маточину колеса з центром O_k вважатимемо невагомою (безінерційною). Точка O_b на схемі відображає умовний центр біжника, який можна вважати центром пружності. Саме до нього спрямована сила F_p пружності кістяка колеса, що діє на маточину; саме там розташовувався центр маточини перед навантаженням колеса. Вважатимемо, що цей умовний центр є ще й центром мас біжника (і колеса, оскільки маточина невагома). Цього разу $r_0 = r_d + e_z + a_z$, де r_0 — радіус колеса у вільному стані, r_d — динамічний радіус, e_z — вертикальне зміщення маточини відносно центра біжника, a_z — вертикальне спотворення біжника в контактні з долівкою — глибина сплюснення колеса.

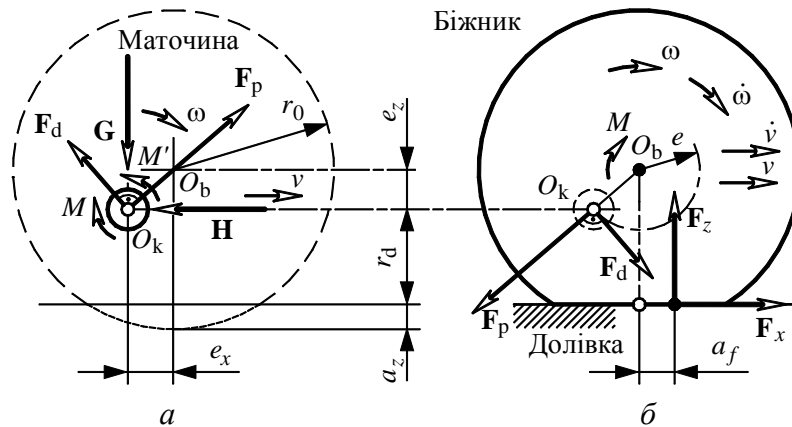


Рис. 2. Схема силової взаємодії в системі «маточина — біжник — долівка»

Поряд з силою пружності F_p передбачмо й силу F_d дисипативної взаємодії маточини й біжника [9], яку слід скерувати перпендикулярно до F_p (у разі ідеального колеса $F_d \equiv 0$). Вважатимемо, що F_d зосереджена саме в O_k , а тому не провокує ще якогось там дисипативного моменту. В такому разі можна вважати, що на маточині склались умови ($M = M_{21}$)

$$F_p \frac{e_x}{e} - H - F_d \frac{e_z}{e} = 0, \quad F_p \frac{e_z}{e} - G + F_d \frac{e_x}{e} = 0, \quad M - M' = 0, \quad (4)$$

де $M' = M_{12}$ — реакційний момент з боку кістяка біжника, G — навантаження на колесо (разом з вагою самого колеса).

Водночас взаємодія біжника з маточиною і долівкою підпадатиме під умови (див. рис. 2б; зважмо й на (4))

$$F_x - H = m_k \dot{v}_x = m_k \dot{v}, \quad F_z - G = m_k \dot{v}_z, \quad M - F_x(r_d + e_z) - F_z a_f - F_d e = I_k \dot{\omega}, \quad (5)$$

де \dot{v}_x і \dot{v}_z — швидкості біжника у горизонтальному і вертикальному напрямках, $\dot{v} = dv/dt$, $\dot{\omega} = d\omega/dt$.

3. Основні співвідношення. У рівняннях (4) і (5) фігурують величини e_x , e_z ($e_x^2 + e_z^2 = e^2$), F_p , F_d , r_d , a_f , що залежать від властивостей біжника та режиму кочення колеса. Їх обов'язково доведеться якось змістовно доозначувати. Натомість, величини G , H , v є сенс вважати заданими (відомими).

Вирази (4) можна прочитати у вигляді

$$F_p = \frac{e_x}{e} H + \frac{e_z}{e} G, \quad F_d = -\frac{e_z}{e} H + \frac{e_x}{e} G,$$

а можна — у вигляді

$$\frac{e_x}{e} = \frac{F_p H + F_d G}{F_p^2 + F_d^2} = \frac{F_p H + F_d G}{H^2 + G^2}, \quad \frac{e_z}{e} = \frac{F_p G - F_d H}{F_p^2 + F_d^2} = \frac{F_p G - F_d H}{H^2 + G^2},$$

бо

$$\left(\frac{e_x}{e}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{e}\right)^2 = \frac{H^2 + G^2}{F_p^2 + F_d^2} = 1.$$

Сила F_x (відповідник силі X_{01} , див. рис. 1) — це прояв взаємодії біжника й долівки через сухе (чи в'язке — у разі аквапланування) тертя:

$$F_x = \varphi_x(s, \dots) F_z \quad (\text{чи } F_x = v_x(v, \dots) v F_z),$$

де $\varphi_x(s, \dots)$ — коефіцієнт (подовжнього) зчеплення, залежний від коефіцієнта (подовжнього) ковзання s та, можливо, інших чинників ($v_x(v, \dots)$ — коефіцієнт в'язкості, залежний від швидкості v колеса та, можливо, інших чинників). У разі ізотропних зчіпних властивостей черпати інформацію про залежність $\varphi_x(s, \dots)$ можна, приміром з фрикційної характеристики штибу наведеної на рис. 3 (β — кут збочення колеса, φ — загальний коефіцієнт зчеплення; про явище збочення тут не йдеться).

Дисипативні ефекти якось інтегровані в прояві момента M_{df} опору коченню, визначуваному за формулою

$$M_{df} = F_z a_f = k_\omega(\omega, \dots) \omega,$$

де $k_\omega(\omega, \dots)$ — залежний від швидкості ω обертання колеса та, можливо, від багато чого іншого коефіцієнт в'язкості. Вважатимемо також, що сила F_z містить в собі і пружну, і в'язку складові:

$$F_z = c_a(a_z, \dots) a_z + k_a(\omega, \dots) \omega,$$

де $c_a(a_z, \dots)$ — залежний від глибини сплюснення $a_z = r_0 - r_d - e_z$ колеса та, можливо, від багато чого іншого коефіцієнт пружності периферії бiжника — бiжниці; $k_a(\omega, \dots)$ — подібна до $k_\omega(\omega, \dots)$ величина. Так само можна описати прояв пружності й в'язкості в серцевині бiжника:

$$F_p = c(e, \dots)e, \quad F_d = k(e, \omega, \dots)\omega,$$

де $c(e, \dots)$ і $k(e, \omega, \dots)$ — коефіцієнти пружності і в'язкості.

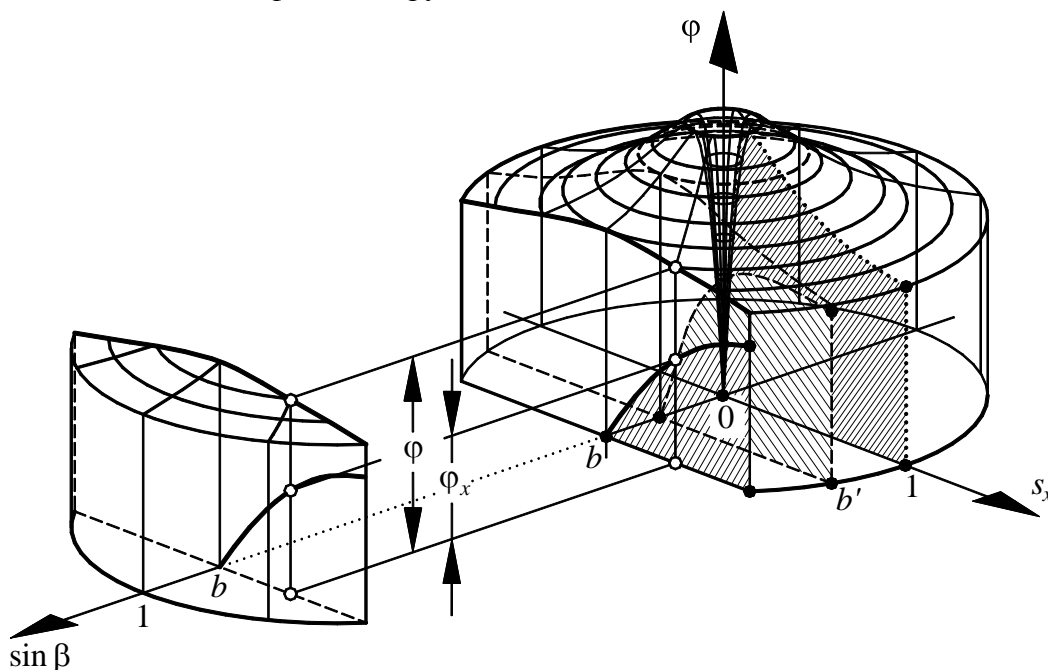


Рис. 3. Характеристика ізотропних зчпних властивостей колеса

По-різному ідентифікуючи окреслену множину характеристик колеса $\varphi_x(s, \dots)$, $v_x(v, \dots)$, $k_\omega(\omega, \dots)$, $c_a(a_f, \dots)$, $k_a(\omega, \dots)$, $c(e, \dots)$, $k(e, \omega, \dots)$, ..., можна синтезувати найрізноманітніші моделі явища кочення колеса. Найпримітивніша модель впливає у разі нехтування інерційністю колеса (коли можна вважати, що $m_k = 0$, $I_k = 0$) та покладання $\varphi_x(s, \dots) = \varphi_x(s)$ (див., рис. 3), $v_x(v, \dots) = \text{const}$, $k_\omega(\omega, \dots) = \text{const}$, $c_a(a_f, \dots) = \text{const}$, $k_a(\omega, \dots) = \text{const}$, $c(e, \dots) = \text{const}$, $k(e, \omega, \dots) = \text{const}$. До цього ж, і $r_d + e_z + a_z = r_0 = \text{const}$. У такому разі можна висувати таку низку співвідношень

$$F_x = H, \quad F_z = G, \quad e^2 = \frac{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}{c^2},$$

$$e_x = \frac{H(H^2 + G^2 - k^2\omega^2) + k\omega G\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}}{c(H^2 + G^2)},$$

$$e_z = \frac{G(H^2 + G^2 - k^2\omega^2) - k\omega H\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}}{c(H^2 + G^2)},$$

$$r_d = r_0 - \frac{G - k_a\omega}{c_a} - \frac{G(H^2 + G^2 - k^2\omega^2) - k\omega H\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}}{c(H^2 + G^2)},$$

$$\frac{H}{G} = \varphi_x(s), \quad s = \frac{r_{k0}\omega - v}{r_{k0}\omega}, \quad a_f = \frac{k_\omega\omega}{G},$$

$$M - H\left(r_0 - \frac{G - k_a\omega}{c_a}\right) - \omega\left(k_\omega + \frac{k}{c}\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}\right) = 0,$$

де s — коефіцієнт проковзування, r_{k0} — радіус кочення колеса у вільному режимі. Звісно, $r_k \rightarrow r_{k0}$, $\omega \rightarrow v/r_{k0}$, $s \rightarrow 0$ у разі $H \rightarrow 0$ — це умови переходу колеса у вільний режим кочення.

Втрати потужності в колесі можна визначати за формулою

$$P_f = M\omega - Hv = \omega H\left(r_0 - \frac{G - k_a\omega}{c_a}\right) - Hv + \omega^2\left(k_\omega + \frac{k}{c}\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}\right).$$

Легко знайти й так зване дисипативне плече опору коченню

$$a_{df} = \frac{P_f}{G\omega} = \frac{H}{G}\left(r_0 - \frac{G - k_a\omega}{c_a} - \frac{v}{\omega}\right) + \frac{\omega}{G}\left(k_\omega + \frac{k}{c}\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}\right) \quad (6)$$

та коефіцієнт опору коченню

$$f_k = \frac{P_f}{Gv} = \frac{H}{G}\left(\frac{\omega}{v}\left(r_0 - \frac{G - k_a\omega}{c_a}\right) - 1\right) + \frac{\omega^2}{Gv}\left(k_\omega + \frac{k}{c}\sqrt{H^2 + G^2 - k^2\omega^2}\right). \quad (7)$$

Величини (6) і (7) є цілком абстрактними, але такими, яким штучно надано фізичний сенс плеча (рамена) сили і питомої сили. Між ними існує вельми цікавий (хоча й очевидний) зв'язок

$$f_k = a_{df} \frac{\omega}{v} = \frac{a_{df}}{r_k} = \frac{a_{df}}{(1-s)r_{k0}}.$$

Відповідно до вибудованої моделі серцевина біжника цілком губить еластичність за деякої критичної швидкості обертання колеса

$$\omega = \omega_{kr} = \frac{\sqrt{H^2 + G^2}}{k}.$$

В цьому разі модель «каже», що

$$e = e_x = e_z = 0, \quad r_d = r_0 - \frac{G}{c_a}\left(1 - \frac{k_a}{k}\sqrt{\left(\frac{H}{G}\right)^2 + 1}\right),$$

$$\frac{H}{G} = \varphi_x(s), \quad s = \frac{r_{k0}\omega_{kr} - v}{r_{k0}\omega_{kr}} = 1 - \frac{kv}{r_{k0}\sqrt{H^2 + G^2}}, \quad a_f = \frac{k_\omega}{k}\sqrt{\left(\frac{H}{G}\right)^2 + 1},$$

$$M = Hr_d + Ga_f = H\left(r_0 - \frac{G}{c_a}\right) + \left(H\frac{k_a}{c_a} + k_\omega\right)\frac{\sqrt{H^2 + G^2}}{k},$$

$$f_k = \frac{H}{G}\left(\frac{1}{v}\frac{\sqrt{H^2 + G^2}}{k}\left(r_0 - \frac{G}{c_a} + \frac{k_a}{c_a}\frac{\sqrt{H^2 + G^2}}{k}\right) - 1\right) + \frac{k_\omega}{Gv}\frac{H^2 + G^2}{k^2}.$$

При цьому

$$a_{df} = \frac{H}{G}(r_d - r_k) + a_f.$$

Отож хіба що в разі $r_d = r_k$ справджується рівність $a_{df} = a_f$ і абстрактне збігається з фізично змістовним.

Калібрувати описану модель явища кочення колеса доречно, звісно, вдаючись також до не надто складної додаткової емпіричної інформації. Зокрема, можна згадати, що між обертовим моментом M і радіусом кочення r_k існує в певних межах лінійна взаємозумовленість (див., приміром, [6]).

Резюме. Мета з'ясувати можливість укладання математичного опису руху еластичного колеса, покладаючись, перш за все, на дедуктивні (феноменологічні) засоби, тобто спираючись на поєднання в струнку систему низки правдоподібних припущень-гіпотез та експериментально ідентифікованих нетривіальних співвідношень між впливовими параметрами, виявилася цілком досяжною. Найважче математично формалізувати, звісно, прояв еластичності колеса, під якою є сенс розуміти гармонійне поєднання пружності та дисипативності, саме завдяки чому колісний рушій і набув такого широкого застосування в мобільній техніці. З'ясувалось, що еластичність колісного рушія вдається змоделювати у формі інтегрованого ефекту від дії двох узагальнених силових чинників: сили пружності, що скерована у так званий центр пружності колеса, та дисипативної сили, перпендикулярної до згаданої сили пружності. Ці узагальнені пружну й дисипативну сили можна задавати у різний спосіб залежно від того, які акценти доречно зробити негайно, а які угайно (в процесі конкретизації моделі). А загалом в межах запропонованої моделі залишається вельми багато свободи, аби зробити будь-які на будь-чий розсуд головні наголоси щодо особливих експлуатаційних властивостей еластичного колеса. Та й способи конкретизації моделі можуть бути найрізноманітнішими.

Список літератури:

1. **Temple G.** The dynamics of the pneumatic tyre // Endeavour.— 1956.— Oct.— P. 200—205.
2. **Mitschke M.** Dynamik der Kraftfahrzeuge.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1972.— 529 s.
3. **Andrzejewski R., Awrejcewicz J.** Nonlinear dynamics of a wheeled vehicle.— New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.— 328 p.
4. **Левин М. А., Фуфаев Н. А.** Теория качения деформируемого колеса.— Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 272 с.
5. **Eckert B.** Das Kraftfahrzeug-Wechselgetriebe, Aufgaben und Grundlagen der Auslegung // ATZ.— 1941.— Н. 9.— S. 225—239.
6. **Гащук П. М., Миськів Т. Г.** Теорія автомобіля: Колесо.— Львів: Українські технології, 2010.— 254 с.
7. **Jazar R. N.** Vehicle Dynamics: Theory and Application.— New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008.— 1015 p.
8. **Mitschke M., Wallentowitz H.** Dynamik der Kraftfahrzeuge.— Springer, 2010.— 709 s.
9. **Гащук П. М., Сичевський М. І.** Поняття дисипативного плеча реакції дороги на колесі пожежної машини // Пожежна безпека.—2012.— № 21.— С. 43—52.

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ КОЛЕСА ПОЖАРНОЙ МАШИНЫ В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ ТЕРМИНАХ

Противопоставляются друг другу феноменологический и модельный подходы к составлению описания энергопреобразования в эластичном (пневматическом, в частности) колесе мобильной (пожарной, в частности) машины. Эластичность колеса предложено моделировать в форме эффекта от действия двух обобщенных силовых факторов: силы упругости, направленной к так называемому центру упругости колеса, и диссипативной силы, перпендикулярной к упомянутой силе упругости. Приводятся отдельные примеры возможной конкретизации общего феноменологического описания колесного движителя. Такой подход к моделированию может оказаться полезным в случае синтеза «виртуального пожарного автомобиля».

Ключевые слова: пожарная машина, эластичное колесо, динамика колеса, феноменологическое описание, модельное описание.

P.M. Hashchuk

WHEEL DYNAMICS GENERAL DESCRIPTION OF FIRE-ENGINE IN PHENOMENOLOGICAL TERMS

Phenomenological and simulation approaches to description conclusion of energy conversion in elastic (pneumatic, in particular) wheel of mobile (fire, in particular) cars opposed each other. Wheel elasticity is offered to model in effect mode from action of two generalised power factors: spring force, directed to the so-called wheel spring centre and dissipative force, which is perpendicular directed to the noted spring force. Separate examples of possible specification of wheeled running gear general phenomenological description are adduced. Such approach to modelling can appear useful in case of «a virtual fire-engine» synthesis.

Keywords: fire-engine, an elastic wheel, wheel dynamics, the phenomenological description, the simulation description.

