

УДК 624.21.059.1

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ НАДЕЖНОСТИ В СТРОИТЕЛЬНОЙ ОТРАСЛИ

Представлен краткий аналитический обзор развития теории надежности строительных конструкций. Анализ развития теории выполнен в рамках работы по адаптации в Украине пакета нормативных документов Еврокода и подготовке национальных приложений к нему.

A brief analytical overview of the structural reliability theory. Analysis of the development of the theory in the framework of adaptation in Ukraine Eurocode package of normative documents and preparation of national annexes carried out.

Ключевые слова: надежность, характеристика безопасности, функция граничного состояния.

Обзор, представленный в статье, это результат анализа, выполненного автором в последние 10–15 лет в связи с разработкой национальных норм строительства и эксплуатации и особенно внимательного изучения проблемы надежности при адаптации (гармонизации) Еврокода, подготовке национальных приложений к нему. Целью этой публикации не является формулирование каких-либо рекомендаций по проблеме надежности. Цель в другом – привлечь внимание проектировщиков, строителей, инженеров системы эксплуатации к тезису: техническое совершенство конструкции, качественное строительство объекта, минимизация отказов в эксплуатации базируются на принципах надежности.

В представленном здесь кратком обзоре мы попытаемся привести основные вехи на пути становления теории надежности в строительстве.

Становление и развитие основ, современная общепринятая трактовка понятий надежности в сфере строительства связывается, прежде всего, с революционными для того времени работами Н.С. Стрелецкого [27, 28] 1938–1947 гг. и А.Р. Ржаницына [21, 22, 23] 1947–1952 гг., в которых и был заложен базис современной теории надежности, представляющий собой изложение двух фундаментальных научных идей:

- показана статистическая природа прочностных характеристик конструкции и параметров ее нагрузки и доказана необходимость вероятностной оценки работоспособности сооружения;
- заложены основы метода предельных состояний.

Впервые идеи статистического подхода к оценке прочности конструкций были изложены в работах М. Майера в 1926 г. [48], Н.Ф. Хоциалова в 1929 г. [29] и Н.С. Стрелецкого в 1938 г. [27]. Работы же А.Р. Ржаницына (1947–1952) были существенным развитием этих идей, их строгой математической формулировкой. Подробную



А.И. Лантух-Лященко
профессор Национального
транспортного университета,
д.т.н., профессор

библиографию работ А.Р. Ржаницына и Н.С. Стрелецкого можно найти в монографии В.В. Болотина [6].

В этом, далеко не полном, списке особое место занимает работа А.Р. Ржаницына 1952 г. [21], в которой изложена концепция безопасности сооружения, представляющая собой фундамент теории надежности. Принципиальные положения концепции безопасности сооружения формулируются А.Р. Ржаницыным как вероятностное решение проблемы

$$Z = R - E \geq 0 \quad \text{или} \quad R/E \geq 1 \quad (1)$$

в предположении, что обобщенные сопротивление элемента R , нагрузка E и резерв прочности Z суть случайные переменные, имеют нормальное распределение и взаимно не коррелируют. Решением проблемы явилась формула для определения коэффициента запаса, названного здесь «характеристикой безопасности»

$$= \frac{-1}{\sqrt{A_r^2 + A_q^2}}, \quad (2)$$

где γ – коэффициент запаса, представляющий отношение средней ожидаемой несущей способности к средним ожидаемым рабочим напряжениям; A_q – коэффициент изменчивости нагрузки (отношение стандарта нагрузки к ее среднему значению); A_r – коэффициент изменчивости несущей способности; β – характеристика безопасности (коэффициент, зависящий от вероятности разрушения и назначаемый в зависимости от последствий возможного разрушения).

В тексте работы есть замечание, без ссылки на публикацию, о том, что формула (2) была получена автором еще в 1947 г.

Позже этот подход в западной литературе был назван «метод второго момента» (*second-moment method*) [35] и стал основой проектирования конструкций заданной надежности.

Работа А.Р. Ржаницына 1952 г. практически осталась неизвестной. Только в 1957 г. она была переведена на английский язык и опубликована в изданиях Канадского исследовательского института в Оттаве. Ссылка на эту работу встречается в известной монографии Р.Е. Мельчерса [50].

Пятидесятые – начало шестидесятых прошлого века были годами бурного развития во всем мире нового направления в прикладной математике и инженерии – теории надежности, использующей фундаментальные принципы теории вероятностей и математической статистики, теории случайных функций. С тех пор исследования надежности развились в мощную прикладную математическую дисциплину, появилось новое понятие – «надёжностное проектирование».

Было положено начало новым фундаментальным исследованиям в теории вероятностей. Выдающийся русский математик Б.В. Гнеденко нашел три класса предельных распределений [7, 8, 42], что, надо полагать, стало первым шагом в развитии теории надежности.

К этому времени, по мнению В.В. Болотина [4], проявилось более глубокое понимание принципов теории надежности и переход «от элементарных методов теории вероятностей к методам теории случайных функций». Три взаимосвязанные научные идеи легли в основу нового направления:

- внешние воздействия на конструкцию и ее поведение в процессе эксплуатации суть *случайные процессы*, протекающие во времени;
- надежность отождествляется с вероятностью нахождения параметров конструкции в некоторой допустимой области, выброс параметров из этой области трактуется как отказ;
- отказ конструкции является следствием постепенного накопления повреждений.

Эти принципы в полной мере нашли свое воплощение в фундаментальных исследовани-

ях В.В. Болотина, относящиеся к 1960–1970 гг. и опубликованных в монографиях [5, 6, 4].

В 1978 г. публикуется монография А.Р. Ржаницына [25], в которой систематично изложены многолетние исследования автора, представляющие теоретический аппарат расчета строительных конструкций на надежность и явившиеся базисом всех строительных норм бывшего Советского Союза. В 1982 г. А.Р. Ржаницын издал учебник курса строительной механики [24], в котором большой раздел посвящен методологии расчета строительных конструкций на надежность. В строительных вузах был введен обязательный курс теории надежности.

В это же время проводятся и публикуются результаты исследований по теории случайных процессов [13, 19, 26], открывающие новые пути становления теории надежности.

Среди прикладных исследований надежности в проектировании строительных конструкций наиболее известны монографии В. Райзера [20], Чиркова В.П. [30].

Упомянутые монографии В.В. Болотина и А.Р. Ржаницына в семидесятых годах были переведены на английский язык и стали «катализатором» бурного развития теории надежности в Европе и в Америке. Начало этого периода в западной литературе связывают с работой К.А. Корнелла [35].

Вот как описывает этот период Р.Е. Мельчерс в своей монографии [50]: «В силу ему присущей простоты, так называемый «метод второго момента» становится весьма популярным благодаря ранним работам Маера (1926) [48], Фрейденталя (1956) [41], А.Р. Ржаницына (1957) [53] и Баслера [31]. Однако понадобилось время до конца 1960-х годов чтобы оценить и принять идеи метода, изложенного в обобщенной форме в работе Корнелла 1969 г. [35]».

Эта работа считается основополагающей в современной теории надежности строительных конструкций. В ней центральная идея концепции безопасности сооружения А.Р. Ржаницына (1), (2) представлена с широкими обобщениями. Учитывая, что переменные R и E имеют общую размерность, решение проблемы (1) формулируется как поиск вероятности разрушения элемента выраженной известным интегралом – сверткой в функции одной переменной X :

$$p_f = P(R - E < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_E(x) dx, \quad (3)$$

где $F_R(x)$ – интегральная функция распределения обобщенного сопротивления элемента R ; $f_E(x)$ – функция плотности распределения обобщенной нагрузки E .

Интеграл (3) в случае нормального закона распределения имеет аналитическое выражение

$$p_f = P(R - E < 0) = P(Z < 0) = \frac{0 - \mu_Z}{Z}, \quad (4)$$

где p_f – вероятность отказа; μ_Z – среднее значение резерва прочности Z ; Z – среднеквадратическое отклонение Z (первые моменты распределения – математическое ожидание и стандарт); ϕ – нормальная функция распределения (рис. 1).

Параметр – отношение среднего значения резерва прочности μ_Z к среднеквадратическому отклонению Z в (4) – назван К.А. Корнеллом «индекс безопасности» («*safety index*») и обозначен символом β :

$$\beta = \mu_Z / Z. \quad (5)$$

Заменив в (5) μ_Z и Z их значениями, выраженными через переменные R и E ,

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_E; \quad (6a)$$

$$Z = \left(\sigma_R^2 + \sigma_E^2 \right)^{0,5} \quad (6b)$$

и подставив в (4), получим:

$$p_f = \frac{-(\mu_R - \mu_E)}{\left(\sigma_R^2 + \sigma_E^2 \right)^{0,5}} = -\beta. \quad (7)$$

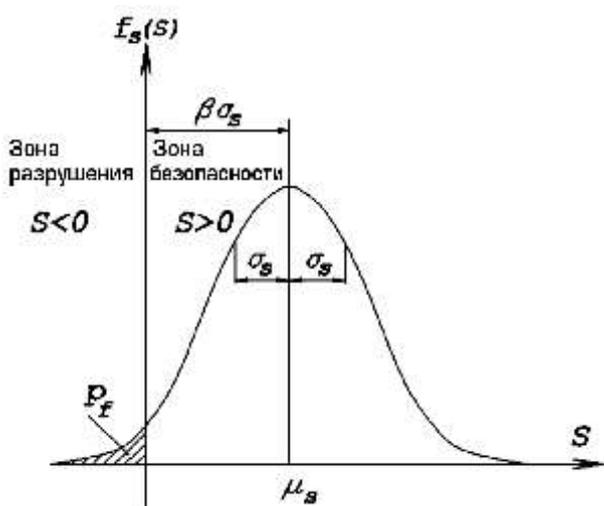


Рис. 1. Функция распределения резерва прочности Z

Здесь выражение характеристики безопасности (7) совпадает с формулой А.Р. Ржаницына (2), если числитель и знаменатель в (7) разделить на μ_E .

Используя определение характеристики безопасности по (7), можно получить формулы для других законов распределения. Так, в случае логнормального закона формула имеет вид

$$LN = \frac{\ln \frac{\mu_R}{\mu_E} [(1 + V_E^2)/(1 + V_R^2)]^{1/2}}{\{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_E^2)]\}^{1/2}}, \quad (8)$$

где V_R, V_E – коэффициенты вариации обобщенных сопротивления R и нагрузки E соответственно.

Заметим, что при ограничениях $V_R < 0,3$ и $V_E < 0,3$ характеристика безопасности LN (8) определяется простой приближенной зависимостью

$$LN = \frac{\ln(\mu_R/\mu_E)}{\sqrt{V_R^2 + V_E^2}}. \quad (9)$$

В работе К.А. Корнелла [35] простая модель надежности, в которой рассматриваются две случайные величины R и E с заданным законом распределения, обобщается на случай n величин.

В обобщенной модели рассматривается n -мерный вектор случайных переменных, которыми описывается задача. В координатах ROE (рис. 1, 2) вводится линейная функция граничного состояния (резерв прочности в терминологии А.Р. Ржаницына), разделяющая координатную

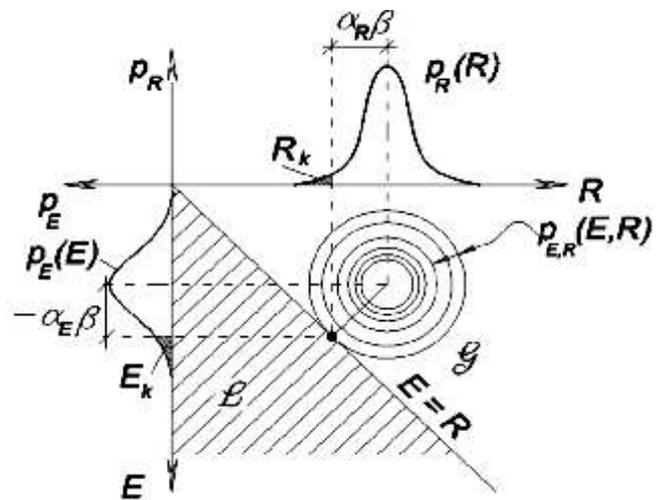


Рис. 2. Геометрическая интерпретация характеристики безопасности

плоскость на две зоны – безопасную и разрушения:

$$G(X) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, \quad (10)$$

где $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ – n -мерный вектор независимых случайных переменных – топологических, механических параметров элемента и параметров нагрузки; a_{i-1} – константы.

Функция граничного состояния принимает значения:

- $G(x) > 0$ – в области, где не будет достигнуто граничное состояние (рис. 1);
- $G(x) = 0$ – на границе двух областей;
- $G(x) < 0$ – в области, где превышено граничное состояние.

(Здесь $X = x$ – вектор случайных переменных, соответствующих проектной точке).

Модель оценки надежности (7) получила элегантную геометрическую интерпретацию: в координатной плоскости обобщенных случайных переменных – сопротивления элемента R и нагрузки E (см. рисунок 2).

В этих координатах характеристика безопасности представляет собой кратчайшее расстояние от начала координат до проектной точки, лежащей на кривой контура плотности распределения (в случае нормального распределения – это окружность).

Из геометрических соображений следует, что длина перпендикуляра из центра круга на предельную прямую (см. рисунки 1, 2) равна характеристике безопасности. Точку A пересечения перпендикуляра с предельной прямой $G(R = E) = 0$ называют проектной точкой. Ее координаты r_d, q_d суть проектные значения случайных переменных

$$r_d = R; \quad q_d = -E; \quad (11)$$

$$R = \frac{R}{\sqrt{\frac{2}{R} + \frac{2}{Q}}}; \quad Q = \frac{-Q}{\sqrt{\frac{2}{R} + \frac{2}{Q}}}, \quad (12)$$

где R, Q – направляющие косинусы нормали OA .

Модель оценки надежности в формуле К.А. Корнелла сегодня стала признанным инструментом управления надежностью проектируемых конструкций не только в странах Европы в рамках Еврокода, но и во всем мире. Его обобщения [35] послужили базой для дальнейшего развития метода в работах П. Тофт-Кристенсена,

на, М.И. Бейкера [59] и О. Дитлевсена [36, 37], представивших концепцию определения характеристики безопасности в самом общем случае – произвольной функции распределения и нелинейной функции граничного состояния.

В 1974 г. А.М. Хасофер и Н.К. Линд в работе [43] ввели безразмерную функцию граничного состояния и, используя уравнения П. Тофт-Кристенсена и М.И. Бейкера [59] для определения расстояния до граничной криволинейной функции, предложили способ линеаризации проблемы.

К 90-м годам сложилась четкая математическая трактовка методов оценки надежности. К этому времени относятся работы О. Дитлевсена [36, 37], Д. Венциано [61, 62], обобщающие характеристику безопасности как геометрическую величину при произвольной функции граничного состояния и произвольном законе распределения. Публикуются монографии, систематично излагающие исследования в теории надежности последних 20 лет [1, 37, 47, 50, 57, 59, 60].

Особую страницу в истории развития теории надежности занимает проблема надежности в функции времени. Уже в 70-х годах В.В. Болотин в своих публикациях [6, 4] дает решения задач строительной механики методами теории случайных функций. Позже, в 80-х годах, появляется большое количество работ по проблеме надежности в терминах стохастической задачи (*time-variant*), т.е. в функции времени,

$$p_f(t) = P[R(t) - E(t) > 0]. \quad (13)$$

Тогда резерв прочности, соответствующий постановке проблемы (11), записывается также в функции времени:

$$Z(t) = R(t) - E(t). \quad (14)$$

Аналитические решения проблемы (13), (14) весьма сложны и малодоступны для практического применения в строительном проектировании. Многие известные современные аналитические решения проблемы достаточно подробно представлены в монографиях В.В. Болотина [3] и Р.Е. Мельчера [50].

Весомой альтернативой аналитическим моделям стали в последние 30–40 лет феноменологические стохастические модели, описывающие накопление повреждений как процесс, эволюция которого во времени определяется вероятностными законами марковских цепей.

За более чем 100 лет, прошедшие со времени опубликования стохастической теории академика Российской академии наук А.А. Маркова, теория интенсивно развивалась во всем мире и стала базой не только для моделей накопления повреждений, но и во всех отраслях знаний – от управления экономикой до медицинских прогнозов. Сейчас многие исследователи склоняются к мысли, что именно марковские стохастические модели и есть наиболее перспективным, универсальным интегральным аппаратом описания надежности элементов в функции времени.

Такой подход к оценке надежности прослеживался уже в первых публикациях монографии В.В. Болотина 1971 г. [5]. Однако широкое применение марковских моделей накопления повреждений началось в 80-е годы, особенно после появления в 1985 г. монографии Дж. Богданоффа и Ф. Козина [32, 2], в которой дано систематическое описание феноменологических моделей деградации с помощью стохастических процессов марковского типа (Джон Богданофф – профессор авиации и аэронавтики университета Пердью, Фрэнк Козин – профессор системотехники Нью-Йоркского политехнического института).

В предисловии к монографии на русском языке [2] авторы пишут: «Сейчас мы убеждены, что полная и непротиворечивая структура этих моделей поразительно богата, а область применения при изучении феноменологии накопления повреждений весьма обширна. Эти модели позволяют успешно описывать и анализировать многочисленные опытные данные о долговечности в условиях усталости, износа и роста усталостных трещин».

Действительно, сегодня марковские феноменологические модели накопления повреждений доминируют в научных исследованиях, проектировании и эксплуатации строительных объектов. Библиография публикаций только на английском языке к началу 2015 г. составляла не менее 380 тысяч.

Существенный вклад в систематизацию, обобщение и практическое приложение исследований в теории надежности внесла большая группа ученых, работающих под эгидой Объединённого комитета безопасности конструкций – JCSS (Joint Committee on Structural Safety).

Комитет был создан в 1971 г. по инициативе международных научно-исследовательских организаций в сфере строительства. Сегодня JCSS объединяет ученых 67 стран мира. Ученые, возглавлявшие комитет в разное время – Дж.Д. Соренсен [54, 55], М.Х. Фабер [39], Й. Ферри-Боржес [40], Й. Шнейдер [56, 57], Р. Раквитц [52], опубликовали большое количество монографий, ставших учебниками по надежности, безопасности, долговечности и риску в сфере строительных конструкций. Среди известных работ комитета фундаментальное теоретическое исследование «Рекомендуемая вероятностная модель» (Probabilistic Model Code) [51] и стандарт ISO 2394-1998 «Общие принципы оценки надежности строительных конструкций» [45].

Большое количество прикладных исследований было опубликовано в связи с разработкой Еврокода EN 1990:2002 [38] в 80–90 годах [31, 33, 34, 35, 36, 44]. Концепция надежности, изложенная в этих исследованиях, да и сам Еврокод стали базисом целого ряда новейших национальных нормативных документов Украины [9, 11, 12].

Говоря о прикладных исследованиях в теории надежности, нельзя не упомянуть украинскую школу. К началу нового века в Украине сложилась известная национальная научная школа. Широкой популярностью в Украине и России пользуются монографии А.В. Перельмутера [14, 16], которые переиздавались в последние годы 3–4 раза. Настольными книгами у проектировщиков стали монографии С.Ф. Пичугина и учеников его школы [17, 18, 15].

Заканчивая этот краткий обзор отметим, что к началу нового века теория надежности четко определилась как единый научный аппарат контроля и прогноза безопасного функционирования технических систем на всех этапах жизненного цикла. Применительно к строительным объектам теорию надежности можно характеризовать, прежде всего, определением термина «надежность». Существующее в теории сооружений определение, происходящее из известного стандарта ГОСТ 27751-88, было весьма расплывчатым. Определение формулировалось в терминах, которые не применяются, за исключением термина «долговечность», ни в практике проектирования, ни в строительстве или в эксплуатации.

Ныне весь мир использует достаточно четкие определения терминологии надежности в формулировке европейских ученых. Так в стандарте ISO 2394 [45] определение приведено предельно кратко: «Надежность – способность сооружения или его элемента выполнять заданные функции в течение всего проектного срока службы».

В Еврокоде EN 1990:2002 [10, 38] понятие «надежность» представлено несколько шире: «Способность сооружения или его элемента выполнять заданные функции в течение всего проектного срока службы. Надежность обычно выражается в вероятностных показателях.

Примечание. Надежность охватывает безопасность, эксплуатационную пригодность и долговечность конструкции».

Примечание к определению термина призвано подчеркнуть, что надежность является одновременно мерой безопасности, эксплуатационной пригодности и долговечности конструкции.

Надежность наряду со своим основным назначением – характеризовать уровень безопасности сооружения в течение жизненного цикла

– имеет и другую функцию, а именно: служит инструментом оптимизации качества проекта. Так в EN 1990:2002 находим: «Следует отметить, что значение параметра надежности является формальным или мнимым показателем вероятности разрушения. Он используется скорее как средство для развития последовательных проектных правил, чем для описания частоты разрушения конструкции».

В заключение подчеркнем, что теория надежности весьма обширна и находится в постоянном развитии. В рамках журнальной статьи невозможно осветить все ее аспекты применительно к строительным конструкциям. Представленные в обзоре модели оценки надежности в основном относятся к конструкциям простого напряженно-деформированного состояния и имеющим линейную функцию граничного состояния. Однако, заинтересованный читатель найдет в прилагаемом обширном списке литературы многие достаточно универсальные модели оценки надежности в функции времени. Особенно это относится к марковским стохастическим моделям накопления повреждений.

-
- [1] Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании / Пер. с англ. Ю.Д.Сухова. – М.: Стройиздат, 1988.
- [2] Богданов Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. – М.: Мир, 1989.
- [3] Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984.
- [4] Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. Стройиздат М.: 1961
- [5] Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – Стройиздат М.: 1971.
- [6] Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. Стройиздат М.: 1965.
- [7] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Гостехиздат, 1954.
- [8] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. – Математические методы в теории надежности. – М.: НАУКА, 1965.
- [9] ДБН В.1.2-14-2009 Загальні принципи забезпечення надійності та безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ. – Мінрегіонбуд України, К.:2009.
- [10] ДСТУ-Н Б EN 1990:2008 Еврокод. Основи проектування конструкцій (EN 1990:2002, IDT). Мінрегіон України, К.: 2008.
- [11] ДСТУ-Н Б.В.1.2-16:2013 Визначення класу наслідків (відповідальності) об'єктів будівництва. Мінрегіон України, К.: 2013.
- [12] ДСТУ-Н Б.В.2.3-23:2013 Настанова з оцінювання і прогнозування технічного стану автодорожніх мостів. – Мінрегіон України, К.: 2013.
- [13] Коваленко И.Н. Исследования по анализу надежности сложных систем. К.: Наукова думка – 1975.
- [14] Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / Гордеев В.Н., А.И. Лантух-Лященко, А.В. Махинько, В.А. Пашинский, А.В. Перельмутер, С.Ф. Пичугин. / Под общей ред. А.В. Перельмутера. – 4 изд. переработ. – М.: издательство СКАД СОФТ, издательство АСВ, издательство ДКМ Пресс, 2014.
- [15] Надежность стальных конструкций производственных зданий. Работа научной школы проф. Пичугина С.Ф. Полтава: ООО «АСМИ», 2010.
- [16] Перельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. / Научное издание. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007.
- [17] Пичугин С.Ф. Махинько А.В. Ветровая нагрузка на строительные конструкции (монография). – Полтава: Изд-во «АСМИ», 2005.
- [18] Пичугин С.Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий. [Текст]: монография – Полтава: Изд-во «АСМИ», 2009.
- [19] Пугачев В.С. Теория случайных функций. – М.: Гостехиздат, 1957.
- [20] Райзер В.Д. Теория надежности в строительном проектировании. – М.: изд-во АСВ, 1998.

- [21] Ржаницын А.Р. Применение статистических методов в расчетах сооружений на прочность и безопасность. – Строительная промышленность. № 6. – М.: 1952.
- [22] Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Стройвоенмориздат. – 1949.
- [23] Ржаницын А.Р. Статистический метод определения допускаемых напряжений при продольном изгибе. Научное сообщение ЦНИПС, вып. 3. – М.: Стройиздат. – 1951.
- [24] Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. школа, 1982.
- [25] Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат. – 1978.
- [26] Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968.
- [27] Стрелецкий Н.С. Об исчислении запасов прочности сооружений. Сборник трудов МИСИ, №1, 1938.
- [28] Стрелецкий Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений. М. Стройиздат, М.: 1947.
- [29] Хоциалов Н.Ф. Запасы прочности. Строительная промышленность, №10. – М.: 1929.
- [30] Чирков В.П. Вероятностные методы расчета мостовых железобетонных конструкций. М.: Транспорт, 1980. – 133 с.
- [31] Basler, E. Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken, Schweitzer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik, 4, 1961.
- [32] Bogdanoff J.L., Kozin F. Probabilistic models of cumulative damage, Willey & Sons, New York, 1985.
- [33] Calgaro, J.A. Introduction aux Eurocodes – Securite des Construction et Bases de la Theorie de la Fiabilite/ Presses de l'ENPC, Paris : 1996.
- [34] CIRIA (1977). Rationalization of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes.
- [35] Cornell, C.A. A Probability Based Structural Code, ACI-Journal No. 12, Vol. 66, 1969, p.p. 974–985.
- [36] Ditlevsen O. Generalized second moment reliability index. Journal of Structural Mechanics, 7, 1979, pp. 435–451.
- [37] Ditlevsen O., Madsen H.O. Structural Reliability Methods. – John & Wiley Sons Ltd, Chichester, 1996
- [38] EN 1990:2002 Eurocode – Basis of structural design. European Committee for Standardization. Brussels: 2003.
- [39] Faber, M.H. and Sorensen, J.D. (2003). Reliability based code calibration – The JCSS: 2003 Интернет ресурс: <http://www.jcss.byg.dtu.dk>.
- [40] Ferry-Borges, J. and Castanheta, M. «Structural Safety». – Laqboratorio Nacional de Engenharia Civil. – Lissabon: 1971
- [41] Freudenthal F.M. Safety, reliability and structural design. J. of Structural Div. Proc. ASCE, 87 ST3, 1961.
- [42] Gnedenko, B.V. (1943) Sur la distribution limit du terme maximum dune serie aleatoire. Ann. Math., №44.
- [43] Hasofer, A.M. and Lind, N.C. An Exact and Invariant First Order Reliability Format, Proc. ASCE, J. Eng.Mech. Div., 1974, pp. 111–121.
- [44] Holicky, M., Markova, J. and Sykora, M. Partial factors for assessment of existing reinforced concrete bridges. Proceedings of the 6th International Probabilistic Workshop, Darmstadt 2008.
- [45] ISO 2394: 1998. General principles on reliability for structures. 2nd ed. Geneve, Switzerland: ISO, 1998.
- [46] JCSS, «Probabilistic Model Code», The Joint Committee on Structural Safety, Geneve: 2001.
- [47] Madsen, H.O., Krenk, S. and Lind, N.C. Methods of Structural Safety, Prentice Hal, Inc. Englewood Cliffs, NJ 07632, 1986.
- [48] Mayer M. Die Sicherheit der Bauwerte und ihre Berechnung nach Granz kraften statt nach zulassigen Spannungen. Springer Verlag, Berlin, 1926
- [49] Melchers, R.E. Reliability of parallel structural systems // J. Structural Div., ASCE, 109 (11) 1983, P. 2651–2665,
- [50] Melchers, R.E. Structural Reliability Analysis and Prediction/ Second Edition. John Wiley & Sons.- New York: 1999.
- [51] Probabilistic Model Code ISBN 978-3-909386-79-6. Интернет ресурс: <http://www.jcss.byg.dtu.dk>
- [52] Rackwitz, R. Static properties of reinforcing steel. Working notes, JCSS Probabilistic Model Code. Part 3: Resistance model, 1996 <http://www.jcss.byg.dtu.dk>
- [53] Rzhazitzyun, R. (1957) It is Necessary to Improve the Standards of Building Structures, A Statistical Method of Design of Building Structures, Allan, D.E. (transl.), Technical Translation No. 1368, National Research Council of Canada, Ottawa
- [54] Sorensen, J.D. Reliability Based Optimization of Structural Systems. Proceedings of the 13th IFIP conference. V.113: 1987.
- [55] Sorensen, J.D., I.B. Kroon and M.H. Faber: Optimal Reliability-Based Code Calibration. Structural Safety, Vol. 14, 1994, pp. 197–208.
- [56] Schneider, J., Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen, Grundwissen für Ingenieure. VDF, Hochschulverlag AG and der EH Zürich: 1994.
- [57] Schneider, J., Introduction to Safety and Reliability of Structures. IABSE. – Zurich, 1997.
- [58] Stewart, M. and Melchers, R.E. «Probabilistic Risk Assessment of Engineering Systems», Chapman & Hall, 1997.
- [59] Thoft-Christensen, P. and Baker, M.J. Structural Reliability Theory and Its Applications. Springer Verlag: 1982.
- [60] Turkstra C. Theory and Structural Design. Study No. 2 : University of Waterloo, Solid Mechanics Division, Canada – 1972.
- [61] Veneziano D. Contributions to Second Moment Reliability Theory. Res. Rept. R74-33, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, USA –1974.
- [62] Veneziano D. New index of reliability // J. Engrg. Mech. Div., Proc. ASCE, N 105, -1979. P. 277-296

Надійшла 23.02.2015 р.