

УДК 624.012.45:624.023.87

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СЦЕПЛЕНИЯ БЕТОНА И АРМАТУРЫ В ПК ЛИРА-САПР

Рассмотрены плоские конечно-элементные модели железобетонного центрально-армированного призматического стержня, выдергиваемого из бетонной матрицы: модель с элементами сцепления, работающими на растяжение, сжатие и на сдвиг, в ПК Лира-САПР. Построен и выполнен сопоставительный анализ основных зависимостей распределения касательных напряжений сцепления, продольных усилий и относительных продольных деформаций в арматуре и бетоне, относительных взаимных смещений арматуры и бетона, перемещения торца по высоте образца в моделях сцепления арматуры с бетоном, продольных усилий в арматуре и бетоне в элементах сцепления по длине стержня.

The planar finite element models are considered for reinforced concrete central prismatic rod. It is pulled out of the concrete matrix: the model with bond elements operating in tension, compression and shear in software package Lira-SAPR. It is built and made a comparative analysis and basic dependencies distribution bond shear stresses, longitudinal forces and relative longitudinal strains in armature and concrete, the relative mutual displacement of reinforcement and concrete, moving the end of the sample height in bond models armature with concrete, armature and concrete longitudinal forces in bond elements along the length of the rod.

Ключевые слова: сцепление арматуры с бетоном, нелинейная задача сцепления, плоские конечно-элементные модели, сопоставительный анализ.

Проблема сцепления арматуры с бетоном имеет фундаментальное значение для теории и практики железобетона. Совместная работа арматуры с бетоном обеспечивается сцеплением, являясь основной предпосылкой работы железобетона как конструкционного материала, и играет важную роль в обеспечении прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций.

Большой вклад в создание теории сцепления и в решение ее задач внесли такие ученые, как А.А. Гвоздев, А.Б. Гольшев [1], В.М. Бондаренко [2], Н.И. Карпенко [3], М.В. Кольнер, А.А. Оатул, М.М. Холмянский [4] и др.

Силы сцепления создают сложное напряженно-деформированное состояние в армированных элементах и конструкциях. Точность определения основных параметров сцепления в железобетонном элементе (усилие в стержне, длина его заложения, напряжение и деформации сцепления) в большой степени зависит от учета реальных режимов нагрузок и условий эксплуатации конструкций, а также правильного выбора расчетных схем, которые наиболее полно учитывали бы одновременное действие продольных и поперечных напряжений взаимодействия арматуры с бетоном.

В последнем случае широкие возможности для построения теории сцепления открывает метод конечных элементов (МКЭ) и другие многочисленные методы. Однако их применение связано со знанием законов деформирования бетонов при объемном (или плоском) напряженном состоянии, критериев трещинообразования и т.п.



В.И. Колчунов

профессор кафедры компьютерных технологий строительства Национального авиационного университета, д.т.н., профессор



И.А. Яковенко

доцент кафедры компьютерных технологий строительства Национального авиационного университета, к.т.н., доцент



Е.А. Дмитренко

аспирант кафедры компьютерных технологий строительства Национального авиационного университета

В целях повышения точности оценки сопротивления эксплуатируемых железобетонных конструкций рационально использовать модели с дискретным расположением арматурных стержней с учетом реальных характеристик сцепления арматуры с бетоном, определяемых, как правило, экспериментальным путем [1–6].

В статье представлены три плоские модели железобетонного призматического стержня, центрально-армированного стержневой горячекатаной арматурой, выдергиваемой из бетонной матрицы: модель с элементами сцепления, работающими на растяжение, на сжатие и на сдвиг.

Построены и проанализированы графики распределения продольных усилий, перемещений и деформаций, действующих в различных сечениях по длине стержня в рассматриваемых моделях.

Исходные данные для моделирования плоской задачи сцепления:

- геометрические характеристики железобетонного образца:
 - длина $l = 600$ мм, высота $h = 150$ мм, толщина $t = 33$ мм;
- арматура класса А400С, $E_s = 2 \cdot 10^7$ тс/м²:
 - диаметр – $\varnothing 10$ мм, коэффициент Пуассона для арматуры $\nu_s = 0,3$; растягивающее усилие $N_s = 1$ тс;
- бетон класса С16/20, $E_{cm} = 2,7 \cdot 10^6$ тс/м²:
 - предел прочности при сжатии $f_c = 1500$ тс/м², при растяжении $f_{ctm} = 200$ тс/м², коэффициент Пуассона для бетона $\nu_c = 0,2$.

Плоская модель с элементами сцепления, работающими на растяжение. Модель железобетонного стержня с выдергиваемой арматурой

из бетонной матрицы представляет собой плоскую конечно-элементную задачу, состоящую из бетонных пластинчатых элементов физически нелинейных четырехугольных КЭ плоской задачи (балка-стенка) – КЭ230, с размерами 10×10 мм (в плоскости XOY), на которые разбит весь исследуемый элемент высотой 150 мм, за исключением пластинчатых элементов, моделирующих арматуру. Элементы, моделирующие арматуру $\varnothing 10$ класса А400С, – четырехугольные КЭ плоской задачи (балка-стенка) КЭ30, имеют размер 5×10 мм и примыкают с обеих сторон к продольной оси элемента (рис. 1, 2).

Толщина пластинчатых бетонных элементов принята равной 33 мм (три диаметра арматуры), на основании принципа Сен-Венана применительно к исследованию работы арматуры и околоарматурной зоны, а не всего элемента. Также этот размер принят из условия минимально допустимого соотношения сторон КЭ в ПК Лири-САПР, равного 1 к 3.

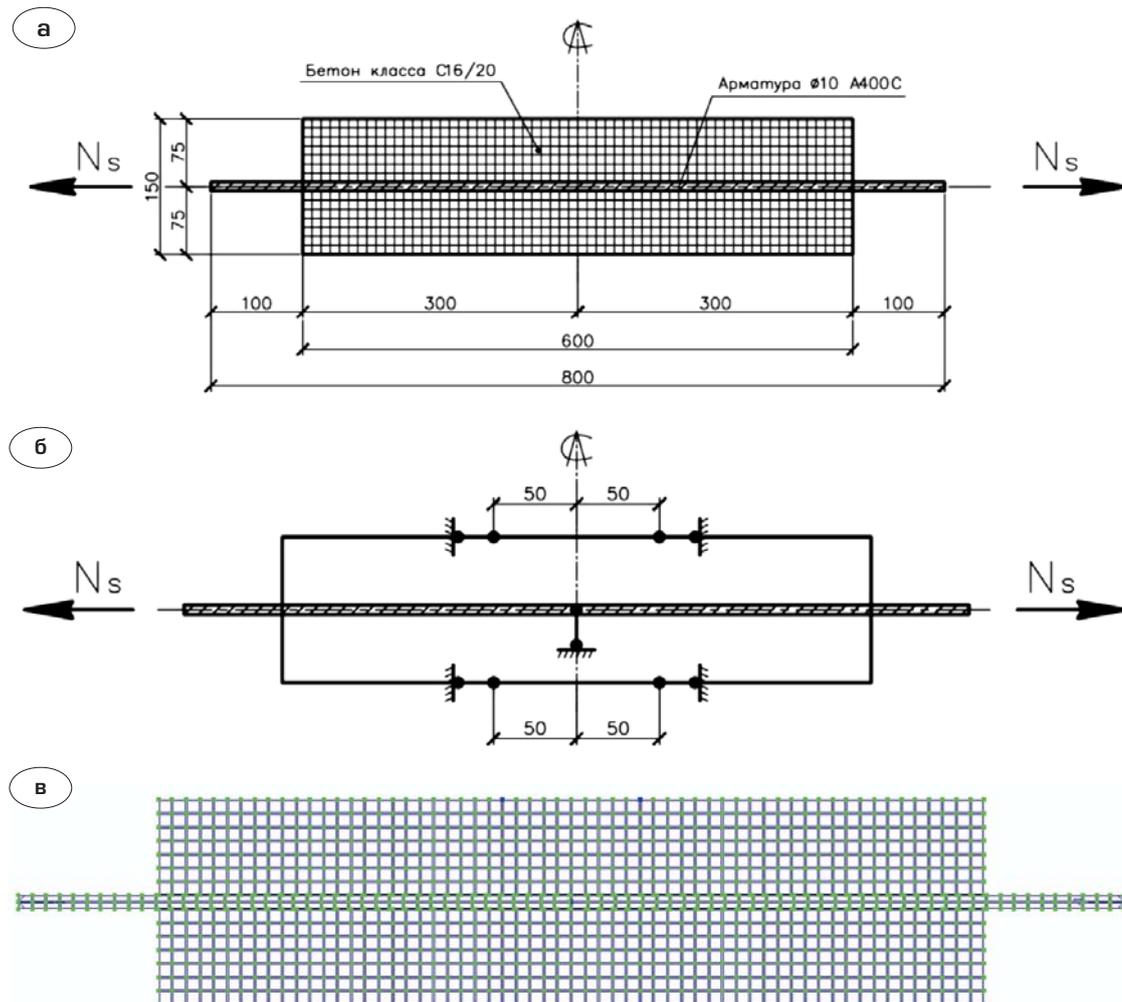


Рис. 1. Плоская модель сцепления арматуры с бетоном:
 а – общий вид модели;
 б – схема расположения опор;
 в – расчетная схема модели в ПК Лири-САПР

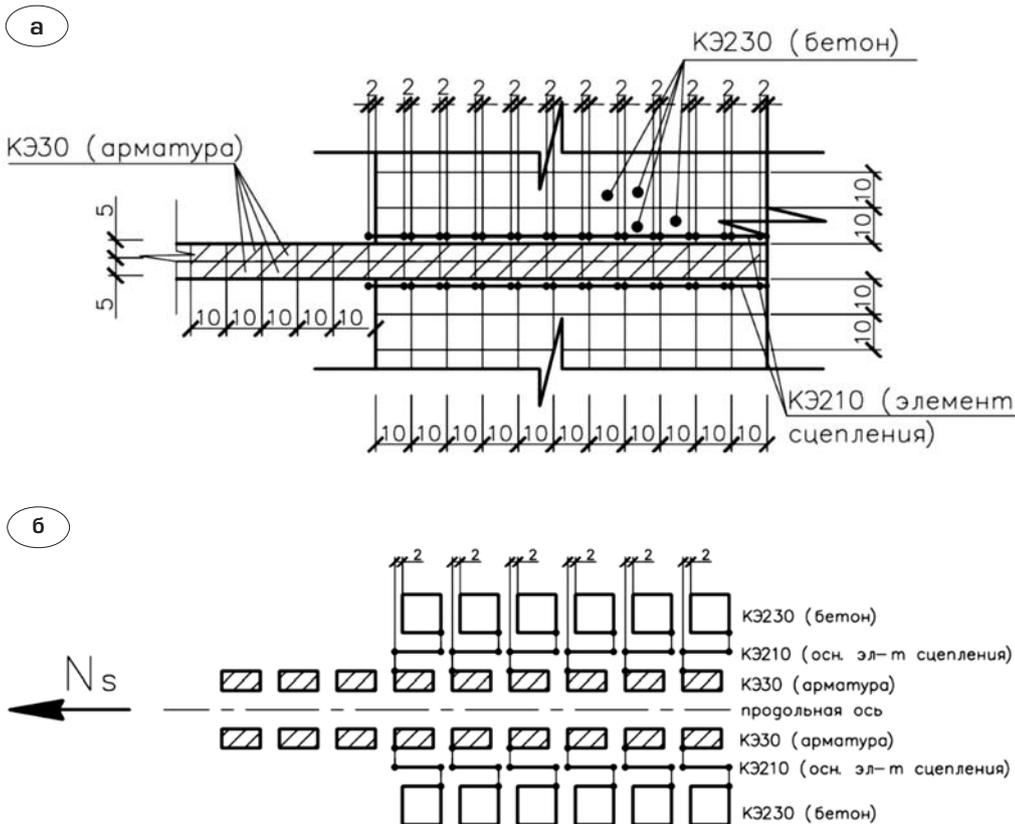


Рис. 2. Разбивка модели на КЭ (а) и расположение основных элементов сцепления в модели (б)

Арматурные элементы сдвинуты относительно бетонных на расстояние 2 мм в сторону торца призмы, чтобы между узлами пластинчатых элементов бетона и арматуры разместить стержневые конечные элементы (физически нелинейные пространственные универсальные стержневые КЭ 210), моделирующие сцепление материалов при выдергивании арматуры из бетона (см. рис. 2). Здесь элементы сцепления условно показаны выше граней арматурных КЭ, а элементы модели разнесены друг от друга на расстоянии.

Элементы сцепления (ЭС) длиной 12 мм и квадратным сечением 30×30 мм с одной стороны закрепляются к арматурному КЭ, с другой – к бетонному и таким образом при выдергивании арматуры из бетона работают на растяжение (рис. 2, б). Размеры поперечного сечения элементов сцепления приняты из соображений учета площади околоарматурного слоя, в котором происходят процессы взаимодействия арматуры и бетона.

Для улучшения заземления ЭС к пластинчатым бетонным и арматурным вводятся дополнительные элементы, расположенные на одной оси с ЭС. Таким образом, каждый ЭС имеет два вспомогательных элемента (КЭ210), один из которых соединяет его с бетоном (задний), другой с арматурой (передний). Длина вспомогательных элементов ЭС – 10 мм, размеры поперечного сечения такие же, как и у основных элементов сцепления (рис. 3, 4).

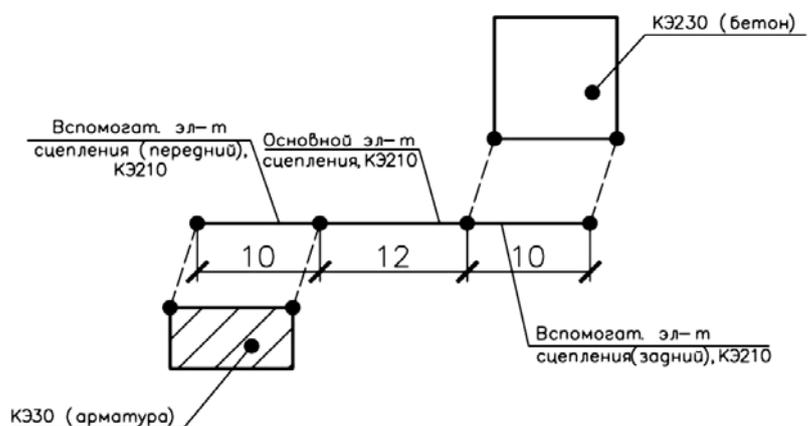


Рис. 3. Схема расположения основных и вспомогательных элементов сцепления

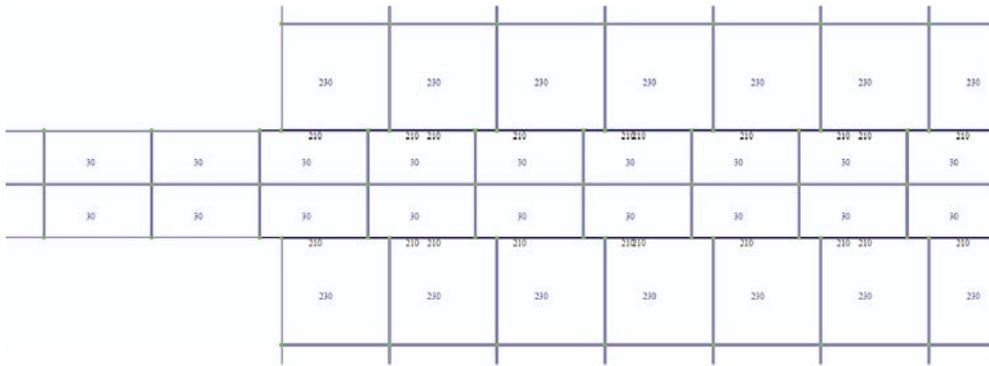


Рис. 4. Зона контакта КЭ арматуры, бетона и ЭС в расчетной схеме модели ПК Лири-САПР

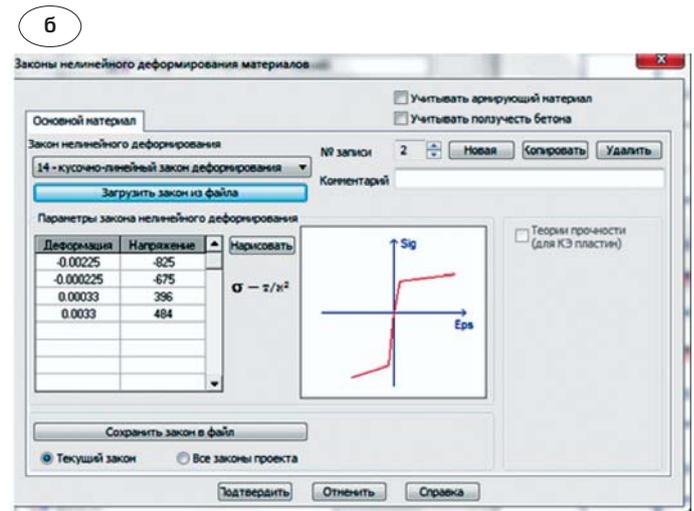
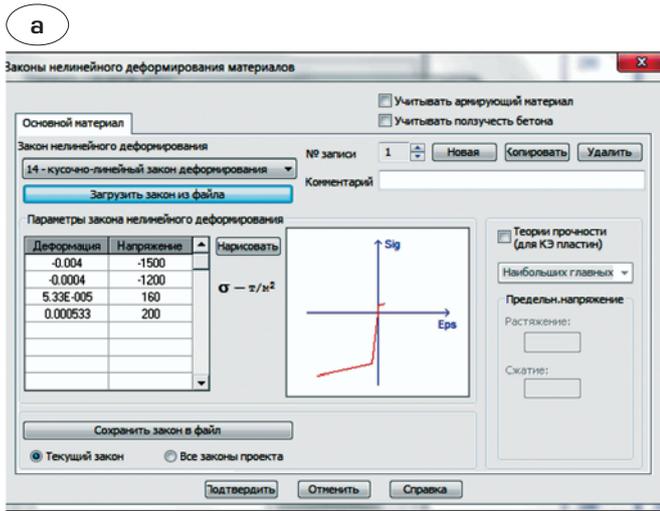


Рис. 5. Введение законов деформирования основного материала, $\tau/\text{м}^2$:

а – для пластинчатых элементов, моделирующих работу бетона в модели;
 б – для стержневых элементов, моделирующих сцепление в модели

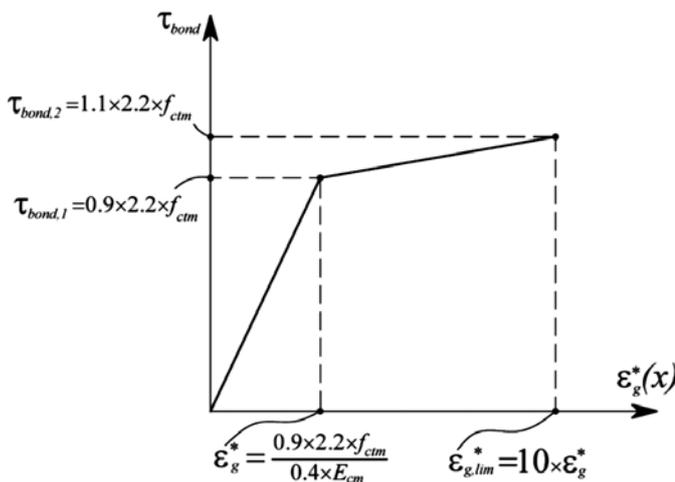


Рис. 6. Зависимость напряжений сцепления τ_{bond} от относительных взаимных смещений $\epsilon_g^*(x)$

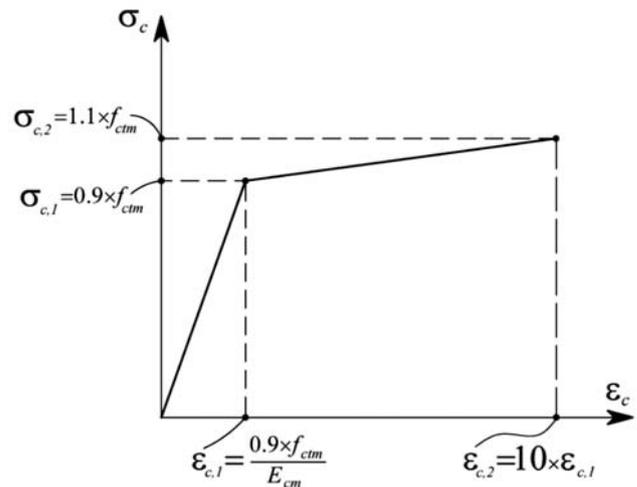


Рис. 7. Диаграмма деформирования бетона $\sigma_c - \epsilon_c$ в аналитической модели

Жесткость физически нелинейных пластинчатых и стержневых элементов задавалась путем введения 14 кусочно-линейного закона деформирования бетона (рис. 5–7) после вклю-

чения меню «Учет нелинейности» в меню «Задание жесткости для пластин»/«Задание стандартного сечения».

Жесткость арматурных элементов задавалась как для упругих пластин толщиной 1 см путем введения характеристик, указанных выше в меню «Задание жесткости для пластин».

В середине моделируемого элемента, в узле арматурного КЭ, находящегося по оси симметрии, вводится опорное закрепление по оси Y . В четырех узлах, равноудаленных от этого узла на расстояние 50 мм в продольном направлении и на ± 75 мм в поперечном, вводим опорные закрепления, препятствующие перемещениям вдоль продольной оси образца (см. рис. 1, б). Такое расположение опор препятствует повороту элемента в плоскости XOY .

Плоская модель с элементами сцепления, работающими на сжатие. Данная модель основана на вышеописанной со следующим отличием: арматурные КЭ сдвинуты относительно бетонных на 2 мм в сторону, обратную действию растягивающего усилия (рис. 8).

Элементы сцепления, введенные между узлами бетонных и арматурных элементов, при выдергивании арматуры из бетона «упираются» в бетон и, таким образом, работают на сжатие, деформируясь согласно нижней ветви диаграммы деформирования бетона (рис. 8, 9).

Плоская модель с элементами сцепления, работающими на сдвиг. Моделирование связей между бетоном и арматурой происходит аналогично двум вышеописанным моделям, однако

моделирование элементов сцепления имеет существенное отличие – физически нелинейные стержневые конечные ЭС (в т.ч. и вспомогательные) располагаются перпендикулярно действующей нагрузке (рис. 10).

Арматурные КЭ не сдвигаются относительно бетонных, а их парные узлы не объединяются в один общий узел, хотя и полностью совпадают по координатам (рис. 11). Основной ЭС с одной стороны присоединяется к узлу арматурного элемента, с другой – к узлу бетонного элемента. Схема рассчитывается без упаковки узлов.

Жесткости элементов модели и опоры полностью совпадают с жесткостями и опорами описанных выше моделей (см. рис. 1).

Рассматриваются варианты такой модели с использованием физически линейных ЭС – универсальных пространственных стержневых КЭ10 с введением жесткости численного КЭ10, предварительно вычисленной как для железобетонного сечения с одиночной арматурой: с начальной жесткостью, конечной (начальной жесткостью, уменьшенной в два раза).

Анализ результатов расчета моделей сцепления. По результатам расчета представленных моделей в ПК Ли́ра-САПР построены графики распределения внутренних усилий, напряжений, перемещений и деформаций в элементах сцепления по длине образца при действии усилия на концах $N_s = 10$ кН (рис. 12–15).

Рис. 8. Расположение основных ЭС в модели с элементами сцепления, работающими на сжатие

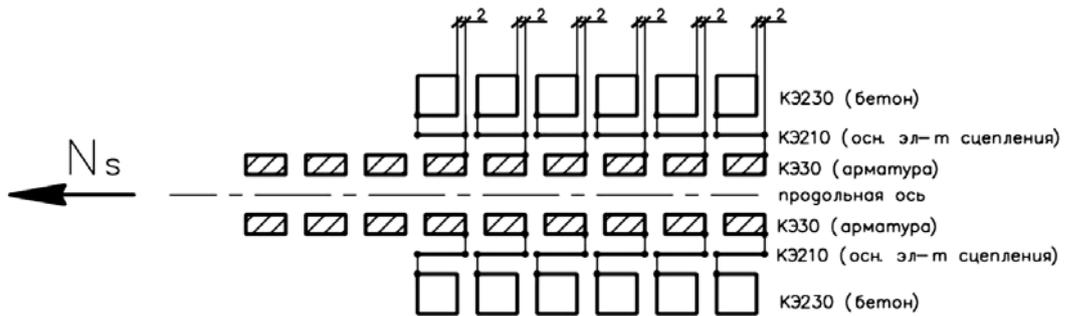
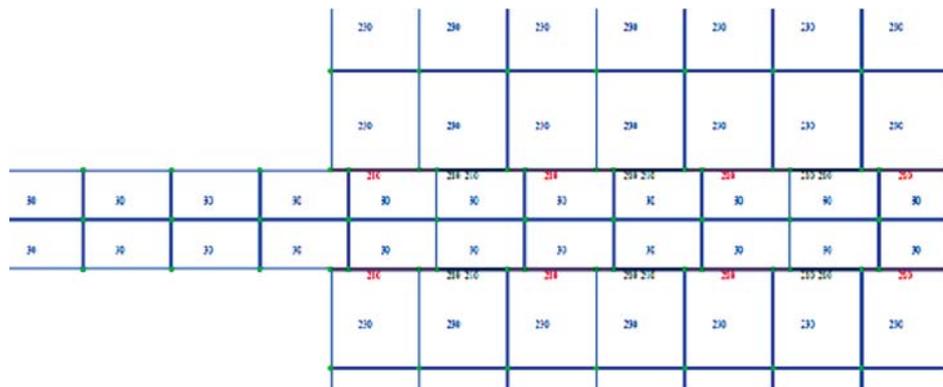


Рис. 9. Зона контакта КЭ арматуры, бетона и ЭС, работающими на сжатие в расчетной схеме модели ПК Ли́ра-САПР



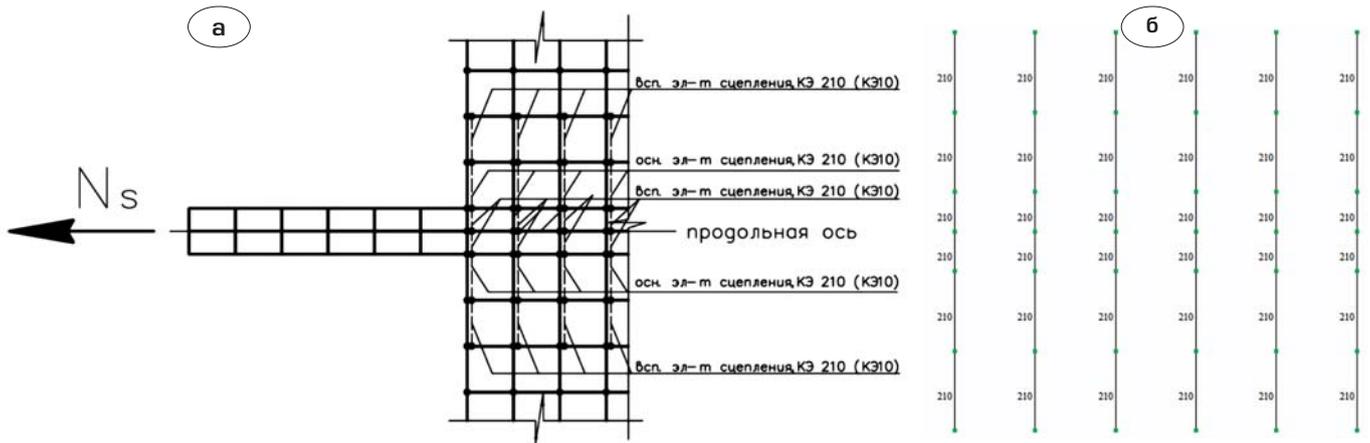


Рис. 10. Основные и вспомогательные элементы сцепления при сопряжении с элементами модели (а) и выделенные элементы по отдельности (б)

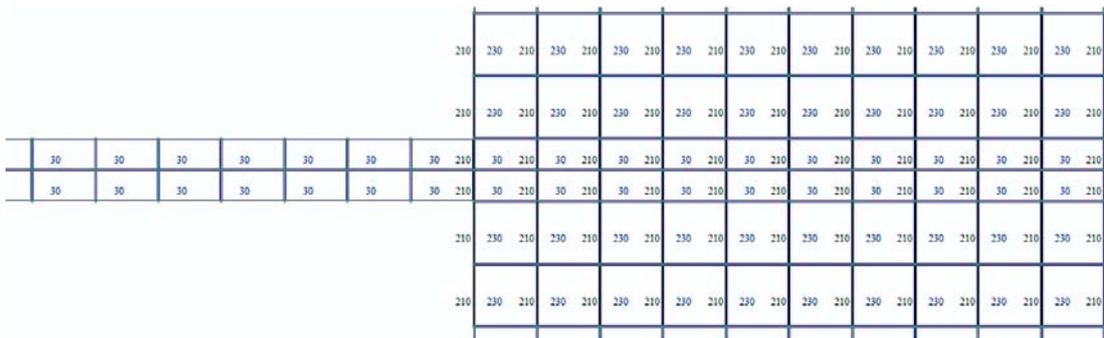


Рис. 11. Зона контакта КЭ арматуры, бетона и элементов сцепления, работающих на сдвиг в расчетной схеме модели в ПК Лира-САПР

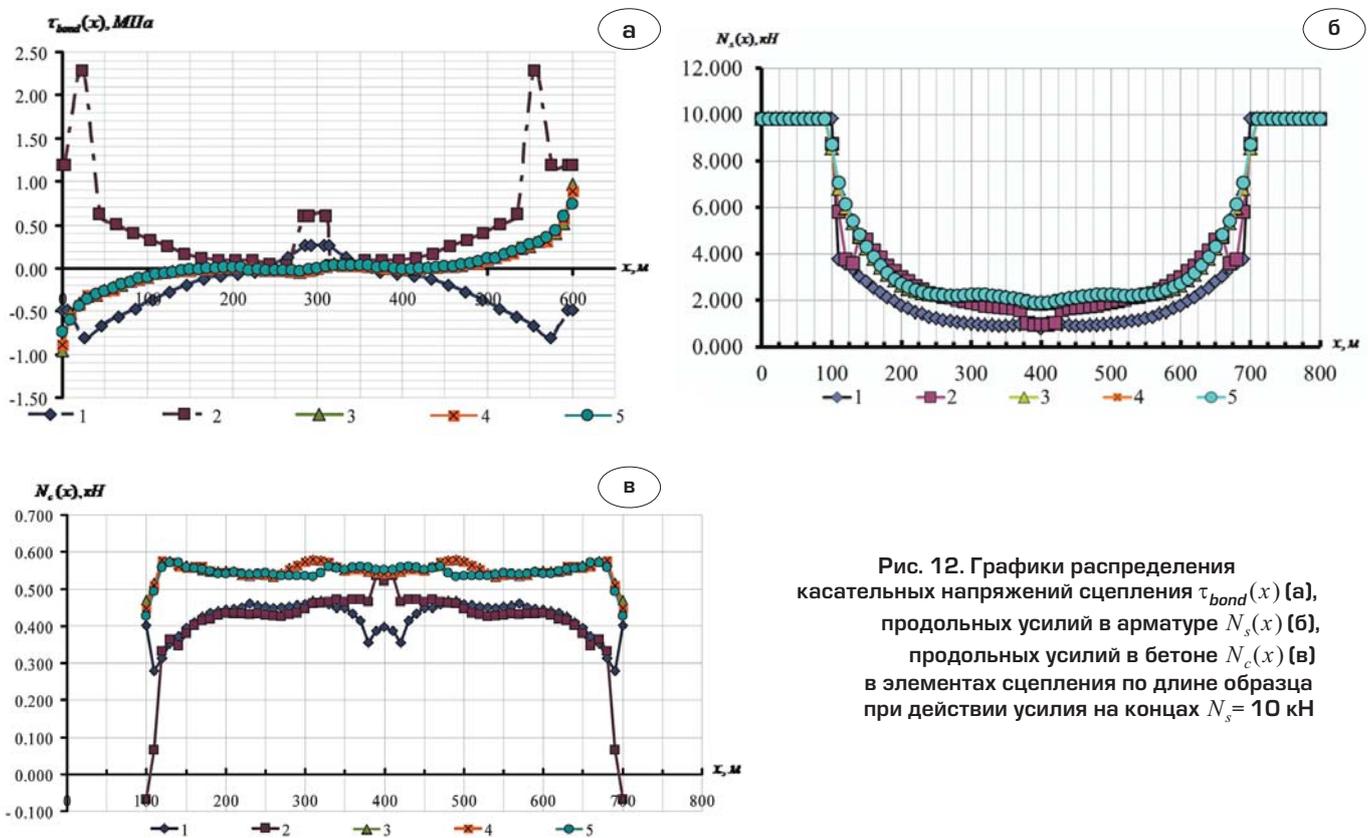


Рис. 12. Графики распределения касательных напряжений сцепления $\tau_{bond}(x)$ (а), продольных усилий в арматуре $N_s(x)$ (б), продольных усилий в бетоне $N_c(x)$ (в) в элементах сцепления по длине образца при действии усилия на концах $N_s = 10 \text{ кН}$

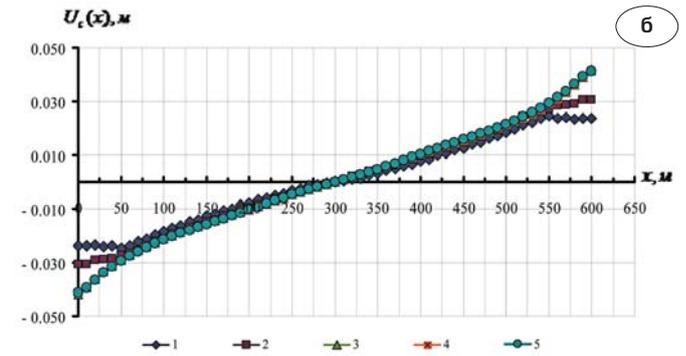
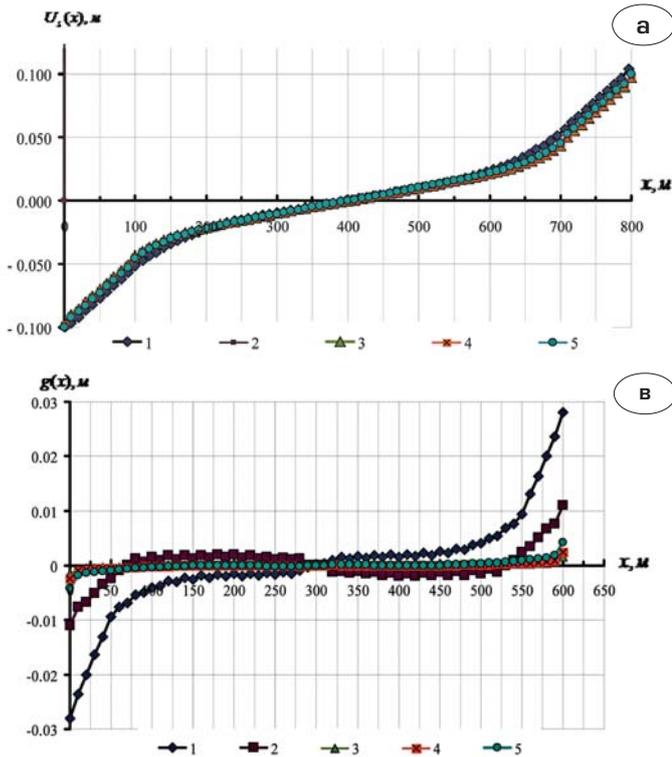


Рис. 13. Графики распределения перемещений в арматуре $U_s(x)$ (а), в бетоне $U_c(x)$ (б), взаимных смещений $g(x)$ (в) по длине образца в моделях сцепления арматуры с бетоном при действии усилия на концах $N_s = 10 \text{ кН}$

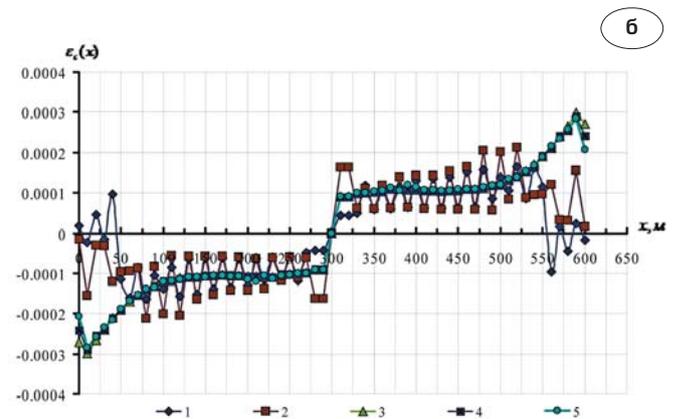
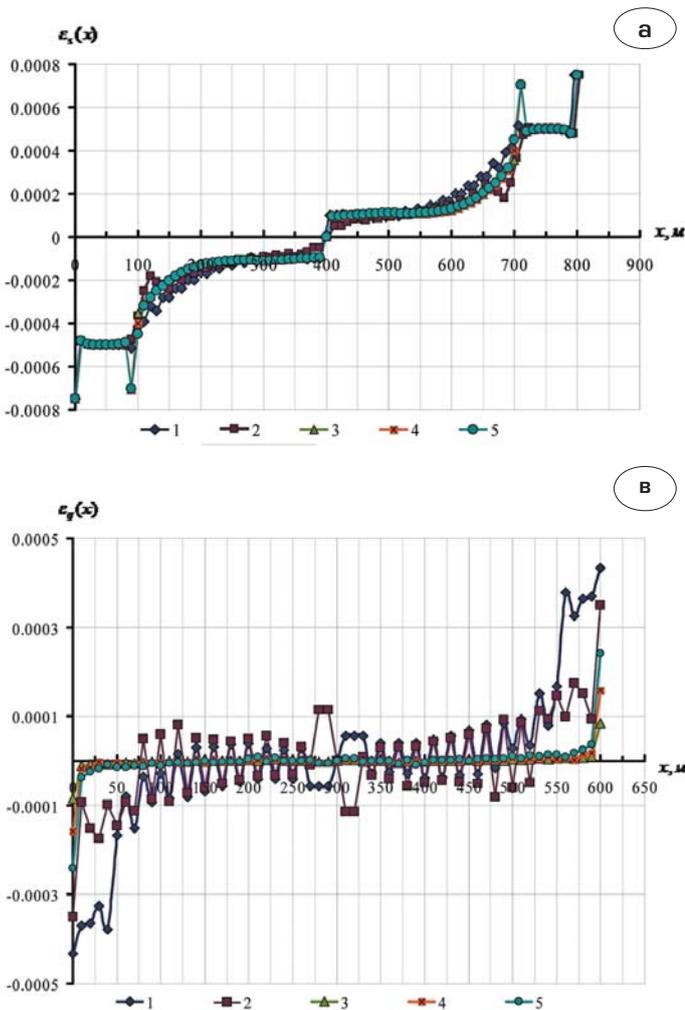


Рис. 14. Графики распределения относительных продольных деформаций в арматуре $\varepsilon_s(x)$ (а), в бетоне $\varepsilon_c(x)$ (б), относительных взаимных смещений $\varepsilon_g(x)$ (в) по длине образца в моделях сцепления арматуры с бетоном при действии усилия на концах $N_s = 10 \text{ кН}$

Здесь на всех графиках (рис. 12–15) введены следующие обозначения для исследуемых кривых: 1 – модель сцепления арматуры с бетоном со сжатыми элементами сцепления; 2 – с растянутыми элементами сцепления; 3 – с нелинейными элементами сцепления, работающими на сдвиг; 4 – с упругими элементами, работающими на сдвиг (начальная жесткость); 5 – с упругими элементами, работающими на сдвиг (уменьшенная жесткость).

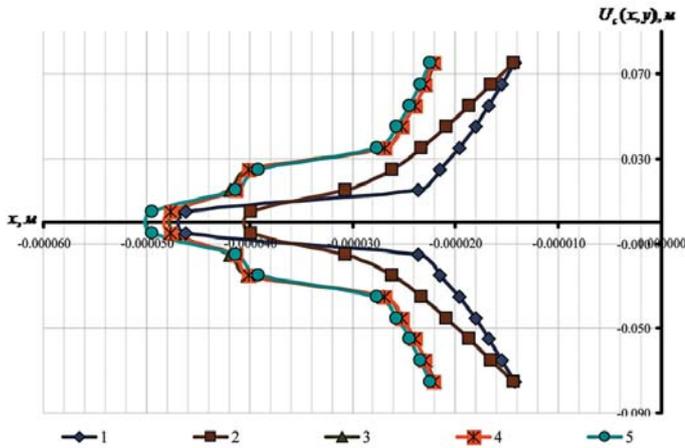


Рис. 15. Графики перемещения торца по высоте образца в моделях сцепления арматуры с бетоном $U_c(x, y)$ при действии усилия на концах $N_s = 10$ кН

Взаимные смещения $g(x)$ и относительные взаимные смещения $\varepsilon_g(x)$ арматуры относительно бетона определяются по формулам:

$$g(x) = U_s(x) - U_c(x); \quad (1)$$

$$\varepsilon_g(x) = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x). \quad (2)$$

Выводы и результаты численных исследований.

1. Графики распределения касательных напряжений сцепления $\tau_{bond}(x)$ по длине стержня (рис. 12, а), полученные по моделям 1 и 2, имеют сходные очертания (с одним отличием – кривая 1 располагается ниже оси абсцисс в связи с отрицательными значениями усилий, действующих в элементах). Эти кривые монотонно возрастают от середины образца до торца и имеют максимум в точке, находящейся на расстоянии 50 мм от торца образца, после чего наблюдается снижение касательных напряжений, их значения в этой точке по модулю различаются существенно – значения, полученные по модели 2, на 135,5 % больше значений, полученных по модели 1.

Анализ графиков, полученных по моделям 3–5 (с ЭС, работающими на сдвиг), показывает, что в этом случае кривые монотонно возрастают от середины образца до края, с максимальным значением касательных напряжений в крайней точке образца (на торце призмы) с незначительной разницей по значениям, среди которых наибольшее дает модель 3. Касательные напряжения в сечении на краю образца, полученные по модели 3, превышают

значения напряжений, полученные по моделям 4 и 5, на 8,11 % и 22,93 % соответственно (т.е. в модели с уменьшенной линейной жесткостью элементов сцепления касательные напряжения на краю минимальные).

2. Кривые, характеризующие распределение продольных усилий в арматуре N_s (рис. 12, б), вогнутые, монотонно возрастают от середины образца до торца, с достижением максимального значения в крайней точке образца. При этом на участке образца от 400 мм до 600 мм возрастание незначительно: наибольший основной прирост усилия N_s наблюдается на участке от 600 мм до 700 мм (если рассматривать правую от оси симметрии часть образца), максимальное расхождение для модели 1 составило 65,8 %. При сопоставлении значений продольных усилий в арматуре, полученных по разным моделям, следует отметить, что для моделей 2–5 значения усилий близки, о чем свидетельствует «наложение» кривых. Значения усилий, полученные по модели 1, меньше, кривая по модели 1 по всей длине образца располагается ниже по оси ординат, чем остальные. Максимальное расхождение по значениям, полученным по модели 1 и 2, составило 48,7 %, 1 и 3 – 58,6 %.

3. Графики распределения продольных усилий в бетоне N_c (рис. 12, в) по длине стержня по всем моделям показывают равномерное убывание усилия на участке от опорного закрепления образца (оси симметрии) до торца призмы, при этом интенсивность убывания резко возрастает на участке от 670 мм до 700 мм (если рассматривать правую от оси симметрии часть образца).

Также следует отметить, что значения N_c по длине образца имеют достаточно близкие значения по кривым, полученным по моделям 1 и 2 (если не учитывать приопорные и концевые участки, максимальное расхождение составляет 8 %). То же можно сказать и о кривых, построенных по моделям 3–5 (7,96 %). Однако между значениями по кривым 1–2 и 3–5 имеет место достаточно существенная разница (в большинстве точек графиков расхождение колеблется от 15 % до 44 %), что объясняется принципиально разными подходами к моделированию элементов сцепления: в моделях 1–2 элементы сцепления расположены вдоль действия растягивающего усилия, а в моделях 3–5 перпендикулярно ему.

Примечательно, что только кривая, построенная по модели 1, пересекает ось абсцисс в конечной точке, значение которой близко к нулю, остальные кривые по левой и правой граничным точкам образца имеют достаточно большие значения усилий от 0,402 кН до 0,469 кН.

4. Кривые перемещений в арматуре U_s (рис. 13, а), построенные по всем рассматриваемым моделям, имеют одинаковое очертание, совпадают по контуру, среднее расхождение по значениям перемещений составляет 25,9 %. Значения по кривым равномерно возрастают от середины образца до торца, при этом на участке от 700 мм до 800 мм (если рассматривать правую от оси симметрии часть образца) интенсивность возрастания увеличивается.

5. Графики распределения перемещений в бетоне U_c (рис. 13, б) также имеют большую сходимость по значениям между моделями на участке от 300 мм до 550 мм (если рассматривать правую от оси симметрии часть образца, максимальное расхождение между 1 и 2 моделями составляет 19,2 %, между 1 и 3 – 6,46 %, между 1 и 4, 5 моделями – 7,61 %). Однако на участке от 550 мм до 600 мм расхождение по значениям увеличивается, особенно ярко это прослеживается между кривыми, построенными по моделям 1 и 3–5, – максимальное расхождение составляет 26,7 %. Значения перемещений в бетоне U_c также возрастают от середины до торца образца, однако для моделей 1 и 2 характерным является падение градиента возрастания перемещений U_c на конечном участке (от 550 мм до 600 мм), тогда как для кривых, построенных по моделям 3–5, продолжается рост градиента перемещений.

6. Графики распределения взаимных смещений $g(x)$ (рис. 14, в) по длине стержня x для всех моделей на участке от защемленного сечения образца (середины) до 550 мм (если рассматривать правую половину элемента) возрастают с максимальным расхождением между граничными точками участков для моделей 1–5: 108,4 %, 127,2 %, 116,9 %, 117 %, 117,9 % соответственно. На участке от 550 мм до торца образца наблюдается резкое увеличение градиента возрастания взаимных смещений $g(x)$. Разница между максимальным и минимальным значением смещений на участке для моделей 1–5 составила – 364,2 %, 201,7 %, 395,8 %, 453,2 %, 369,1 % соответственно.

Наибольшие взаимные смещения получены по модели 2 (со сжатыми элементами сцепления), в сечении на торце образца ($x = 600$ мм) – 0,028 мм, что на 60,5 % больше чем по модели 1 (с растянутыми элементами сцепления) и на 1861,6 %, 1045 % и 571 % больше чем по моделям 3–5 соответственно.

Взаимные смещения $g(x)$ на конце образца, полученные по моделям с элементами сцепления, расположенными вдоль действия растягивающей нагрузки (модели 1, 2), существенно отличаются от взаимных смещений, получаемых по моделям с элементами сцепления, расположенными перпендикулярно действию нагрузки (модели 3–5).

7. Кривые относительных продольных деформаций в арматуре $\varepsilon_s(x)$ (рис. 14, а) по длине стержня x , построенные по рассматриваемым моделям, незначительно отличаются, и характер их распределения по длине стержня во многом похож на характер распределения перемещений $U_s(x)$, $U_c(x)$, $g(x)$ и усилий $N_s(x)$, $N_c(x)$: для этих кривых характерно наличие небольшого участка приращения градиента относительных продольных деформаций арматуры $\varepsilon_s(x)$ (длиной 50 мм), близкого к месту приложения растягивающей нагрузки и участка с меньшим градиентом прироста деформаций (от 300 мм до 550 мм, если рассматривать правую часть образца).

8. Имеются некоторые различия между моделями по графикам деформаций $\varepsilon_s(x)$: на кривой деформаций $\varepsilon_s(x)$, построенной по модели 2, наблюдается убывание её на участке от 660 мм – 675 мм, значение деформаций в арматуре падает на 6,5 %. Затем происходит возрастание градиента деформаций $\varepsilon_s(x)$, характерное для остальных графиков.

Для кривой относительных продольных деформаций в арматуре $\varepsilon_s(x)$, построенной по модели 1 (со сжатыми элементами сцепления), на участке от 450 мм до 675 мм наблюдается некоторое уменьшение значений деформаций в промежуточных точках графиков, при увеличении их в каждой последующей точке (т.е. общая тенденция к увеличению относительных деформаций по длине сохраняется), что придает графику пилообразный вид. Максимальное расхождение по значениям перемещений составило 11,9 %. Для графика, полученного по модели 2, наблюдается аналогичный эффект на том же участке, при максимальном расхождении по значениям в 12,2 %.

9. Рассматривая графики распределения относительных продольных деформаций в бетонных элементах $\varepsilon_c(x)$ (рис. 14, б), следует отметить наличие двух участков увеличения градиента возрастания деформаций по длине, 1 участок (от 300 до 550 мм, 5/6 длины половины образца, максимальное расхождение составило для модели 1 – 41,3 %, 2 – 165 %, 3 – 109,7 %, 4 – 113,7 %, 5 – 107,2 %), 2 участок (от 550 до 600 мм, 1/6 длины половины образца, максимальное расхождение составило для модели 1 – 84,5 %, 2 – 115,4 %, 3 – 42,6 %, 4 – 26 %, 5 – 10,3 %).

Во всех моделях наблюдается уменьшение значений $\varepsilon_c(x)$ в конечной точке, соответствующей торцевому сечению образца. Для моделей 1–5 уменьшение составило 943,6 %, 235,8 %, 9,92 %, 19,6 % и 36,6 % соответственно.

Также следует отметить пилообразный характер кривых, построенных по моделям 1, 2.

10. В сечении, соответствующем торцу образца, наибольшие значения деформаций $\varepsilon_c(x)$ получены по модели 3 и составили 0,00027, что на 11,8 % больше чем по модели 4 и на 30,7 % больше чем по модели 5. Значения в этом сечении, полученные по моделям 1 и 2, близки к нулю и несопоставимы со значениями, полученными по моделям 3–5.

Для графиков относительных взаимных смещений $\varepsilon_g(x)$ (рис. 14, в), построенных по моделям 1 и 2, также характерна некоторая «пилообразность», максимальные значения относительных взаимных смещений на правом торце получены по модели 1 и составили 0,0004336, что больше на 24 %, 414,4 %, 173,4 % и 80,1 % чем по моделям 2–5 соответственно.

Для графиков $\varepsilon_g(x)$, построенных по моделям 3–5, характерным является очень низкий

градиент возрастания $\varepsilon_g(x)$ практически по всей длине образца (от 300 до 690 мм), и только в конечной точке наблюдается резкий скачок относительных взаимных смещений. Для модели 3 прирост составил 680,6 %, для модели 4 – 816,8 %, для модели 5 – 545,6 %.

11. График перемещения торца образца под действием нагрузки, выдергивающей арматурный стержень из бетонной матрицы (рис. 15), показывает, что наибольшие перемещения возникают в модели 5 (модель с упругими элементами сцепления, уменьшенная жесткость), близкие к ним по значениям показывают модели 3,4 (в крайних точках образца, примыкающих к арматурным КЭ, продольные перемещения в этих моделях меньше на 4,69 % и 3,67 % соответственно, чем по модели 5). Максимальные продольные перемещения, полученные по модели 1 (со сжатыми элементами сцепления), также близки к перемещениям, полученным по моделям 3–5, они меньше чем перемещения, полученные по модели 5, на 7,1 %. Наименьшие продольные перемещения получены в модели 2 (с растянутыми элементами сцепления), они на 24 % меньше максимальных (полученных по модели 5).

Также следует обратить внимание на форму, очертание кривых, которые отличаются по моделям 3–5 и 1, 2. Наибольшие продольные перемещения точек по высоте сечения торца наблюдаются в моделях 3–5. Наибольшее удаление крайних точек кривой, примыкающей к арматурным КЭ, от остальных точек торцевого сечения наблюдается на кривой, построенной по модели 1. Наибольшая «равномерность», плавность перемещений наблюдается на кривой, построенной по модели 2.

[1] Гольцшев А.Б. Сопротивление железобетона: монография / А.Б. Гольцшев, В.И. Колчунов. – К.: Основа, 2009. – 432 с.
 [2] Бондаренко В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона: монография / В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 472 с.
 [3] Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона: монография / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
 [4] Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном: монография / М.М. Холмянский. – М.: Стройиздат, 1981. – 184 с.

[5] Левин В.М. Математическое моделирование совместного деформирования арматурного стержня и бетона в окрестности изолированной трещины (применительно к модели дискретных трещин) / В.М. Левин, Н.Ю. Рогожин // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – 2015. – № 3(113). – С. 5–7.
 [6] Kolchunov V.I. The analytical core model formation of the nonlinear problem bond armature with concrete / V.I. Kolchunov, I. A. Yakovenko, E.A. Dmitrenko // Збірник наукових праць. Серія галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава: ПолтНТУ, 2016. – Вып. 2(47). – С. 140–149.

Надійшла 16.06.2016 р. 