

УДК 624.074.04

ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ГНУЧКОЇ ПРУЖНОЇ НИТКИ

Викладено короткий огляд історії розрахунку гнучких ниток. Розглянуто метод вирішення просторової задачі пружної рівноваги гнучкої пружної нитки під дією довільних вертикального і горизонтального навантажень, заснований на строгій постановці принципу Лагранжа. Представлені результати оцінки точності отриманих рішень.

The brief review of history of calculation of flexible filaments is expounded. The method of decision of spatial task of resilient equilibrium of flexible resilient filament is considered at an action arbitrary vertical and horizontal loading, based on the strict raising of principle of Lagrange. The results of estimation of exactness of the got decisions are presented.

Ключові слова: гнучка пружна нитка, пружна рівновага, просторова задача, оцінка точності.

Початковою точкою відліку історії розрахунку гнучкої нитки зазвичай прийнято вважати 30-ті роки XIX століття, коли французький інженер Клод-Луї Нав'є (Claude-Louis Navier) [10] вперше опублікував отримане ним рішення рівняння кривої нерозтяжної нитки, що перебуває під дією вертикального навантаження. Згодом багато вчених присвячували свої дослідження різним питанням, пов'язаним із розрахунком гнучких ниток. Причому спочатку ця теорія розвивалася як одна зі складових теорії розрахунку висячих мостів шляхом вирішення тих чи інших частинних задач під дією окремих видів навантажень [5, 6].

Перший крок у напрямку узагальнення рішень гнучкої нерозтяжної нитки було зроблено в працях [8, 9], у яких для досягнення зазначеної мети використовувався принцип можливих переміщень, що відрізняється своєю фізичною наочністю, широкою варіативністю у виборі варійованих параметрів і високою універсальністю при вирішенні задач механіки (принцип Лагранжа). Однак, внаслідок застосування цього принципу до кінцевих переміщень, вдалося отримати лише наближений розв'язок задачі для пологої нитки при безперервній функції вертикального навантаження, що, беручи до уваги нелінійність роботи нитки під навантаженням, є не цілком строгим.

Дещо пізніше з'явилася монографія [3] і статті [2, 4], що містять більш точне рішення для гнучкої нерозтяжної нитки під дією довільного вертикального навантаження, яке базується на використанні строгої інтерпретації принципу Лагранжа, тобто на його застосуванні до переміщень нескінченно малих, а не кінцевих. Крім того, у зазначених роботах запропонований спосіб врахування пружних деформацій,



О.В. Шимановський
генеральний директор
ТОВ «Укрінсталькон
ім. В.М. Шимановського»,
член-кореспондент НАН України,
заслужений діяч науки і техніки
України, д.т.н., професор

розроблений уточнений метод розрахунку гнучких пружних ниток і дана оцінка прийнятих припущень на точність розрахунку. А кінцеве рівняння, що описує напружено-деформований стан нитки, представлено у виді

$$H^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H^2 = \frac{D\omega}{2lm^3}, \quad (1)$$

де $\omega = EF$ – жорсткість нитки на розтяг; H – розпір; l – прогін; $n = l/f$ і $m = L/l$ – безрозмірні коефіцієнти; L – довжина нитки; f – початкова стріла провисання; D – інтегральна характеристика навантаження, що розраховується за формулою

$$D = \int_0^l qM^6 dx = \int_0^l (Q^6) dx, \quad (2)$$

у якій під M^6 і Q^6 розуміється балковий вигинальний момент і балкова поперечна сила від заданого довільного навантаження $q(x)$ в умовній прямолінійній балці, яка за всіма своїми параметрами аналогічна гнучкій нитці.

Звернемо тепер увагу на те, що значення введеної характеристики D можуть бути обчислені в кожному конкретному розрахунковому випадку або безпосереднім інтегруванням, або за методом Верещагіна [7], або ж за квадратурними формулами Ньютона–Котеса [1]. При цьому тут, природно, необхідно враховувати умови навантаження або, іншими словами, наступне: якщо функція навантаження не є безпе-

рервною на всьому прогоні, то інтеграли в виразах (2) обчислюються окремо на кожній ділянці, де функція навантаження неперервна, а результати підсумовуються. Якщо ж навантаження представлено у вигляді зосереджених сил, то зазначені інтеграли замінюються сумою з добутку цих сил на ординати відповідної епюри моментів.

З попереднього викладення випливає, що теорія розрахунку гнучкої нитки розроблена досить повно. Проте, у всіх не тільки згаданих вище, а й інших відомих публікаціях замовчується питання щодо розв'язку просторової задачі пружної рівноваги гнучкої пружної нитки. І тому в даній роботі пропонується метод вирішення зазначеної задачі під дією довільних вертикального і горизонтального навантажень, заснований на строгій постановці принципу Лагранжа, тобто досліджується загальний випадок роботи гнучких несівних елементів висячих систем.

Розгляд почнемо з припущення про те, що гнучка пружна нитка з модулем пружності E і поперечним перерізом площею F навантажена довільними вертикальним $q(x)$ і горизонтальним $p(x)$ навантаженнями і перебуває у стані рівноваги. Далі відповідно до загальноновстановленої процедури принципу можливих переміщень виберемо при виведенні розв'язних рівнянь як незалежну змінну жорсткість нитки на розтяг $\omega = EF$, а як шукану функцію приймемо величину розпору H . Також будемо вважати, що жорсткість ω отримала дуже мале, але кінцеве приращення своєї величини, що дорівнює $\delta\omega$. При цьому цілком очевидно, що зміняться величини внутрішніх зусиль, які діють у нитці, і її геометрія. А саме: розпір H отримає деяке збільшення δH , нитка переміститься зі свого

положення рівноваги у вертикальній площині на величину δy і у горизонтальній площині – на величину δz (рис. 1).

Останні величини з урахуванням відомого співвідношення, що пов'язує стрілу провисання нитки з балковим моментом і розпором [3], а також нехтування впливом дуже малих осьових переміщень точок прикладання навантаження на значення цих моментів, можуть бути виражені так:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 \delta H}{H(H + \delta H)}; \quad (3)$$

$$\delta z = -\frac{M_y^6 \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (4)$$

Робота зовнішніх сил обчислюється як інтеграл із добутків функцій навантажень $q(x)$ і $p(x)$ на представлені співвідношеннями (3) і (4) переміщення δy і δz , поширений на всю довжину прогону l , а саме:

$$U_1^1 = -\int_0^l \frac{q(x) M_z^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx = -\frac{D_z \delta H}{H(H + \delta H)}; \quad (5)$$

$$U_1^2 = -\int_0^l \frac{p(x) M_y^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx = -\frac{D_y \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (6)$$

Причому тут, за аналогією з (1) прийнято, що D_z – інтегральна характеристика вертикального, а D_y – інтегральна характеристика горизонтального навантаження.

Перейдемо тепер до визначення роботи внутрішніх сил. Пружне подовження нескінченно малого елемента нитки dx можна відобразити таким чином:

$$\delta dx = \left(\frac{H + \delta H}{\omega + \delta\omega} - \frac{H}{\omega} \right) dx = \frac{\omega \delta H - H \delta\omega}{\omega(\omega + \delta\omega)} dx. \quad (7)$$

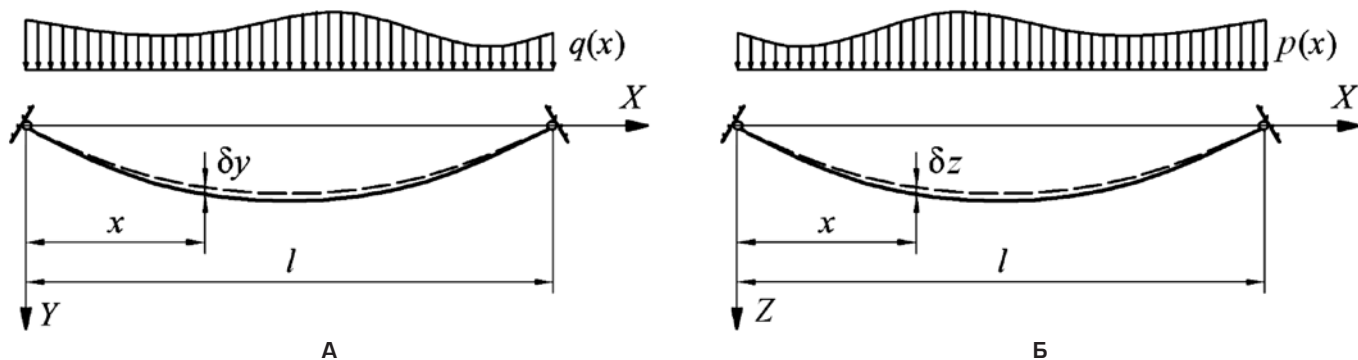


Рис. 1. До виведення диференційного рівняння:
а – вертикальна проекція; б – горизонтальна проекція

У свою чергу, елементарна робота внутрішніх сил визначиться у вигляді добутку з протилежним знаком пружного подовження δdx на величину діючого в елементі зусилля, що дорівнює $H + \delta H$, а повна робота – як інтеграл цього добутку, поширений на всю довжину прогону l :

$$U_2 = - \int_0^l \frac{(\omega \delta H - H \delta \omega)(H + \delta H)}{\omega(\omega + \delta \omega)} dx. \quad (8)$$

Звернемося далі до принципу Лагранжа, згідно з яким сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на нескінченно малих можливих переміщеннях системи з положення рівноваги дорівнює нулю

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (9)$$

Тоді, підставляючи (5), (6) і (8) в умову (9), отримаємо:

$$- \frac{D_z \delta H}{H(H + \delta H)} - \frac{D_y \delta H}{H(H + \delta H)} - \int_0^l \frac{(\omega \delta H - H \delta \omega)(H + \delta H)}{\omega(\omega + \delta \omega)} dx = 0. \quad (10)$$

Розділивши рівняння (10) почленно на δH і переходячи потім до межі при $\delta H \rightarrow 0$ і $\delta \omega \rightarrow 0$, після деяких перетворень отримаємо диференціальну залежність між величинами розпору і жорсткості нитки або, іншими словами, загальне рішення просторової задачі пружної рівноваги гнучкої пружної нитки:

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{D_z \omega^2}{H^4} - \frac{D_y \omega^2}{H^4} = 0. \quad (11)$$

Зауважимо, що ця залежність є одним із частинних випадків диференціального рівняння Бернуллі, загальний інтеграл якого має вид

$$\frac{1}{\omega} = \frac{C}{H} + \frac{D_z}{2H^3} + \frac{D_y}{2H^3}. \quad (12)$$

Довільну постійну інтегрування C , що входить до рішення (12), можна знайти, якщо врахувати, що у разі, коли нитка нерозтяжна, тобто коли $\omega = \infty$, величина розпору визначається відомою формулою

$$H = \frac{1}{4f} \sqrt{3lD}, \quad (13)$$

з урахуванням якої остаточне рішення поставленої задачі набуває виду:

$$H^3 + \frac{8\omega}{3} H^2 = \frac{\omega}{2l} (D_z + D_y). \quad (14)$$

Якщо тепер у рівнянні (14) покласти $p(x) = 0$, то прийдемо до випадку роботи гнучкої пруж-

ної нитки лише у вертикальній площині, для якого останнє рівняння записується так:

$$H^3 + \frac{8\omega}{3} H^2 = \frac{D_z \omega}{2l}. \quad (15)$$

Слід підкреслити, що цей результат був уперше описаний у статті [4].

А тепер зупинимося на найбільш характерних моментах, які стосуються оцінки точності отриманих рішень. І відразу ж варто вказати на те, що покладені в основу цієї теорії розрахунку гнучких пружних ниток вихідні передумови і припущення можна умовно розділити на три групи:

- такі, що відображають умови роботи розглянутих конструкцій (пологість нитки, пружна робота матеріалу, мала згинальна жорсткість нитки, якою можна знехтувати);
- такі, що характеризують характер деформування поперечних перерізів нитки (одновісний напружений стан поздовжніх волокон нитки);
- такі, що відображають наближеність теорії (наприклад, нехтування впливом горизонтальних складових можливих переміщень, наближене визначення довільних постійних інтегрування при знаходженні його частинних рішень та ін.).

Слід зазначити, що дві перші групи передумов є загальноприйнятими при побудові різних теорій розрахунку балок. У зв'язку з цим їх область застосування і величина похибки, яка вноситься до результатів розрахунків, досить докладно досліджені багатьма авторами у великій кількості публікацій, у яких показано, що вони (ці передумови) забезпечують для параметрів напружено-деформованого стану конструкцій, що розраховуються, досить точні результати. І саме тому в даній роботі оцінка похибки даних передумов не наводиться.

Що ж стосується третьої групи припущень, то оцінка похибки при визначенні зусиль, що діють у гнучкій нитці, проведена шляхом порівняння з результатами, отриманими точним способом для різних випадків навантаження нитки однією зосередженою силою, тобто для найсприятливішої схеми навантаження. При цьому враховувався вплив мінімальних і максимально можливих пружних подовжень нитки у діапазоні відносних деформацій від 0 до 0,0083, що задовольняє умови застосування ниток із високоміцного сталевого дроту.

	Величина похибки ΔT_{\max} в % при α					
	0,5	0,25	0,1	0,05	0,01	0
$f_H = 0,125l, E = \infty$	-0,7	+0,4	+3,1	+4,8	+3,7	0
$f_H = 0,125l, E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа	$\frac{-0,5}{905}$	$\frac{+0,5}{1052}$	$\frac{+3,2}{830}$	$\frac{+4,9}{1310}$	$\frac{+3,4}{1405}$	0
$f_H = 0, E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа	$\frac{+0,3}{997}$	$\frac{+0,3}{910}$	$\frac{+0,8}{970}$	$\frac{+1,4}{1020}$	$\frac{+3,2}{840}$	0

Примітка. У чисельнику наведена величина похибки у %, а у знаменнику – відповідні величини напружень у найбільш напруженому поперечному перерізі нитки у МПа.

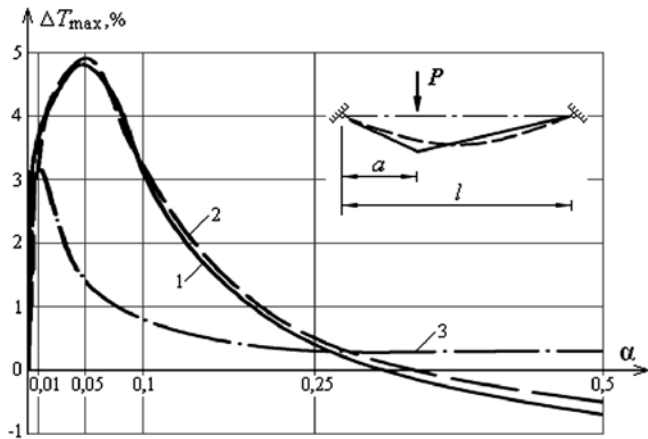


Рис. 2. Залежність між похибкою визначення максимальних зусиль у нитці ΔT_{\max} і параметром α при різних стрілах провисання та модулях пружності:
 1 – $f_H = 0,125l$ і $E = \infty$; 2 – $f_H = 0,125l$ і $E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа;
 3 – $f_H = 0$ і $E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа

Результати оцінки похибки при визначенні максимальних зусиль за формулою $T = \sqrt{H^2 + (Q^6)^2}$ наведені в таблиці. Ці ж дані проілюстровані на рис. 2, де показані криві залежності похибки визначення зусиль в нитці від параметра $\alpha = a/l$ при різних стрілах провисання і модулях пружності. При цьому в зазначену формулу підставлялися значення розпору, визначені з співвідношень (13) і (15).

З вищенаведеної таблиці і рис. 2 вбачається, що величина похибки у всіх випадках не перевищує 0,7 % у бік применшення і 4,9 % – у бік перебільшення зусиль, які діють у нитці. Найбільша ж величина похибки виникає при розташуванні зосередженого навантаження поблизу точок підвісу нитки. Втім, при переміщенні цього навантаження до центра прогону похибка швидко зменшується і стає менше 1 %.

При зменшенні стріли провисання величина похибки також істотно падає і при розрахунку струни (тобто гнучкої нитки з $f_H = 0$) стає мінімальною. Цілком очевидно, що для попередньої напруженої струни ця похибка буде ще меншою.

Крім того оцінка похибки показала, що формула, яка зв'язує стрілу провисання нитки з балковим моментом і розпором [3], може бути застосована для визначення ординат лінії рівноваги нитки у всіх випадках, коли значення тангенса кута нахилу нитки на опорі не перевищує 0,9. У цьому граничному випадку похибка становить близько 6% у бік применшення ординат. Цей граничний випадок відповідає розташуванню зосередженого навантаження на відстані $0,1l$ від опори при $l/f = 8$ і $0,01l$ при $l/f = \infty$, тобто при розрахунку струни. Більш близьке розташування зосередженого навантаження до опори практичного значення не має, а при її переміщенні у напрямку до центра прогону похибка швидко зменшується.

На завершення слід зазначити, що тут розглянуті найбільш несприятливі для прийнятих припущень схеми навантаження нитки, оскільки при несиметричному навантаженні одним зосередженим навантаженням горизонтальні переміщення нитки, якими в розрахунку нехтується, виходять найбільшими. У всіх інших видах навантаження ці горизонтальні переміщення значно зменшуються, а, отже, точність рішення підвищується.

[1] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
 [2] Мацелинский Р.Н. Расчет гибких нитей на произвольную вертикальную нагрузку // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 52–60.
 [3] Мацелинский Р.Н. Статический расчет гибких висячих конструкций. – М.-Л.: Госстройиздат, 1950. – 192 с.
 [4] Мацелинский Р.Н. Статический расчет упругих нитей // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 4. – С. 3–9.
 [5] Передерий Г.П. Курс мостов. Конструкция, проектирование и расчет. – М.-Л.: Госжелдориздат, 1933. – 490 с.
 [6] Стрелецкий Н.С. Избранные труды. – М.: Стройиздат, 1975. – 423 с.
 [7] Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.; т. 2. – 480 с.
 [8] Цаплин С.А. Висячие мосты. – М.: Дориздат, 1949. – 287 с.
 [9] Цаплин С.А. Висячие мосты. Теория и расчет. – М.-Л.: Гострансиздат, 1937. – 240 с.
 [10] Navier C-L. Rapport et me'moire sur les ponts suspendus. – Paris: Carilian – Goeury, 1830. – 326 p.

Надійшла 12.07.2016 р.