УДК 624.21:004.021

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА РЕСУРСА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЕЛЕМЕНТОВ

В статье представлены теоретические основы моделирования жизненного цикла железобетонных элементов. Рассмотрена модель их жизненного цикла. Приведен пример прогноза ресурса железобетонных элементов мостов. Показана адекватность приведенной модели.

This paper presents an approach to the service life modeling of reinforced concrete elements. Degradation models is presented. The possibility of the proposed model is discussed.

Ключевые слова: жизненный цикл, прогноз жизненного цикла, железобетонный элемент, мост.

А.И. Лантух-Лященко
Национальный транспортный университет (НТУ)
профессор, д-р техн. наук

Этой работой автор намеревается привлечь внимание научных работников и проектантов к проблеме прогноза ресурса железобетонных элементов на всех этапах жизненного цикла, начиная с проектирования, и изложить перспективный, по мнению автора, подход к решению задачи анализа долговечности. Модель прогноза ресурса, которая приводится здесь, рассматривается с точки зрения возможности ее приложения в практике проектирования железобетонных конструкций.

Проблема прогноза ресурса железобетонных элементов на этапе проектирования всегда была наименее изученной в теории сооружений, а с другой стороны – наиболее весомой в социально-экономическом плане. Сегодня приходится констатировать стремительное увеличение физически устаревших сооружений. В этих условиях нужны алгоритмы, которые дали бы на этапе проектирования количественные критерии уровня надежности и прогноза ресурса конструкций. Эти алгоритмы должны стать основой в разработке практического аппарата управления жизненным циклом сооружений.

Долгое время проблема долговечности сооружений была уделом академических кругов. Так, например, в нормах проектирования мостов термин «долговечность» не фигурировал вообще. И только, начиная с 2006 г., с принятием первого национального нормативного документа по проектированию мостов были декларированы сроки службы определяющих несущих элементов мостов 80–100 лет. В проектной практике никакого анализа долговечности не выполняется, тогда как теоретически проблема в принципе решена [1, 10, 11, 12]. Теоретически долговечность T связана с надежностью уравнением [1, 12]

$$T \qquad \underset{0}{} P(\;,t)dt\,, \tag{1}$$

где $P(\;,t)$ – функция надежности элемента, зависящая от вектора генеральных параметров и времени t; $\;$ – n – мерный вектор независимых случайных переменных: физико-механических и топологических параметров элемента; параметров нагрузки; статистических характеристик сопротивления и нагрузки.

Этот фундаментальный принцип используется нами для построения модели прогноза ресурса.

Формулировка задачи. Рассматривается задача определения времени жизненного цикла элемента в эксплуатации. Граничным условием безопасной эксплуатации есть неравенство

$$E(x,t) < R(x,t), \tag{2}$$

где $E(x,t)$ – случайная функция времени нагрузки; $R(x,t)$ – случайная функция времени сопротивления. Классическое теоретическое решение проблемы представляется интегралом сверткой – вероятностью того, что граничное состояние (1) не будет нарушено в течение времени t [1, 12]

$$p_f(t) \quad \Pr ob[E(x,t) \quad R(x,t)] \qquad F_R(x,t) \quad {}_E(x,t)dx, \tag{3}$$

где $F_R(x,t)$ – интегральная функция распределения сопротивления, зависящая от времени; ${}_E(x,t)$ – плотность распределения функции нагрузки, зависящая от времени.

Время жизненного цикла T (проектный ресурс) определяется из условия, что неравенство (2) нарушается при достижении $p_f(T) = p_{\lim}$ – граничного значения надежности при эксплуатации.

Мы же сформулируем задачу определения времени жизненного цикла элемента в эксплуатации для нагрузки – случайной переменной, не зависящей от времени. Такая постановка задачи соответствует процедуре проектирования – нагрузочный эффект в течение жизненного цикла считается постоянным, тогда как сопротивление элемента падает в силу деградации материалов во времени. Интеграл в правой части зависимости (3) в этом случае будет иметь вид

$$p_f(t) \quad \mathrm{Prob}[E(x) \quad R(x,t)] \quad \int_0^t F_R(x,t) \quad {}_E(x,t)\,dx\,dt, \qquad (4)$$

где $F_R(x,t)$ – интегральная функция распределения сопротивления, зависящая от времени; ${}_E(x)$ – плотность распределения функции нагрузки, постоянной во времени.

Зависимостью (4) задача прогноза ресурса на этапе проектирования сводится к построению интегральной функции распределения сопротивления $F_R(x,t)$ и ее интегрированию. Это достаточно универсальный подход, но построение функции $F_R(x,t)$ является весьма сложной задачей, для ее построения нужно иметь статистические характеристики материалов в функции времени ${}_E(t)$. Таких данных сегодня практически нет. Поэтому воспользуемся наиболее распространенным приемом вычисления интеграла (4) – приближенным аналитическим методом двух моментов (в других терминах – вычислением характеристики безопасности) [3, 4, 11].

Заменим интеграл в соотношении (4) аналитической функцией надежности (t)

$$p_f(t) = \mathrm{Prob}\,[E(x) < R(x,t)] = \quad (\quad (t)), \qquad (5)$$

где – стандартная нормальная функция распределения; (t) – функция надежности, устанавливающая связь характеристики безопасности со временем.

$$(t) \quad f(\ ,t) \quad f(E, R, \ {}_E, \ {}_R, t), \qquad (6)$$

где – характеристика безопасности, вычисленная при проектировании; E – среднее значение случайной переменной нагрузки; R – среднее значение случайной переменной сопротивления; ${}_E$, ${}_R$ – статистические характеристики переменных нагрузки и сопротивления (стандарты); t – время жизненного цикла.

Формулировка задачи (5)–(6) в сущности представляет собой поиск функции деградации элемента, т.е. функции падения его сопротивления в процессе эксплуатации. Модель прогноза ресурса, соответствующая этим зависимостям, приводится ниже.

Модель. Предлагаемая модель жизненного цикла железобетонного элемента – стохастическая функция надежности – описывается выражением

$$(t) \quad {}_d \quad \frac{(\ {}_c \quad {}_{\lim})t^2}{T_d^2}, \qquad (7)$$

где ${}_c$ – нормативное значение надежности; ${}_d$ – проектное значение надежности; T_d – нормативный срок службы; ${}_{\lim}$ – граничное значение надежности в эксплуатации (при $t = T$).

Из уравнения (7), полагая, что $(t) = \ {}_{\lim}$ и $t = T$, получим прогнозируемый срок службы – проектный ресурс:

$$T \quad \left[\frac{(\ {}_d \quad {}_{\lim})T_d^2}{(\ {}_c \quad {}_{\lim})}\right]^{0,5}. \qquad (8)$$

Проектная характеристика безопасности. В дополнение к модели приведем общепринятый алгоритм вычисления характеристики безопасности [4, 10], определяемой в функции среднего резерва прочности и статистических параметров сопротивления и нагрузки. В предположении нормального распределения сопротивления и нагрузки формула имеет вид

$$\frac{(\ {}_R \quad {}_E)}{(\ {}_R^2 \quad {}_E^2)^{0,5}}, \qquad (9)$$

где μ_R – среднее статистическое значение сопротивления элемента; μ_E – среднее статистическое значение нагрузки элемента; ${}_R$ – среднеквадратическое отклонение сопротивления элемента; ${}_E$ – среднеквадратическое отклонение нагрузки элемента.

Заметим, что в практических приложениях чаще применяется формула, аналогичная (9), получаемая в безразмерных единицах делением числителя и знаменателя на среднюю статистическую нагрузку элемента μ_E [10],

$$\frac{1}{\sqrt{V_E^2 \quad {}^2V_R^2}}, \qquad (10)$$

где V_E, V_R – коэффициенты вариации нагрузки и сопротивления элемента; – реальный средний коэффициент запаса

$$\frac{{}_R}{{}_E}. \qquad (11)$$

В алгоритме вычисления характеристики безопасности следует особо отметить процедуру определения средних статистически моделированных значений сопротивления и нагрузки элемента, входящих в формулу (9) или (10). Проектировщик этих значений не имеет, он в своих расчетах оперирует *характеристическими* значениями (в старых нормах это были нормативные значения). Следовательно, для использования формулы нужно из характеристических значений вычислить средние.

Статистически моделируемые сопротивления в нормах принимаются как нижние значения распределения случайной переменной, вычисленные с обеспеченностью 0,05 (5 %). В других терминах статистически моделируемые сопротивления – это такие, вероятность появления которых p_f = 0,05. Выполняется статистическое моделирование на основе нормального или логнормального закона распределения (существенной разницы в результатах нет, хотя считается что логнормальный закон более реалистично описывает физико-механические свойства материалов).

На графике распределения статистически моделируемое значение сопротивления находится слева от среднего значения (рис. 1). Эти значения, называемые характеристическими, вычисляются по формуле

$$R_k \quad {}_R(1 \quad k_R V_R), \tag{12}$$

где R_k – характеристическое сопротивление; μ_R – среднее значение сопротивления; k_R – коэффициент обеспеченности, в случае нормального распределения $k_{0,05}$ = 1,645; V_R – коэффициент вариации переменной R, $V_R = \; {}_R/\mu_R$.

Из соотношения (12) вычисляется среднее значение сопротивления

$${}_R \quad \frac{R_k}{1 \quad k_R V_R}. \tag{13}$$

Очевидно, что среднее значение сопротивления есть большим нежели характеристическое.

Среднее значение нагрузки вычисляется аналогично, с той лишь разницей что характеристическое значение находится на противоположном конце доверительного интервала 0,05 – 0,95, т.е. справа от среднего значения (рис. 2).

Характеристические значения нагрузки вычисляются по формуле

$$E_k \quad {}_E(1 \quad k_E V_E), \tag{14}$$

где E_k – характеристическая нагрузка; μ_E – среднее значение нагрузки; k_E – коэффициент обеспеченности, в случае нормального распределения $k_{0,95} = -1{,}645$; V_E – коэффициент вариации переменной E, $V_E = \; {}_E/\mu_E$.

Из соотношения (14) вычисляется среднее значение нагрузки, меньшее, в этом случае, чем характеристическое

$${}_E \quad \frac{E_k}{1 \quad k_E V_E}. \tag{15}$$

Необходимые для работы алгоритма значения коэффициентов вариации переменных сопротивления и нагрузки вычисляются по общему правилу теории вероятностей

$$Vx \quad \left(\sum_{j \; 1}^{n} (Vx_j)^2 \right)^{0,5}, \tag{16}$$

где Vx_j – коэффициенты вариации, характеризующие случайную переменную; n – количество коэффициентов вариации одной переменной.

Заметим, что в сумму формулы (16) не включены произведения квадратов коэффициентов вариации как величин второго порядка малости.

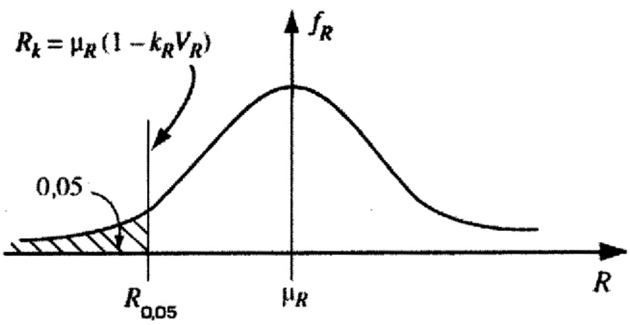

Рис. 1. К определению характеристического значения переменной сопротивления

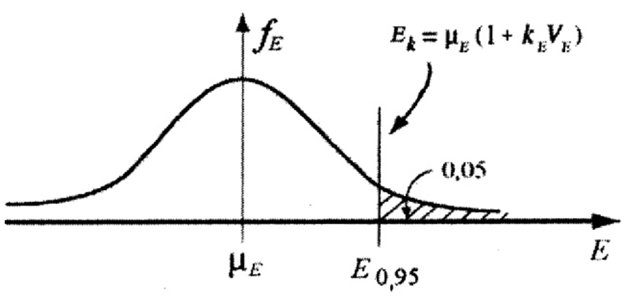

Рис. 2. К определению характеристического значения переменной нагрузки

Необходимые для вычислений коэффициенты вариации, как правило, не приводятся в нормативных документах, за исключением [3, 5]. Однако есть публикации рекомендательного характера, позволяющие достаточно достоверно подобрать коэффициенты вариации как для физико-механических свойств материалов, так и нагрузок [6, 8, 9].

Пример анализа долговечности. Рассматривается пример проектирования элемента автодорожного моста – свободно опертая железобетонная балка пролетного строения, загруженная постоянной и временной подвижной нагрузкой АК11 + толпа на тротуарах. Характеристический граничный момент сечения R = 1391 кНм. Нагрузочный эффект от характеристических нагрузок E = 1097 кНм. Требуется определить проектный ресурс T при условии: требуемый нормативный срок службы T_d = 100 лет; сооружение относится к классу СС2, минимальное начальное значение надежности принять $_c$ = 3,8 (P = 0,9999), граничное значение надежности в эксплуатации принять $_{lim}$ = 1,74 (P = 0,95907). Статистические характеристики материалов и нагрузки приведены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты вариации. Нормальное распределение

Коэффициент вариации	Значение
Арматуры	0,080
Бетона класса В 40	0,082
Постоянной нагрузки I часть	0,033
Постоянной нагрузки II часть	0,170
Временной нагрузки АК	0,240
Временной нагрузки от тандема	0,079
Временной нагрузки от толпы	0,140

Решение. Требуемый проектный ресурс T элемента определяется в два шага.

А. По изложенному выше алгоритму (9)–(16) вычисляется проектная характеристика безопасности $_d$ = 3,68.

Б. По формуле (8) вычисляется проектный ресурс.

$$T \quad \frac{(\ _d \qquad _{\lim})T_d^2}{(\ _c \qquad _{\lim})}^{0,5} \quad \frac{(3,68 \quad 1,74)100^2}{(3,80 \quad 1,74)}^{0,5}$$

97 лет.

Полученный результат несколько ниже требуемого нормами T_d = 100 лет, чего и следовало ожидать, так как проектная характеристика безопасности меньше нормативной $_d$ = 3,68 < $_c$ = = 3,80. Необходимо увеличить несущую способность сечения.

В заключение рассмотрим модель жизненного цикла несколько подробнее. На рис. 3 приведены графики надежности для нормативных сроков службы T_d = 100 и T_d = 80 лет.

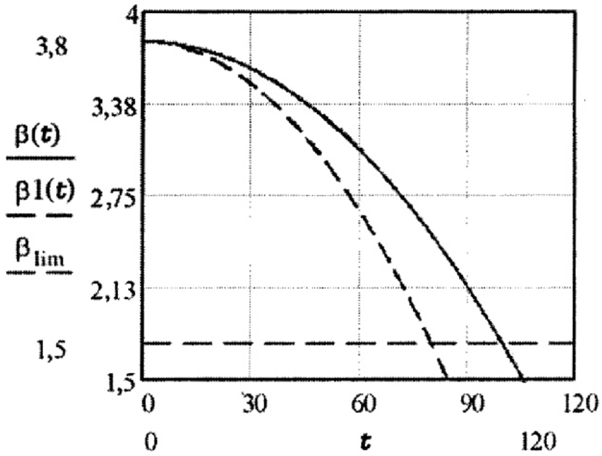

Рис. 3 Графики надежности в функции времени:
(t) и 1(t) – функции надежности при T_d = 100 и при T_d = 80 соответственно; $_{lim}$ – предельное значение надежности в эксплуатации

Проследим для заданных сроков службы прогнозы ресурса при значениях проектной характеристики безопасности в диапазоне $_d$ = 3,60 $_d$ = 4,00 (табл. 2).

Таблица 2

Прогноз ресурса в зависимости от проектного значения характеристики безопасности

Проектное значение, $_d$	Прогноз ресурса, лет		
	при T_d = 100	при T_d = 80	по модели [5, 7] при T_d = 100
3,60	95	76	94
3,70	98	78	97
3,80	100	80	100
3,90	102	82	104
4,00	105	84	107

Как видно из таблицы 2, изменение характеристики безопасности на величину плюс/минус 0,2 возле нормативного значения вызывает увеличение/уменьшение прогнозируемого ресурса на 4–5 лет. В третьей колонке приведены для сравнения прогнозы ресурса, полученные по марковской феноменологической дискретной модели с непрерывным временем [7], принятой в системе эксплуатации автодорожных мостов как нормативной [5]. Как видно, эти результаты достаточно хорошо совпадают с предлагаемой моделью в окрестности нормативного срока службы и служат здесь подтверждением ее адекватности.

Говоря о модели [7], заметим, что марковская дискретная модель, апробированная в системе эксплуатации автодорожных мостов как инструмент оценки остаточного ресурса, к сожалению, не может использоваться в прогнозировании ресурса на этапе проектирования. Эта модель построена в функции параметра интенсивности отказов, определяемого по результатам обследования сооружения, эксплуатируемого минимум 15–20 лет. Получить значение параметра интенсивности отказов в процессе проектирования сооружения весьма сложно. Попытка такого подхода приведена, например, в работе [2].

Выводы.

1. Предлагаемая модель прогнозирования ресурса железобетонных элементов, базирующаяся на анализе надежности, может быть приемлемым инструментом поиска, оптимального по параметру долговечности, варианта проекта элемента. Целесообразность и теоретическая обоснованность применения параметра надежности как критерия деградации очевидна и вытекает, прежде всего, из современной трактовки понятия надежности [11]. Модель представляет собой простой инженерный аппарат прогнозирования ресурса на всех этапах жизненного цикла, начиная с проектирования.

2. Прогноз ресурса по предлагаемой модели в некоторой степени является приближенным, в силу приближенности вычисления надежности по методу двух моментов, однако в практических приложениях эта неточность мало сказывается.

[1] *Болотин В.В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971.

[2] *Давиденко О.О.* Функція інтенсивності відмов елементів споруд. Збірник наукових праць УкрДУЗТ. Харків, 2017. Вип. 167. С. 88–96. ISSN 2413–3795, 1994–7852. GICID 71.0000.1500.3635. DOI 10.18664.

[3] ДБН В.2.3-22-2009. Мости і труби. Основні вимоги проектування. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009.

[4] ДСТУ-Н Б EN 1990:2008. Єврокод. Основи проектування конструкцій (EN 1990:2002, IDT). Введено вперше. [Чинний від 2013-07-01]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2012. – 116 с.

[5] ДСТУ-Н Б.В.2.3-23:2012. Споруди транспорту. Настанова з оцінювання і прогнозування технічного стану автодорожніх мостів. – К.: Мінрегіонбуд України, 2012. – 116 с.

[6] *Иосилевский Л.И.* Практические методы управления надежностью железобетонных мостов. – М.: НИЦ «Инженер», 1999.

[7] *Лантух-Лященко А.І.* Марковские модели накопления повреждений. Наука и искусство.//Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2009. – № 2. – С. 22–25.

[8] Рекомендации по оценке и обеспечению надежности транспортных сооружений. – М.: НИИТС. – 1989.

[9] Рекомендации по оценке надежности строительных конструкций зданий и сооружений по внешним признакам. – М.: ЦНИИПромзданий. – 2001.

[10] *Ржаницын А.Р.* Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат. – 1978. – 239 с.

[11] ISO 2394, General principles on reliability for structures. 2nd edn. Gen`eve, Switzerland, 1998.

[12] Melchers, R.E. Structural Reliability Analysis and Prediction/ Second Edition. John Wiley & Sons.– New York: 1999, 437 p.

Надійшла 12.05.2019 р.