УДК 336.711

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

© 2014 БУРТНЯК І. В., МАЛИЦЬКА Г. П.

УДК 336.71

Буртняк І. В., Малицька Г. П. Дослідження процесу Орнштейна – Уленбека методами спектрального аналізу

Метою даної статті є розробка методів обчислення наближеної ціни для широкого класу цінних паперів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко та повільно діючих факторів. Ціна опціонів залежить від стохастичної волатильності, яка описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни зводиться до розв'язання проблеми знаходження власних значень і власних функцій певного рівняння. Комбінуючи методи спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна, працюючи з інфінітезимальними генераторами двовимірної дифузії, наближено обчислити ціну фінансових інструментів як розвинення за власними функціями. В результаті дослідження розширено методику знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних-активів. Однією з основних переваг нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, обчислення ціни активу зводиться до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій і розв'язання двох рівнянь Пуассона, що відображають вплив різних факторів. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є вдосконалення і розробка методів спектрального аналізу для застосування у дослідженні стохастичної волатильності, яка залежить від багатьох неоднорідних факторів, що мають місце на фондових ринках.

Ключові слова: *стохастична волатильність, локальна волатильність, спектральна теорія, сингулярна хвильова теорія, регулярна хвильова теорія*

Рис.: *1.* **Формул**: *45.* **Бібл.**: *8.*

Буртняк Іван Володимирович – *кандидат економічних наук, доцент, кафедра економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

Email: *bvanya@meta.ua*

Малицька Ганна Петрівна – *кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математичного та функціонального аналізу, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

УДК 336.71

Буртняк И. В., Малицкая А. П. Исследования процесса Орнштейна – Уленбека методами спектрального анализа

Целью данной статьи является разработка методов вычисления приближенной цены для широкого класса ценных бумаг с помощью инструментов спектрального анализа, сингулярной и регулярной волновой теории в случае воздействия быстро и медленно действующих факторов. Цена опционов зависит от стохастической волатильности, зависимой от пути. Нахождение цены сводится к решению проблемы нахождения собственных значений и собственных функций определенного уравнения. Комбинируя методы спектральной теории сингулярных и регулярных возмущений, можно, работая с инфинитезимальными генераторами двумерной диффузии, приближенно вычислить цену финансовых инструментов как разложения по собственным функциям. В результате исследования расширена методика нахождения ориентировочной цены для широкого класса производных-активов. Одним из основных преимуществ нашей методологии ценообразования является то, что, комбинируя методы спектральной теории сингулярных и регулярных возмущений, вычисления цены актива сводится к решению уравнения методом нахождения собственных значений, собственных функций и решения двух уравнений Пуассона, отражающие влияние различных факторов. Перспективами дальнейших исследований в данном направлении является усовершенствование и разработка методов спектрального анализа для применения в исследовании стохастической волатильности, зависимой от многих неоднородных факторов, имеющих место на фондовых рынках.

Ключевые слова: *стохастическая волатильность, локальная волатильность, спектральная теория, сингулярная волновая теория, регулярная волновая теория*

Рис.: *1.* **Формул**: *45.* **Библ.**: *8.*

Буртняк Иван Владимирович – *кандидат экономических наук, доцент, кафедра экономической кибернетики, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

Email: *bvanya@meta.ua*

Малицкая Анна Петровна – *кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

UDC 336.71

Burtnyak I. V., Malytska H. P. Research of Ornstein-Uhlenbeck Process Using the Spectral Analysis Methods

The purpose of this paper is to develop methods for calculating the approximate prices for a broad class of securities with the tools of spectral analysis, singular and regular wave theory in the case of exposure to fast and slow-acting factors. Price options depend on stochastic volatility, depending on the route. Finding the price is reduced to the problem of finding own values and own functions of a certain equation. Combining the methods of the spectral theory of singular and regular perturbation working with the infinitesimal generators of the two-dimensional diffusion approximation the price of financial instruments as of own function expansion can be calculated. The study extended method of finding indicative prices for a wide class of derivative assets. One of the main advantages of our pricing methodology is that by combining the methods of the spectral theory of singular and regular perturbation; computing the price of the asset is reduced to solving the equation by finding the own values and own functions of the two solutions of the Poisson equation, reflecting the influence of various factors. Prospects for further research in this direction are the improvement and development of methods of spectral analysis for application in the study of stochastic volatility, depending on many heterogeneous factors taking place in the stock markets.

Key words: *stochastic volatility, local volatility, spectral theory, singular wave theory, the wave theory of regular*

Pic.: *1.* **Formulae:** *45.* **Bibl.**: *8.*

Burtnyak Ivan V. – *Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Department of Economic Cybernetics, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

Email: *bvanya@meta.ua*

Malytska Hanna P. – *Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Functional Analysis, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

Вступ. Спектральна теорія виникла давно і успішно застосовується у фінансовій математиці для аналізу моделей дифузії на базі розвинення за власними функціями і власними значеннями лінійних операторів. Задачі оцінювання похідних активів аналітично розв'язуються за допомогою методів спектральної теорії.

У цій статті ми продовжуємо тематику роботи [1], поширюючи її на теорію відсоткових ставок, які описуються процесом Орнштейна – Уленбека, застосовуючи методику [2 – 4].

Постановка завдання. Спектральний метод застосовано до похідних ціноутворення таким чином: використання нейтральних до ризику цін відбувається через представлення ціни похідної активу $u(t, x)$ нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу X, тобто як:

$$u(t,x) = \tilde{E}_x[H(X_t)] = \int H(y)p(t,x,y)\,dy \tag{1}$$

де $p(t, x, y)$ – щільність переходу X за ймовірністю P.

Якщо інфінітезимальний (нескінченно малий) генератор L базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розвинення за власними функціями [5 – 6]:

$$p(t,x,y) = m(y)\sum_n e^{-\lambda nt}\varphi_n(y)\,\varphi_n(x), \tag{2}$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення $(-L)$ і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $-L\,\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$.

Значення ціни похідної активу може бути виражена аналітично шляхом підстановки (2) в (1):

$$u(t,x) = \sum c_n e^{-\lambda nt}\ \varphi_n(x)\ ,$$

$$c_n = (\varphi_n, H) : \int H(y)\varphi_n(y)m(y)dy\ .$$

Розглянемо інфінітезимальний генератор загальної одновимірної дифузії:

$$L = \frac{1}{2}a^2(x)\partial^2_{xx} + b(x)\partial_x\ - k(x),\quad x\in(e_1, e_2), \tag{3}$$

з областю визначення dom(L) який завжди самоспряжений в гільбертовому просторі H – $L^2(l, m)$, де $l \in R$, $l = (e_1, e_2)$ та m – швидкість щільності дифузії.

$$m(x) := \frac{2}{a^2(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{2b(y)}{a^2(y)}dy\right)).$$

Нижня межа інтегрування $x_0 \in I$ є довільною. Відтак, при одновимірній дифузії для опису основної динаміки, спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення.

Одновимірні дифузії широко застосовуються в фінансах, але існують випадки, в яких одновимірні дифузії не є адекватними для опису динаміки базового активу. Це стосується, наприклад, досліджень стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією, але інфінітезимальний генератор багатовимірної дифузії буде самоспряженим тільки коли вектор зсуву задовольняє певні обмеження, пов'язані з волатильністю кореляційної матриці.

Комбінуючи методи зі спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну вибору як розвинення за власними функціями, хоча працюватимемо з інфінітезимальними генераторами двовимірної дифузії [7].

Спочатку розглянемо загальну одномірну дифузію $dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)dW_t$ в якої є можливість виявляти кіллінг (стрибок дефолту) на швидкості $h(X_t) \geq 0$, W_t – геометричний броунівський рух (ГБР) X завжди суворо додатний. До загальної дифузії ми додаємо два фактори нелокальної волатильності: $a(X_t) \to a(X_t)\, f(Y_t, Z_t)$. Перший фактор Y – це фактор швидко мінливих чинників. Другий фактор Z змінюється повільно. Отже, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю [8].

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір, який підтримує корельований броунівський рух (W^x, W^y, W^z) і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim Exp(1)$, яка не залежить від (W^x, W^y, W^z). Будемо вважати, що економіка з трьома факторами, описана однорідним часом, неперервним процесом Маркова $\chi = (X, Y, Z)$, який приймає значення в деякому просторі станів $E - I \times R \times R$, $I - (e_1, e_2)$ $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$. Припустимо, що χ починається в E і миттєво зникає, як тільки $X \notin I$, тобто:

$$\chi_t = \begin{cases}(X_t, Y_t, Z_t), & \tau_i > t\\ \Delta, & \tau_i \leq t\end{cases},\ \tau_i = \inf(t>0 : X_t \notin I),$$

де (X, Y, Z), задаються

$$\begin{cases} dX_t = \upsilon(X_t)dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)dW_t^x,\\ dY_t = \dfrac{1}{\varepsilon}\alpha(Y_t)dt + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)dW_t^y,\\ dZ_t = \delta c(Z_t)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^z,\\ d\left\langle W^x, W^y\right\rangle_t = \rho_{xy}dt,\\ d\left\langle W^x, W^z\right\rangle_t = \rho_{xz}dt,\\ d\left\langle W^y, W^z\right\rangle_t = \rho_{zy}dt,\\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z)\in E. \end{cases} \tag{4}$$

$$\rho_{xy}\ |,|\,\rho_{xz}\ |,|\,\rho_{yz}\ | < 1 \text{ та}$$

$$1 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho^2_{xy} - \rho^2_{xz} - \rho^2_{yz} \geq 0$$

так, щоб матриця кореляції броунівського руху була додатно визначена.

Генератори Y та Z мають вигляд:

$$\mathfrak{L}_Y^{\epsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\beta^2(y)\partial^2_{yy} + \alpha(y)\partial_y\right),$$

$$\mathfrak{L}_Z^{\epsilon} == \delta\left(\frac{1}{2}g^2(z)\partial^2_{zz} + c(z)\partial_z\right), \tag{5}$$

узгоджені з факторами $\frac{1}{\epsilon}$ та δ відповідно. Отже, Y та Z мають внутрішню шкалу часу $\epsilon > 0$ і $\frac{1}{\delta} > 0$. Зазначимо, що $\mathfrak{L}_Y^{\epsilon}$ і $\mathfrak{L}_Z^{\delta}$ мають вигляд (3) з $k(x) = 0$ для всіх $\chi \in I$. Нас цікавить оцінка похідного активу, з виплатою в час $t > 0$, яка залежить від траєкторії X. Зокрема, ми розглянемо форми виплати:

$$H(X_t)\|_{(\tau>t)}, \qquad (6)$$

де τ – випадковий час, несплати похідного активу, визначимо динаміку (X, Y, Z) за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку ми позначимо, як $\widetilde{\mathbb{P}}$

$$\begin{cases} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega,(Y_t, Z_t))dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\widetilde{W}_t^X, \\ dY_t = \left(\frac{1}{\varepsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)d\widetilde{W}_t^y, \\ dZ_t = (\delta c(Z_t) + \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t))dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\widetilde{W}_t^z, \\ d\left\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^y \right\rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\left\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^z \right\rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\left\langle \widetilde{W}^y, \widetilde{W}^z \right\rangle_t = \rho_{zy}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E. \end{cases}$$

$$d\widetilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{\upsilon(X_t) - b(X_t)}{\alpha(X_t)f(Y_t, Z_t)} + \Omega,(Y_t, Z_t)\right)dt,$$

де $d\widetilde{W}_t^y := dW_t^x + \Lambda(Y_t, Z_t)dt,$

$$d\widetilde{W}_t^z := dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t)dt.$$

Припустимо, що (7) має єдиний сильний розв’язок, τ – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів: X виходить за інтервал I, або у випадковий час τ_h, яким управляє рівень небезпеки $h(X_t) \geq 0$. Математично ми виражаємо час дефолтут наступним чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I^{\tau_h}, \\ \tau_I = inf\{t \geq 0 : X_t \notin I\}, \\ \tau_h = inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon\right\}, \varepsilon \sim Exp(1), \varepsilon(X, Y, Z). \end{cases}$$

Припустимо, що наша економіка включає надійний актив, який росте миттєво на величину $r(X_t) > 0$. Отже, якщо наша економіка включає, наприклад, «не платити дивіденди» і виносить на обговорення неплатіжний актив S, ціновий процес, який описується: $S_t = \|_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$, де простір станів X на $I = (0, \infty)$, тоді ціна активу має вигляд: $\{e^{-\int_0^t r(X_s)ds} S_t,\ t \geq 0\}$, $(\widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$ – повинен бути мартингальним, $\mathbb{G}$ – розширена фільтрація процесу. $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]\, X_t$ і $\Omega(Y_t, Z_t) = 0$ у (7). З іншого боку, якщо X тільки описує надійний відсоток через $r(X_t)$, то зміна ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ на $\widetilde{\mathbb{P}}$, не має причини змінити дрейф від $v(X_t)$, до $b(X_t)$. Однак, якщо є ефект включення ринкової ціни ризику, то в цьому випадку можливе $b(X_t) = v(X_t)$, і $\Omega(Y_t, Z_t) \neq 0$ в (7).

Оцінимо похідний актив деякого виграшу, який має вигляд (6), де час дефолту виражається формулою (8). Врахувавши нейтральний ризик ціноутворення і властивість Маркова X, ціна $u^{\epsilon,\delta}(t, x, y, z)$ похідних активів при $t = 0$ має вигляд:

$$u^{\epsilon,\delta}(t, x, y, z) = \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[exp\left(-\int_0^t r(X_s)ds\right)H(X_t \mathbb{I}_{\{t>\tau\}})\right]$$

де $(x, y, z) \in E$ вихідна точка процесу (X, Y, Z), $u^{\epsilon,\delta}(t, x, y, z)$ задовольняє наступній задачі Коші:

$$(\partial_t + \mathfrak{L}^{\epsilon,\delta})u^{\epsilon,\delta} = 0, \qquad (x, y, z) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \qquad (9)$$

$$u^{\epsilon,\delta}(0, x, y, z) = H(x), \qquad (10)$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta} = \frac{1}{\grave{o}}\mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\mathfrak{M}_3 + \sqrt{\delta}\mathfrak{M}_1 + \delta\mathfrak{M}_2, \qquad (11)$$

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy}^2 + \alpha(y)\partial_y,$$

$$\mathfrak{L}_1 = \beta(y)(\rho_{xy}a(x)f(y, z)\partial_x - \Lambda(y, z))\partial_y, \qquad (12)$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2}a^2(x)f^2(y, z)\partial_{xx}^2 + (b(x) - a(x)\Omega(y, z)f(y, z))\partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{M}_3 = \rho_{xz}\beta(y)g(z)\partial_{yz}^2,$$

$$\mathfrak{M}_1 = g(z)(\rho_{xz}a(x)f(y, z)\partial_x - \Gamma(y, z))\partial_z,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2}g^2(z)\partial_{zz}^2 + c(z)\partial_z,$$

$$k(x) = r(x) + h(x).$$

Крім початкової умови (10) функція $u^{\epsilon,\delta}(t, x, y, z)$ повинна задовольняти на кінцях інтервалу I додаткові крайові умови. З рівнянь (5) маємо, що $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_Y^1$. Вважаємо, що дифузія з генератором $\mathfrak{L}_Y^1$ має інваріантний розподіл з щільністю π, оператор $\mathfrak{L}_0$ з $dom(\mathfrak{L}_0) = L^2(\mathbb{R}, \pi)$ є самоспряженим в Гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}, \pi)$.

Розв’яжемо задачу Коші (9) – (10). Для сукупності $(f, a, \beta, Л, c, g, Г)$ не існує ніякого аналітичного розв’язку. Однак, для фіксованого δ умови (11), які містять ε відхиляються в як завгодно малому є-околі, що призводить до сингулярних збурень. Крім того, для фіксованого є умови, які містять δ, є достатньо малими для деякого малого δ-околу, що приводить до регулярних збурень. Отже, є-окіл та δ-окіл дають початок об’єднаному сингулярно-регулярному збуренню $\mathcal{O}(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Це вказує на те, що ми шукаємо асимптотичний розв’язок задачі Коші (9) – (10). Для цього розкладемо $u^{\epsilon,\delta}$ за ступенями $\sqrt{\epsilon}$ та $\sqrt{\delta}$ наступним чином: $u^{\epsilon,\delta} = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} \sqrt{\epsilon}^{\,i} \sqrt{\delta}^{\,i} u_{i,j}$. Тому наближення цін має вигляд $u^{\epsilon,\delta} \approx u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}\, u_{1,0} + \sqrt{\delta}\, u_{0,1}$.

Розглянемо регулярний розклад збурень, які породжені δ, а потім здійснимо сингулярний аналіз збурень, які стосуються є.

Регулярне розвинення збурень для $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$ і $u^{\epsilon,\delta}$, що стосується $\sqrt{\delta}$.

$$\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}=\mathfrak{L}^{\epsilon}+\sqrt{\delta}\mathfrak{M}^{\grave{o}}+\delta\mathfrak{M}_2,\quad u^{\epsilon,\delta}=\sum_{\hat{\imath}\ge 0}\left(\sqrt{\delta}\right)^{\hat{j}}u_j^{\epsilon},\ (13)$$

де

$$\mathfrak{L}^{\epsilon}=\frac{1}{\epsilon}\mathfrak{L}_0+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2,\quad \mathfrak{M}^{\grave{o}}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{M}_3+\mathfrak{M}_1. \quad (14)$$

$$u_j^{\epsilon}=\sum_{i\ge 0}(\sqrt{\epsilon})^i u_{i,j}, \quad (15)$$

Підставивши розклад (13) в (9) і збираючи члени зі ступенями $\sqrt{\delta}$, отримаємо рівняння з регулярним розвиненням збурень:

$$\mathcal{O}(1):\qquad 0=(-\partial_t+\mathfrak{L}^{\epsilon})u_0^{\epsilon}, \quad (16)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}):\qquad 0=(-\partial_t+\mathfrak{L}^{\epsilon})u_1^{\epsilon}+\mathfrak{M}^{\epsilon}u_0^{\epsilon}. \quad (17)$$

В рівняннях (16) і (17) застосуємо сингулярне розвинення збурень відносно до ε. Підставимо (14) – (15) в (16) і зберемо члени зі ступенями $\sqrt{\epsilon}$. В результаті одержимо, що $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ і $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ породжують рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right):\quad 0=\mathfrak{L}_0u_{0,0}, \quad (18)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right):\quad 0=\mathfrak{L}_0u_{1,0}+\mathfrak{L}_1u_{0,0}. \quad (19)$$

якщо $u_{0,0}$ і $u_{1,0}$ не залежать від y, то вони задовольняють рівняння (18) і (19), тому вибираємо $u_{1,0}=u_{1,0}(t,x,z)$ і $u_{1,0}=$ $=u_{1,1}(t,x,z)$. Проведемо асимптотичний аналіз для порядку $\mathcal{O}(1)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$:

$$\mathcal{O}(1):\qquad 0=\mathfrak{L}_0u_{2,0}+(-\partial_t+\mathfrak{L}_2)u_{0,0}, \quad (20)$$

$$\mathcal{O}(1):\qquad 0=\mathfrak{L}_0u_{2,0}+(-\partial_t+\mathfrak{L}_2)u_{0,0}, \quad (21)$$

Рівняння (20) і (21) є рівняннями Пуассона виду:

$$0=\mathfrak{L}_0u+\mathcal{X}. \quad (22)$$

$u\in dom\left(\mathfrak{L}_0\right)=\mathbb{L}^2(\mathbb{R},\pi)$.

$$\mathcal{X}:=\int\mathcal{X}(y)\pi(y)dy=0, \quad (23)$$

З рівнянь (20) і (21) і умови центрованості (23) випливає:

$$\mathcal{O}(1):\quad 0=(-\partial_t+\mathfrak{L}_2)u_{0,0}, \quad (24)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}):\ 0=\mathfrak{L}_1u_{2,0}+(-\partial_t+\mathfrak{L}_2)u_{1,0}. \quad (25)$$

Оператор $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}_2=\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2a^2(x)\partial_{xx}^2+(b(x)-\overline{f\Omega}a(x))\partial_x-k(x),\quad x\in(e_1,e_2),$$

$$\overline{\sigma}:=<f^2(\cdot,z)>,\quad \overline{f\Omega}:=<f(\cdot,z)\Omega(\cdot,z)>. \quad (26)$$

Враховуючи відповідні крайові умови, знайдемо розв'язок рівняння (24):

$$\mathfrak{L}_1u_{2,0}=-\left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,0}=-\left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,0}+\left(-\partial_t+\left\langle\mathfrak{L}_2\right\rangle\right)u_{0,0}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}a^2(f^2-\overline{\sigma}^2)\partial_{xx}^2-a(f\Omega-\overline{f\Omega})\partial_x\right)u_{0,0}.$$

Позначимо $\phi\eta(y,z)$ і $\eta(y,z)$ розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\mathfrak{L}_0\phi=f^2-\overline{\sigma}^2,\qquad \mathfrak{L}_0\eta=f\Omega-\overline{f\Omega}. \quad (27)$$

Використовуючи (27), знайдемо $u_{2,0}$, як:

$$u_{2,0}=-\left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2-a\eta\partial_x\right)u_{0,0}+C, \quad (28)$$

де C – константа незалежна від y. Підставимо (12) та (28) в $\left\langle\mathfrak{L}_0u_{2,0}\right\rangle$, отримаємо:

$$\left\langle\mathfrak{L}_1u_{2,0}\right\rangle=\left\langle\left(\beta(\rho_{xy}af\partial_x-\Lambda)\partial_y\right)\left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2-a\eta\partial_x\right)u_{0,0}\right\rangle=-\mathcal{A}u_{0,0}. \quad (29)$$

Оператор $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$\mathcal{A}=-\nu_3a(x)\partial_xa^2(x)\partial_{xx}^2-\nu_2a^2(x)\partial_{xx}^2-\mathcal{U}_2a(x)\partial_xa(x)\partial_x-\mathcal{U}_1a(x)\partial_x, \quad (30)$$

де $\nu_3=-\frac{\rho_{xy}}{2}\beta f\partial_y\phi,\nu_2=\frac{1}{2}\beta\Lambda\partial_y\phi,$

$\mathcal{U}_2=\rho_{xy}\left\langle\beta f\partial_y\eta\right\rangle,\quad \mathcal{U}_1=-\left\langle\beta\Lambda\partial_y\eta\right\rangle,$

Підставивши (29) в (25), отримаємо:

$$\mathcal{A}u_{0,0}=\left(-\partial_t+\left\langle\mathfrak{L}_2\right\rangle\right)u_{1,0}. \quad (31)$$

Враховуючи вираз для $u_{0,0}$ і відповідні крайові умови, можна знайти вираз для $u_{1,0}$. Повернемося до співвідношення $\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right)$. Для сингулярного аналізу збурень рівняння (17), підставимо (14) і (15) в (17), згрупуємо по ступенях $\sqrt{\epsilon}$. В результаті для $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\epsilon)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\sqrt{\epsilon})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\grave{o}}\right):\quad 0=\mathfrak{L}_0u_{0,1}, \quad (32)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\grave{o}}}\right):\quad 0=\mathfrak{L}_0u_{1,1}+\mathfrak{L}_1u_{0,1}\ , \quad (33)$$

де $\mathfrak{M}_3u_{0,0}=0$. Якщо $u_{0,1}$ і $u_{1,1}$ не залежать від y, то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (32) та (33), тому $u_{0,1}=u_{0,1}(x,z)$ і $u_{1,1}=u_{1,1}(x,z)$. Продовжуючи асимптотичний аналіз, для $\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right)$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right)\qquad 0=\mathfrak{L}_0u_{2,1}+\left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,1}+\mathfrak{M}_1u_{0,0}, \quad (34)$$

оскільки $\mathfrak{L}_1u_{1,1}=0$ і $\mathfrak{M}_3u_{1,0}=0$ для (34) знайдемо розв'язок $u_{2,1}\in L^2(\mathbb{R},\pi)$, при цьому виконується умова центрування (23). В (34) умові центрування відповідає

$$0=\left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,1}+\mathfrak{M}_1 u_{0,0}, \qquad (35)$$

де $u_{0,0}(t, x, z)$ залежить від Z тільки через $\bar{\sigma}$ і $\overline{f\Omega}$. Таким чином, в (35) $\langle\mathfrak{M}_1\rangle$ можна записати: $\langle\mathfrak{M}_1\rangle=-\mathcal{B}\partial_z$,

$$\mathcal{B}=-\nu_1 a(x)\partial_x-\nu_0, \quad \nu_1:=g\rho_{xz}\langle f\rangle, \quad \nu_0=g\langle\Gamma\rangle, \qquad (36)$$

$$\partial_z=\bar{\sigma}'\partial_{\bar{\sigma}}+\overline{f\Omega}'\partial_{\overline{f\Omega}}, \quad \bar{\sigma}':=\partial_z\overline{f\Omega}. \qquad (37)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad \left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,0}=0, \quad u_{0,0}(0,x,z)=H(x), \qquad (38)$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\epsilon}\right): \quad \left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{1,0}=\mathcal{A}u_{0,0}, \quad u_{1,0}(0,x,z)=0, \qquad (39)$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right): \quad \left(-\partial_t+\mathfrak{L}_2\right)u_{0,1}=\mathcal{B}\partial_z u_{0,0}, \quad u_{0,1}(0,x,z)=0. \qquad (40)$$

Оператори $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ та ∂_z визначені в (26), (30), (36) та (37) відповідно, та введені крайові умови при $t=0$.

Розв'яжемо рівняння (38) – (40) використовуючи власні функції $\{\psi_n\}$, власні значення $\{\lambda_n\}$ оператора $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$. Зазначимо, що $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$, поданий у (26) інфінітезимальним генератором одновимірної дифузії (3) з волатильністю $\bar{\sigma}a(x)$, відхиленням $(b(x)-\overline{f\Omega}a(x))$ та кіллінгом з рівнем $k(x)$, $dom(\langle\mathfrak{L}_2\rangle)$ включає крайові умови, які накладені на кінцях e_1 та e_2. Припустимо, що $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ має чисто дискретний спектр. Зафіксуємо Гільбертів простір $\mathcal{H}=L^2(I,m)$, , де m – щільність швидкості, яка відповідає $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$. Оператор $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ самоспряжений в $\mathcal{H}$ і його область визначення є щільною підмножиною в $\mathcal{H}$. Отже, власні функції $\{\psi_n\}$ оператора $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ формують ортогональну базу в $\mathcal{H}$. Позначимо:

$$dom(\mathcal{A}):=\{\psi\in\mathcal{H},\ \mathcal{A}\psi\in\mathcal{H}\};$$
$$dom(\mathcal{B}):=\{\psi\in\mathcal{H},\ \mathcal{B}\psi\in\mathcal{H}\},$$
$$dom(\partial_z):=\{\psi\in\mathcal{H},\ \partial_z\psi\in\mathcal{H}\}.$$

Теорема 1: Нехай рівняння власного значення:

$$-\langle\mathfrak{L}_2\rangle\psi_n=\lambda_n\psi_n, \quad \psi_n\in dom\left(\langle\mathfrak{L}_2\rangle\right), \qquad (41)$$

і припустимо, що $H\in\mathcal{H}$. Тоді розв'язок рівняння $u_{0,0}$ можна подати у вигляді:

$$u_{0,0}=\sum_n c_n\psi_n T_n, \quad c_n=(\psi_n,H), \quad T_n=e^{-t\lambda_n}.$$

Теорема 2: Нехай c_n, ψ_n і T_n є такими, як описано в теоремі 1, і визначимо:

$$\mathcal{A}_{k,n}:=(\psi_k,\mathcal{A}\psi_n), \quad U_{k,n}:=\frac{T_k-T_n}{\lambda_k-\lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{1,0}$ рівняння (40) має вигляд:

$$u_{1,0}=\sum_n\sum_{k\neq n}c_n\mathcal{A}_{k,n}\psi_k U_{k,n}-\sum_n c_n\mathcal{A}_{n,n}\psi_n tT_n. \qquad (42)$$

Теорема 3: Нехай c_n, ψ_n і T_n задовольняють умови теореми 1, нехай $U_{k,n}$ є таким, як у теоремі 2, визначимо

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}:=(\psi_k,\ \mathcal{B}\partial_Z\psi_n), \quad \mathcal{B}_{k,n}:=(\psi_k,\ \mathcal{B}\psi_n),$$

$$V_{k,n}:=\frac{T_k-T_n}{\left(\lambda_k-\lambda_n\right)^2}+\frac{tT_n}{\lambda_k-\lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{0,1}$ рівняння (39) має вигляд:

$$u_{0,1}=\sum_n\sum_{k\neq n}c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}\psi_k U_{k,n}-\sum_n c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{n,n}\psi_n tT_n+$$
$$+\sum_n\sum_{k\neq n}(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{k,n}\psi_k U_{k,n}-\sum_n(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{n,n}\psi_n tT_n+ \qquad (43)$$
$$\sum_n\sum_{k\neq n}c_n\mathcal{B}_{k,n}\psi_k(\partial_z\lambda_n)V_{k,n}-\sum_n c_n\mathcal{B}_{n,n}\psi_n(\partial_z\lambda_n)\frac{1}{2}t^2T_n.$$

Отримані наближення для ціни похідного активу мають вигляд $u^{\epsilon,\delta}\approx u_{0,0}+\sqrt{\epsilon}u_{1,0}+\sqrt{\delta}u_{0,1}$. Однак, дана похідна покладена на формальні сингулярні і регулярні аргументи збурень. Для більш точного результату, вимагаємо, щоб функція виплати $H(x)$ і всі її похідні були гладкими і обмеженими. Тоді уточнення виглядає наступним чином:

Теорема 4: Для фіксованих (t, x, y, z) існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon\leq 1$, $\delta\leq 1$ маємо:

$$\left|u^{\epsilon,\delta}-(u_{0,0}+\sqrt{\epsilon}u_{1,0}+\sqrt{\delta}u_{0,1})\right|\leq C\left(\grave{o}+\delta\right), C\geq 0.$$

Розглянемо приклад: нехай X репрезентують короткі відсоткові ставки. Однією з найвідоміших моделей коротких курсів є модель Васічека, в якій X моделюється як OU процес з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміки X задані

$$dX_t=\left(\kappa\left(\theta-X_t\right)-f(Y_t,Z_t)\Omega(Y_t,Z_t)\right)dt+f\left(Y_t,Z_t\right)+d\widetilde{W}_t^x,$$

$$r\left(X_t\right)=X_t, h\left(X_t\right)=0,$$

де Y та Z є швидко і повільно змінними факторами волатильності, на основі (7) обчислимо наближену ціну облігації з нульовим купоном. запишемо оператор $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ і пов'язану з ним щільність $m(x)$

$$\mathfrak{L}_2=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\partial_{xx}^2+\kappa(\bar{\theta}-x)\partial_x-x,$$

$$m\left(x\right)=\frac{2}{\bar{\sigma}^2}exp\left(\frac{-k}{\bar{\sigma}^2}\bar{\theta}-x)^2\right), \qquad (44)$$

$$\bar{\theta}=\theta-\frac{1}{\kappa}\overline{f\Omega}.$$

Повна виплата за облігацією з нульовим купоном має вигляд:

$$H\left(X_t\right)=\mathbb{I}_{\{\tau>t\}}=1. \qquad (45)$$

Для того, щоб знайти ціну облігації з виплатами (45), знайдемо власне значення (41) на відрізку $I=(-\infty,\ \infty)$ з $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$, яке дається (44).

$$\psi_n = \mathcal{N}_n \exp\left(-A\xi - \frac{1}{2}A^2\right) H_n(\xi + A),$$

$$\mathcal{N}_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}, \quad A = \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}},$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}), \quad \lambda_n = \bar{\theta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2} + \kappa n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$\{H\}_n$ є Ермітовим поліномом. Використаємо (3.22) і (3.28), щоб записати вирази для операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = -\vartheta_3 \partial^3_{xxx} - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2)\partial^2_{xx} - \mathfrak{U}_1 \partial_x,$$

$$\mathcal{B} = \vartheta_1 \partial_x - \vartheta_0$$

знайдемо $\mathcal{A}_{k,n}, \mathcal{B}_{k,n}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}$, на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n = 2nH_{n-1}, \qquad 2xH_n = H_{n+1} + \partial_x H_n,$$

$$H_n = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^{2n}}e^{-x^2},$$

отримаємо:

$$\mathcal{A}_{k,n} = -\vartheta_3\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{3}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{3-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)^m \frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-m)!\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\}$$

$$-(\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2)\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{2}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{2-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)^m \frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-m)!\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\}$$

$$-\mathfrak{U}_1\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\},$$

$$\mathcal{B}_{k,n} = -\vartheta_1\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\} - \vartheta_0\delta_{k,n},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n} = -\vartheta_1\bar{\sigma}'\left\{\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\bar{\sigma}}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\right]\delta_{k,n} + \right.$$

$$+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\bar{\sigma}}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\right]\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1} +$$

$$+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\bar{\sigma}}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2} +$$

$$\left. +\left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\right]\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-3)!\mathcal{N}_{n-3}}\delta_{k,n-3}\right\} -$$

$$-\vartheta_0\bar{\sigma}'\left\{\left(\frac{1}{2\bar{\bar{\sigma}}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1} + \right.$$

$$\left. +\left(\frac{-2}{\bar{\bar{\sigma}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\} -$$

$$-\vartheta_1\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma}\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\} -$$

$$-\vartheta_0\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{-1}{\kappa^2}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\bar{\sigma}}}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Результат. Орієнтовна ціна облігації розраховується на основі теорем 1 – 3.

Для облігації з нульовим купоном дохід $R^{\epsilon,\delta}$ визначається з формули:

$$u^{\in,\delta} = \exp(-R^{\in,\delta}t).$$

Наступне наближення для облігації з нульовим купоном отримаємо розкладаючи як ціну облігації $u^{\epsilon,\delta}$, так і дохід $R^{\epsilon,\delta}$ за ступенями $\sqrt{\in}$ і $\sqrt{\delta}$:

$$u_{0,0} + \sqrt{\delta}u_{1,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1} + \ldots = e^{-\left(R_{0,0} + \sqrt{\delta}R_{1,0} + \sqrt{\delta}R_{0,1}\right)t} =$$

$$= e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\delta}\left(-R_{1,0}t\right)e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\delta}\left(-R_{0,1}t\right)e^{-R_{0,0}t} + \ldots.$$

$$R^{\in,\delta} \approx R_{0,0} + \sqrt{\in}R_{1,0} + \sqrt{\delta}R_{0,1},$$

$$R_{0,0} = -\frac{1}{t}\log(u_{0,0}), \quad R_{1,0} = \frac{-u_{1,0}}{tu_{0,0}}, \quad R_{0,1} = \frac{-u_{0,1}}{tu_{0,0}},$$

Дохід облігації з нульовим купоном, зображений як функція часу залежно від терміну погашення t. Зліва на рисунку зображено модель Васічека зі швидкозмінним фактором волатильності Y та побудовано наближений дохід $R_{0,0} + \sqrt{\in}\, R_{1,0}$ для цієї моделі, вона має тільки швидкозмінні чинники волатильності, динаміка Y і f та функція волатильності задаються:

$$f := \sigma^2 \exp\left(Y_t + \frac{\beta^2}{2} + Z_t - \frac{g^2}{2}\right), \; f(Y_t) = \frac{\sigma\exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)},$$

$$\operatorname{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}dt.$$

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\in}Y_t - \frac{\beta}{\sqrt{\in}}erf(Y_t)\right)dt + \beta\sqrt{\delta}d\widetilde{W}_t^y$$

З правого боку рис. 1 побудовано модель Васічека з повільно змінним фактором волатильності Z та наближений дохід $R_{0,0} + \sqrt{\delta}\, R_{1,0}$ облігації з нульовим купоном для цієї моделі, яка має тільки повільно мінливий фактор волатильності, динаміка Z і f задаються:

$$dZ_t = (-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g\operatorname{erf}(Z_t))dt + \sqrt{\delta}gd\widetilde{W}_t^z,$$

$$f(Z_t) = \frac{\sigma\exp(Z_t)}{\exp\left(\frac{g^2}{2}\right)}.$$

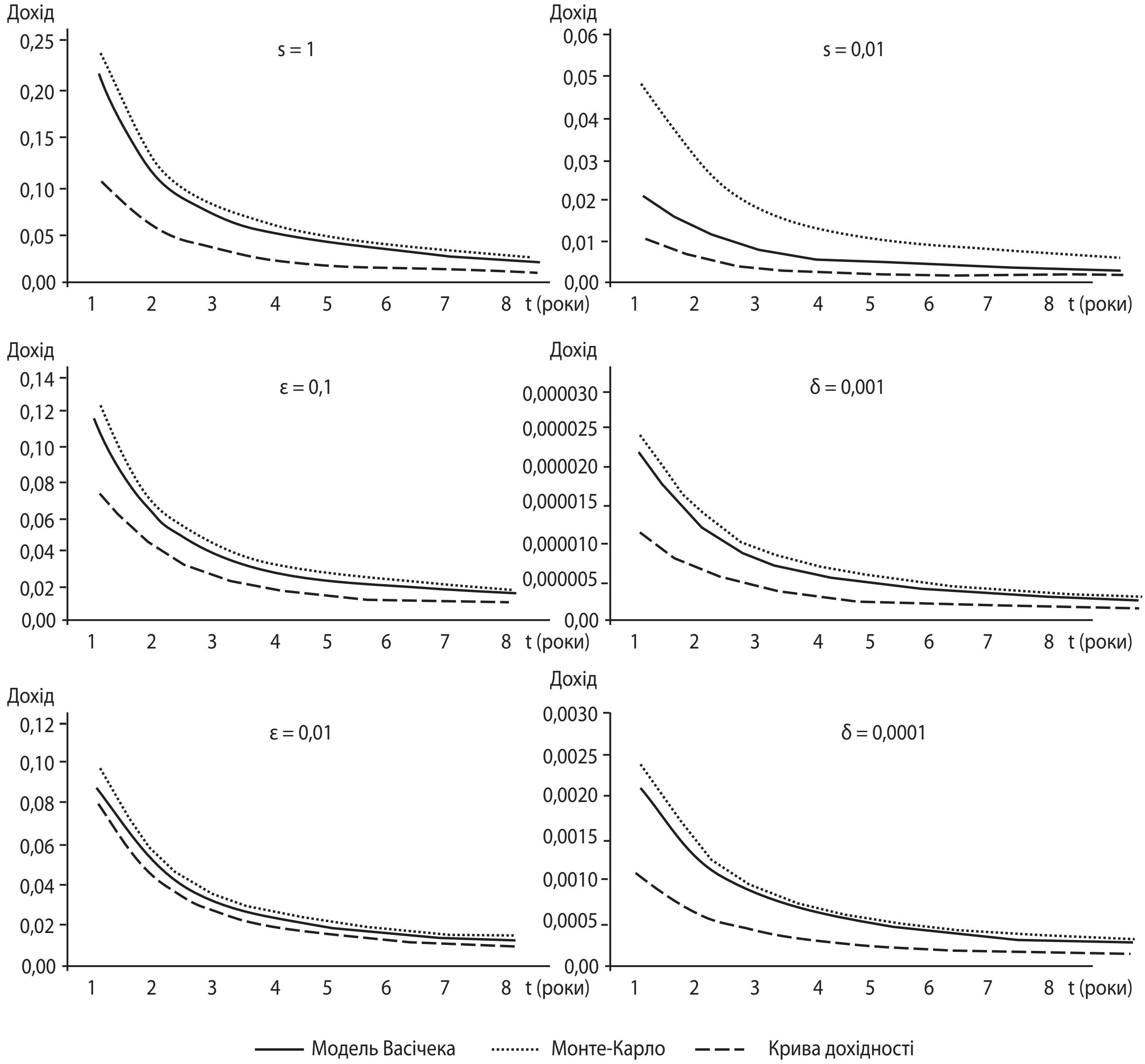

Рис.1. Дохід облігації з нульовим купоном

$$k = 0.1, \theta = \Omega = 0.01,\ g = p = 1,\ \rho_{xy} = -0.65,\ \rho_{xz} = 0.47,\ \rho_{yz} = -0.47$$

Як і слід було очікувати, оскільки ε і δ прямують до нуля, наближення прямує до повної прибутковості.

Висновок. Ця стаття розширює методику знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних-активів. Однією з основних переваг нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи зі спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, обчислення ціни активу зводиться до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання двох рівнянь Пуассона.

Література

1. Буртняк І. В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька// Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.

2. Буртняк І. В. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48–50.

3. M. Lorig. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. Princeton University – Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.

4. J.-P. Fouque., R. Sircar., K. Solna. Multiname and Multiscale Default Modeling, Multiscale Modeling and Simulation 7(4), 2009, pages 1956-1978.

5. V. Linetsky. Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. Finance and Stochastics , 8(3):373–398, 2004.

6. Davydov, D. Linetsky V. Pricing options on scalar diffusions: an eigenfunction expansion approach. Operat. Res. 51, 185–209, 2003.

7. Dai Q., K. Singleton. Specification Analysis of Affine Term Structure Models, J. Finance 55, 1943–1978, 2000.

8. Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1258. Berlin: Springer, 1987.

REFERENCES

Burtniak, I. V., and Malytska, H. P. "Obchyslennia tsin optsioniv metodamy spektralnoho analizu" [Calculate option prices spectral analysis methods]. Biznes Inform, no. 4 (2013): 152-158.

Burtniak, I. V., and Malytska, H. P. "Model shliakhozalezhnoi volatylnosti dlia indeksu PFTS" [Depending on the route volatility model for the index PFTS]. Biznes Inform, no. 3 (2012): 48-50.

Davydov, D., and Linetsky, V. "Pricing options on scalar diffusions: an eigenfunction expansion approach"Operat. Res. , no. 51 (2003): 185-209.

Dai, Q., and Singleton, K. "Specification Analysis of Affine Term Structure Models"Finance, no. 55 (2000): 1943-1978.

Fouque, J. -P., Sircar, R., and Solna, K. "Multiname and Multiscale Default Modeling"Multiscale Modeling and Simulation, no. 7 (4) (2009): 1956-1978.

Lorig, M. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion ApproachPrinceton University; Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.

Linetsky, V. "Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach"Finance and Stochastics, no. 8 (3) (2004): 373-398.

Weidmann, J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in MathematicsBerlin: Springer, 1987.