УДК 372.361

О. А. ФУНТИКОВА
доктор педагогических наук, профессор
Классический приватный университет

ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ВОЗРАСТНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДОШКОЛЬНИКОВ ЕЁ ПОНИМАНИЯ

Анализируется логико-математическая теория множеств, ее основные смыслы и возможности дошкольников усвоить главные её операции, которые раскрывают перед детьми количественные и качественные закономерности предметного мира, а также их взаимосвязь.

Ключевые слова: *логико-математическая теория множеств, операции со множеством, дети дошкольного возраста.*

Цель статьи – раскрыть основные положения логико-математической теории множеств; операции пересечения, объединения, отношения рефлексивности, симметрии, транзитивности, отношения порядка, которые могут быть поняты старшими дошкольниками и на основе действий с предметами заданных свойств усвоены отдельные визуально различимые количественные и качественные закономерности предметного мира.

Анализ истории вопроса по формированию математических представлений у детей дошкольного возраста показывает, что в 30–50-е годы XX в. особое внимание уделялось вопросам психологии понимания числа ребенком. Экспериментально было исследовано восприятие детей множеств в пределах пяти (К. Ф. Лебединцев, 1923 г.), умение распознавать отдельные элементы множеств (Л. А. Яблоков, И. А. Френкель), формирование понятия о числе в младшем дошкольном возрасте (Н. А. Менчинская, 1947 г., 1950 г.); обоснованы приемы обучения счету на основе идей монографического метода (Н. Н. Лежаева, 1953 г.) [5].

На протяжении последних десятилетий XX в. был усилен поиск возможностей формирования научных понятий у детей дошкольного возраста (П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, Г. А. Корнеева) [2; 3], формирования математических знаний о множестве, комбинаторике, графам, вероятности у детей 6-го года жизни (Ж. Папи) [6].

Теория множеств как математическая дисциплина создана немецким математиком Г. Кантором (нем. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) (1845– 1918), его исследования, относящиеся к тригонометрическим рядам и числовым последовательностям, привели к задаче выяснения тех средств, которые необходимы для сравнения бесконечных множеств чисел по величине [4]. Для решения этой проблемы Грегор Кантор ввел понятие мощности (или объема) множества, считая по определению, что два множества имеют одинаковую мощность, если члены любого из них можно сопоставить с членами другого, образовав пары соответствующих членов.

Поскольку между членами двух конечных множеств можно установить такое парное соответствие в том и только в том случае, когда они имеют одинаковое число членов, мощность конечного множества, можно отождествлять с количественным числом. Таким образом, понятие мощности бесконечного множества представляет собой обобщение обычного понятия количественного числа. В построении теории таких обобщенных (или трансфинитных) чисел, включающей в себя их арифметику и составляют создание Кантором теории множеств.

К концу XIX в. теория множеств стала основой для других математических теорий и в её терминах были определены важнейшие понятия классической математики: отношение, функция. Однако содержание данной теории вскоре переросло первоначальные рамки, и она разделилась на несколько относительно самостоятельных теорий: алгебра множеств, дескриптивная теория множеств, аксиоматическая теория множеств, теория булевых алгебр и т. д. [9].

В начале XX в. теория множеств стала играть роль фундамента математических теорий.

Единственная, по существу, ветвь "чистой" математики, не зависящая от принятия теоретико-множественного взгляда – арифметика натуральных чисел [1]. Однако уточнение относительно конечного порядкового числа приводит к обнаружению парадоксов. Парадоксы теории множеств при всем различии их формулировок имели своей общей причиной неограниченное применение так называемого принципа свертывания. Согласно этому принципу, введение в рассмотрение множеств, охарактеризованных любым общим "свойством" их элементов (произвольным предикатом), есть вполне законная "мыслительная операция" теории множеств с неограниченным принципом свертывания (наивная теория множеств).

Обобщая сказанное и согласно канторовскому определению множество S есть любое собрание определенных и различных между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами, или членами, множества S [7].

Существенным пунктом канторовского понимания является то, что собрание предметов само рассматривается как один предмет (мыслится как единое целое). Такая формулировка не накладывает никаких ограничений на природу предметов, входящих в множество [8]. Множество может состоять, например, из зеленых яблок, песчинок или простых чисел. Однако для приложения математики в качестве элементов множеств имеет смысл выбирать такие математические объекты, как точки, кривые, числа, множества чисел. Канторовская формулировка, как отмечает исследователь Р. Столл, допускает рассматривать множества, элементы которых нельзя точно назвать. В теории множества рассматривается интуитивный принцип объёмности (принцип экстенсиональности) как равенство двух множеств, состоящих из одних элементов, интуитивный принцип абстракции (принцип свертывания): элементы множества х обладающих свойством P

могут определять некоторое множество *A*, если элементы последнего множества являются в точности такие предметы *a*; включение – каждый элемент множества *A* является элементом множества *B*, то есть множество *A* есть подмножество множества *B* [8].

Характеристическое свойство множества. Множество может характеризоваться как с количественной стороны, так и с качественной. Любое свойство множества является его качественной характеристикой. Элементами множества могут быть самые разнообразные предметы любой природы, как конкретные (растения, животные, мебель, книги), так и абстрактные (числа, отрезки, геометрические фигуры). У каждого элемента есть несколько свойств. По заданному свойству выделяются элементы некоего множества из универсального или основного множества. Под характеристическим свойством множества подразумевается такое свойство, которым обладают все предметы, принадлежащие этому множеству, и не обладает ни один предмет, не принадлежащий ему, то есть не является его элементом. Примером тому может служить высказывание, что круг принадлежит к геометрическим фигурам и он обладает свойствами геометрических фигур. Некоторым свойством может обладать бесконечное число предметов (число, точки), другим – лишь конечное множество.

Основные математические идеи и логические структуры могут быть смоделированы на конечных множествах. В таком случае истинность предложения, выражающего общее свойство элементов конечного множества, а значит все элементы множества *A* обладают свойством *P* может быть установлена непосредственной проверкой.

Как было сказано выше, множество может содержать несколько подмножеств, которые характеризуются отдельными свойствами. Термин “подмножество” применяется в математике в смысле “часть множества”. При этом, однако, не исключается два крайних случая: когда часть множества (подмножество) совпадает со всем множеством. Другими словами, когда все элементы множества обладают рассматриваемым свойством, и когда эта часть не содержит ни одного элемента. Эти конкретные ситуации как математические могут моделироваться детьми с использованием дидактического материала “блоков Дьенеша”.

Обобщая сказанное, необходимо отметить, что при знакомстве детей старшего дошкольного возраста с множеством, особо ценным является то, что они должны последовательно знакомиться со свойствами множеств или подмножеств, уметь их видеть и выделять с помощью слова и соответствующего действия. Главным и существенным качественным признаком любого множества является его свойство. Ребенок должен уметь выделять, например, любые предметы, обладающие качественными признаками “быть синим” или “быть красным”, “быть квадратным” или “быть круглым”, “быть не круглым”, “быть не квадратным”, которые отражают визуальные закономерности предметного мира.

Знакомство со свойствами множеств и практическая работа с этими свойствами может проходить через основные операции с множествами. К основным операциям с множествами относятся пересечение множеств и объединение множеств.

Пересечение множеств и конъюнкция предложений. Общая часть множеств *A* и *B* представляет собой подмножество всех элементов из *M*, принадлежащих как *A,* так и *B*, то есть обладающими обоими свойствами *P* и *Q*. Итак, пересечением двух множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству *A*, и множеству *B*, то есть их общая часть.

Практическое выполнение детьми конъюнкции предложений заключается, например, в выполнении такого типа заданий: в красный обруч поместить любые геометрические фигуры, но чтобы имели только одно свойство “быть красными”, а внутри синего обруча – все квадратные геометрические фигуры. Итак, третье подмножество *M* (пересечение двух кругов) должно состоять из красных квадратов. Все элементы нового подмножества обладают двумя главными свойствами (*P* и *Q*), которые были заранее заданы, свойством “быть красным” и быть “квадратным”.

Непересекающиеся множества. Необходимо также знакомить детей с понятием пустого множества, то есть с предметами, которые обладают одним главным свойством “быть отсутствующим” или элементы некоторого множества, которые не обладают заданным свойством. Например, если *A* – множество всех круглых элементов, а *B* – множество всех треугольных элементов, то нет такого элемента, который был одновременно кругом и треугольником.

Объединение множеств и дизъюнкция предложений. Объединением двух множеств *A* и *B* называется такое множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A* или множеству *B*. Если характеристические свойства множеств *A* и *B* выражаются с помощью предложений *P* и *Q* соответственно, то характеристическое свойство объединения *A* и *B* выражается предложением *P* или *Q*, составленным из предложений *P* и *Q* с помощью союза или, понимаемого в неразделительном смысле. Это предложение называется дизъюнкцией предложений *P* и *Q*.

Итак, в практическом понимании детей дошкольного возраста: внутри хотя бы одного из двух обручей находится множество геометрических фигур, каждая из которых красная или квадратная. Следовательно, элементами третьего подмножества являются все красные неквадратные, красные квадратные и не красные квадратные фигуры. Если множество *A* характеризуется свойством *P,* множество *B* – свойством *Q*, то множество, состоящее из всех элементов, являющихся хотя бы одного из этих двух множеств, характеризуется свойством “*P* или *Q*”.

Отношение эквивалентности. В разбиении множеств предметов на классы играют особую роль отношения: рефлексивные, симметричные, транзитивные. Всякое рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение, установленное в некотором множестве *A*, называется отношением эквивалентности. Если между элементами некоторого множества введено или установлено отношение эквивалентности, то этим самым порождается разбиение данного множества на классы эквивалентности.

Разбиение множества на классы могут моделироваться дошкольниками. Задание для детей: расположить геометрические фигуры так, чтобы фигуры одного цвета были вместе. Ребенок располагает в красном обруче красные геометрические фигуры, в синим обруче – синие, а в желтом – желтые. Часть областей пересекающихся обручей окажутся пустыми. Это связано с тем, что каждый элемент геометрических фигур одноцветен, то есть имеет одно заданное свойство: “быть красным”, “быть синим”, “быть желтым”. С помощью отношения “быть одного цвета” формируется и само представление о цвете как о классе, объединяющем все предметы одного цвета, скажем все синие предметы.

Аналогично формируется и представление об определенной форме предметов. С помощью отношения “иметь одну форму” (быть круглым, или быть треугольным) на несколько классов эквивалентности. Сама форма выступает здесь как класс эквивалентности.

Множество может рассматриваться и с точки зрения отношений порядка. Так, например, множество *A* упорядочено отношением “меньше”, если на первом месте располагается имя элемента, который меньше всех остальных, на втором – имя элемента, который меньше остальных, кроме первого и т.д. A={1.2.3,4}. Таким же отношением “меньше” упорядочивается и множество всех натуральных чисел N={1,2,3,4,…}. На основе отношений порядка могут рассматриваться ряд натуральных чисел и знакомство ребенка с числообразованием.

В количественной теории натуральное число воспринимается как число элементов (мощность, численность) конечного множества. Если мы обратимся к натуральным четным и нечетным числам, то взаимно-однозначное соответствие можно установить между элементами двух данных множеств, при условии, что такое соответствие возможно лишь в случае бесконечного множества. Если же взять какое-либо конечное множество, то не удается установить взаимно-однозначное соответствие между всем множеством и какой-нибудь его частью. Это является характеристикой конечного множества [5].

При каких условиях, случаях конечные множества могут быть и называться эквивалентными, то есть между ними устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Необходимо сказать, что эквивалентные множества не совпадают полностью, всеми своими свойствами. Так, например, два уха, два глаза, пара обуви представляют собой эквивалентные множества по одному количественному признаку, а по другим эти элементы различны по данным множеств. Количественная характеристика выражает мощность множества. Каждый класс эквивалентности характеризуется мощностью, то есть любые два множества одного класса равномощны (имеют одинаковую мощность). Если мы имеем дело лишь с конечными множествами, то равномощность означает равночисленность. Мощность или класс равночисленных конечных множеств и называют натуральным числом.

Таким образом, каждому конечному множеству A приписывают в качестве характеристики натуральное число m (A), определяющее его принадлежность определенному классу эквивалентности. При этом множествам, принадлежащим одному классу эквивалентности, приписывается одно и то же натуральное число. Множествам, которые принадлежат различным классам эквивалентности – различные натуральные числа.

В основе такой концепции натурального числа лежит абстракция отождествления: отношение эквивалентности множеств отождествляет множества, принадлежащие одному классу эквивалентности по их численности.

В результате этого отождествления от множеств, принадлежащих одному классу эквивалентности, абстрагируется их общее свойство, характеризующее этот класс, в виде самостоятельного понятия – натурального числа.

Как отмечает А.А. Столяр, достоинством такого подхода "является естественное, отражающее основной круг практических применений сложение, вычитание и умножение натуральных чисел. Если A и B – конечные непересекающиеся множества, то число элементов объединения этих множеств равно сумме чисел их элементов" [10, с. 61]. Сложение чисел абстрагируется от объединения множеств, что и используется в обучении детей дошкольного возраста.

Итак, основной успех формирования элементарных математических представлений может лежать в области изучения теоретических основ математики, в данном случае теории множеств.

Необходимо формировать знания о множествах на основе знаний разнообразных качественных свойств окружающих предметов. Сначала на одном главном и понятном свойстве для ребенка (собрать предметы красного цвета, или: собрать вместе все треугольники) должно идти формирование знаний о множестве. Затем эти задания усложняются, по количеству свойств, которыми должны обладать элементы множества и т.д. Другими словами, ребенок должен последовательно познакомиться, увидеть и понять, что любое множество характеризуется сначала с качественной стороны (сгруппировать предметы по признаку, например, одного цвета "быть синим", или сгруппировать предметы по признаку формы – "быть квадратным" и т.д.).

Выводы. Усвоение дошкольниками определенных свойств элементов множества проходит с последовательным овладением операциями над множествами, а именно: пересечение, не пересечение, объединение множеств, разбиение множеств на классы. Разбиение множеств на классы подведет ребенка к пониманию отношений эквивалентности, которое будет ему необходимо для понимания количественной характеристики множества. Через отношения эквивалентности классов ребенка легче подвести к отношениям порядка. Каждый класс эквивалентности характеризуется мощностью, то есть любые два множества одного класса равномощны, то есть имеют одинаковую мощность. Мощность и класс равночисленных конечных множеств приводит к пониманию натурального числа. Таким образом, дошкольник подходит к пониманию еще одного общего свойства, но которое имеет принципиально другие признаки и которое характеризуется самостоятельным понятием – натурального числа. Необходимо еще раз акцентировать внимание на том, что только знакомство ребенка с качественными свойствами элементов и с операциями над ними подведет ребенка к количественной характеристике множества, а именно к усвоению натурального ряда чисел. Только при соответствующей подготовке ребенок может усвоить, что два множества имеют одинаковую мощность, если члены любого из них можно сопоставить с членами другого, образовав пары соответствующих членов. Именно парное соответствие двух конечных множеств отождествляется с количественным числом.

Список использованной литературы

1. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – Москва : Изд-во Иностранной литературы, 1963.
2. Гальперин П. Я. Введение в психологию / П. Я. Гальперин. – Москва : Педагогика. – 1976. – 334 с.
3. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении (Логико-психологические проблемы построения учебных предметов) / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогика. – 1972. – 424 с.
4. Кантор Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – Москва : Наука, 1985.
5. Леушина А. М. Формирование элементарных математических представлений у детей дошкольного возраста / А. М. Леушина. – Москва : Просвещение. – 1974. – 368 с.
6. Папи Ф. Дети и графы. Обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям / Ф. Папи, Ж. Папи ; пер. с франц. – Москва , Педагогика,1974. – С. 145–178.
7. Пуркет В. Георг Кантор / В. Пуркет, Х. Ильгаудс ; пер. с нем. Н. М. Флайшера. – Харьков : Основа, 1991. – 128 с.
8. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Столл ; пер. с англ. Ю. А. Гастева, И. Х. Шмаина ; под ред. Ю. А. Шихановича. – Москва : Просвещение, 1968. – 231 с.
9. Философский энциклопедический словарь / гл. ред.: Л. Ф. Ильичев, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалев, В. Г. Панов. – Москва : Сов. Энциклопедия, 1983. – 840 с.
10. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников / под ред. А. А. Столяра. – Москва : Просвещение, 1988. – 304 с.

Стаття надійшла до редакції 01.02.2016.

Фунтікова О. О. Логіко-математична теорія множин та вікові можливості дошкільників її розуміння

Проаналізовано логіко-математичну теорію множин, її основні смисли та можливості дошкільників засвоїти головні її операції, які розкривають дітям кількісні та якісні закономірності предметного світу, а також їхній взаємозв’язок.

***Ключові слова**: логіко-математична теорія множин, операції з множинами, діти дошкільного віку.*

Funtikova O. Logic-Mathematical Theory of Sets and Age Preschoolers Opportunities in Its Understanding

Logic-Mathematical theory of sets, its basic meaning and opportunities of preschoolers to learn its main operations which help children open quantitative and qualitative patterns of the objective world and their relationship are analyzed.

The article analyzes the results of previous studies: mathematical knowledge of children of preschool children; The experimental results of the study as the child understands numbers. The experimental results of the child's learning numbers in the range of five. Experimental results numeracy preschool children. Psychologists have concluded that the child is a preschooler can understand operations with sets, solve simple tasks in combinatorics, mathematical graphs.

The main results of the study are devoted to theoretical analysis of the theory of the set of Gregor Cantor. We consider that such a set, its volume. Elements of a set can be compared with elements of the other set. Analyzed on the basis of a quantitative number of set theory, which understands the child preschooler. It is characterized by the number and quality of the elements of the set. For example: "to be red", "to be square", "not red", "do not be square", etc.

"Zoltán Pál Dienes Blocks" educational material that can visually simulate operation with a lot. Children playing with "Zoltán Pál Dienes blocks," they learn to perform mathematical operations: intersection of the sets; not crossing sets; union of sets; equivalence relation: reflexive, symmetric, transitive.

We came to the conclusion that mathematical operations on sets are available for children to preschool children. Partitioning sets into classes the child understands. If the child has learned to split objects into classes by color, shape, size or the child understands that the subject is not specified color, shape, size, he later realizes ekvivaletnost relationships between objects. Using educational handouts easily teach the child elements of set theory. On the basis of set theory preschooler child understands numbers, its characteristics and chisloobrazovanie. In the world of the child enters a number that reveals to the child some regularities of the objective world.

Key words: *Logic-Mathematical theory of sets, operations with sets, children of preschool age.*