

М.Ф. Семенюк<sup>1</sup>, Г.О. Сіренко<sup>2</sup>, Л.М. Солтис<sup>2</sup>

## Градiєнт анізотропної нано- та мікрошорсткої поверхні твердого тіла, змодельованої випадковим полем

<sup>1</sup>Хмельницький національний університет,

вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

<sup>2</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,

вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна

Тел. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: [sirenkog@rambler.ru](mailto:sirenkog@rambler.ru)

Приведений математичний опис сподіваних значень градиєнта анізотропної нано- та мікрошорсткої поверхні твердого тіла за допомогою моделі випадкового поля. Показано, що з формул для градиєнта анізотропної поверхні витікають формули для градиєнта ізотропної поверхні.

**Ключові слова:** мікронерівності, нанонерівності, математичне сподівання, тверде тіло, шорстка поверхня, анізотропна поверхня, ізотропна поверхня, випадкове поле, градиєнт поверхні.

Стаття поступила до редакції 15.09.2010; прийнята до друку 15.12.2010.

### Вступ

**1. При математичному описі** таких контактних явищ на нано- та мікрошорстких поверхнях твердих тіл, як адсорбція, адгезія, змочування, електроосмос, електрофорез, тертя, зношування та мащення, теплопровідність, електропровідність, випаровування, конденсація тощо, необхідно знати параметри шорстких поверхонь.

**2. В [1] приведений огляд літературних джерел** інформації, що описують методи, параметри, математичні та фізичні моделі опису нанометричної та мікрOMETричної шорсткості поверхонь твердих тіл за допомогою теоретико-математичних моделей, при цьому особливо продуктивним виявилось використання теорії випадкового поля [2, 3].

**3. Для математичного опису** статистично однорідної ізотропної поверхні в [4–9] при дослідженні поверхні океану при хвилюванні і в [10] при вивченні ізотропної поверхні твердого тіла застосували випадкову функцію для двох змінних  $\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ , яка має автокореляційну функцію (АКФ)  $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$  [10].

Лонгет-Гітгінс отримав співвідношення для щільності піків анізотропної гауссовської поверхні [7, 8], а в [4] розглядає питання про кутові коефіцієнти та градиєнти такої поверхні.

Найяк [10] отримав математичні вирази для щільності ймовірностей розподілу висот вершин, середньої кривини у вершині та градиєнт ізотропної поверхні.

В [11–19] отримані математичні вирази для щільності ймовірностей розподілу висот вершин, розподілу середньої висоти виступів, середньої

кривини, повної кривини, головних кривин, та співвідношення головних кривин у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропних шорстких поверхонь, з яких витікали аналогічні результати Найяка [10] для ізотропних поверхонь, при цьому автори використали модель випадкового поля шорсткої поверхні, не пов'язуючи її з АКФ якогось певного виду і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також, не припускаючи певної форми нерівностей.

**4. Мета роботи** полягала в детальному розгляді процедури отримання математичних співвідношень сподіваних значень градиєнта шорстких анізотропних та ізотропних поверхонь твердого тіла, змодельованих випадковим полем.

### I. Загальні означення та подання чисел і функцій

**1. Нехай анізотропна шорстка поверхня** описана рівнянням:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1)$$

де  $\mathbf{z}$  – випадкова функція для двох змінних  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{y}$  (випадкове поле);  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  – декартові координати на середній площині висот шорсткої поверхні.

Але разом з тим статистичні характеристики поверхні залежать від напрямків  $\theta = \arctg(k_y/k_x)$  та інваріантні до переміщення початку координат на поверхні (однорідна поверхня).

**Випадкова функція  $z$** , яка описує таку шорстку статистично однорідну анізотропну поверхню, має автокореляційну функцію  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  і допускає її спектральний розклад Фур'є  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  на гармонійні компоненти, де  $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$  – компоненти хвильового вектора  $\bar{\mathbf{k}}$ , який дорівнює  $\bar{\mathbf{k}} = 2\pi / \lambda$  з довжиною хвилі  $\lambda$ .

**2. Моменти спектральної щільності.** Завдяки статистичній однорідності випадкової поверхні її характеристики можна виразити через моменти спектральної щільності  $\mathbf{m}_{pq}$  або їх інваріантні комбінації. Спектральна щільність (СЩ)  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  має вигляд [8, 10]:

$$\Phi(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \times \exp[-i(xk_x + yk_y)] dx dy, \quad (2)$$

де автокореляційну функцію (АКФ) за визначенням [8, 10] запишемо так:

$$R(x, y) = \lim_{\substack{L_x \rightarrow \infty \\ L_y \rightarrow \infty}} \frac{1}{4L_x L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} z(x_1, y_1) \times z(x_1 + x, y_1 + y) dx_1 dy_1. \quad (3)$$

Якщо шорстка поверхня ізотропна, то функція  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  залежить лише від змінної  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  і не залежить від полярного кута  $\theta = \arctg(y/x)$ . Зворотнє перетворення Фур'є записується так [8]:

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) \times \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y. \quad (4)$$

З виразу (3) видно, що  $\mathbf{R}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \sigma^2$ , де  $\sigma^2$  – дисперсія, а  $\sigma$  – середнє квадратичне (стандартне) відхилення висоти нерівностей [8, 10]. Тому з (4) витікає [8, 10]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y. \quad (5)$$

**3. Моменти СЩ визначаються так [8,10]:**

$$m_{pq} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y, \quad (6)$$

де  $p=0,1,2,3,4$ ;  
 $q=0,1,2,3,4$ ;

$\text{Re}x$  – дійсні значення частини числа [21];

• для анізотропної поверхні:  $m_{00}, m_{02}, m_{20}, m_{11}, m_{04}, m_{40}, m_{22}, m_{31}, m_{13}$  [12, 15]:

згідно (6) маємо:  $\mathbf{m}_{00} = \sigma^2$ ;

$$R(0,0) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^0 k_y^0 dk_x dk_y = m_{00}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{p+q} R}{\partial x^p \partial y^q} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(0,0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^2 k_y^0 dk_x dk_y = -m_{20}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(0,0) = -m_{11}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0,0) = -m_{02}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}(0,0) = m_{40}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = m_{31}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = m_{22}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x \partial y^3}(0,0) = m_{13}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial y^4}(0,0) = m_{04}. \quad (16)$$

• для ізотропної поверхні:  $m_0, m_2, m_4$ , при цьому:  $m_{00}=m_0; m_{20}=m_{02}=m_2; m_{11}=m_{13}=m_{31}=0; 3m_{22}=m_{40}=m_{04}=m_4$  [8, 10].

**4. Загальна теорія випадкового поля** приведена в [2, 3]. Для означень інтегральних перетворень використали [20, 21].

**5. За [10, 12] змінні позначені так:**

$$\mathbf{e}_1 = z; \mathbf{e}_2 = \partial z / \partial x; \mathbf{e}_3 = \partial z / \partial y; \mathbf{e}_4 = \partial^2 z / \partial x^2; \mathbf{e}_5 = \partial^2 z / \partial x \partial y; \mathbf{e}_6 = \partial^2 z / \partial y^2, \quad (17)$$

а змінні  $t, r, j, \mathbf{e}'_1$  пов'язані з  $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_1$  рівностями:

$$\mathbf{e}_4 = (t + r \cos f) m_{22}^{1/2}; \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_5 = (r \sin f) m_{22}^{1/2}; \quad (19)$$

$$\mathbf{e}_6 = (t - r \cos f) m_{22}^{1/2}; \quad (20)$$

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{m_{00}}}, \quad (21)$$

де  $\mathbf{e}'_1$  – нормована висота.

**6. Визначник**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

**7.  $\Gamma(x)$  – гама-функція** (інтеграл Ейлера другого роду) [22, 23]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt, \text{ Re } x > 0; \quad (23)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (24)$$

**8. Циліндричні функції Бесселя  $m$ -го порядку** [21]:

• функція Бесселя 1-го роду:

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right], \quad (25)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots; |\arg(z)| < p\};$$

• **функція Бесселя 2-го роду** (або функція Неймана):

$$N_m(z) = \frac{1}{\sin(mp)} [J_m(z) \cos(mp) - J_{-m}(z)], \quad (26)$$

$$\{m \neq 0; \pm 1; \pm 2; \dots\};$$

$$N_m(z) = (-1)^m N_{-m}(z) = \frac{2}{p} J_m(z) \times \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{1}{p} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right] \times \left( \sum_{j=1}^k \left[ \frac{1}{j} \right] + \sum_{j=1}^{m+k} \left[ \frac{1}{j} \right] \right) - \frac{1}{p} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \times \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right], \quad (27)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots; |\arg(z)| < p\}.$$

На рис. 1 показані графіки функцій Бесселя та Неймана  $J_0(x), J_1(x), N_0(x), N_1(x)$  для  $m=0; 1; z=x>0$ .

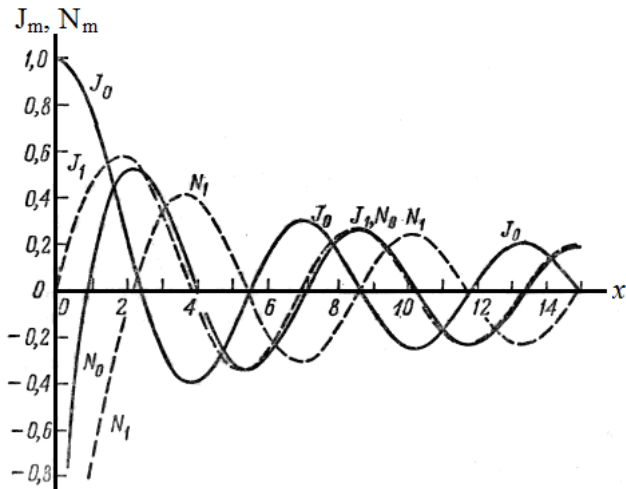


Рис. 1. Графіки функцій Бесселя 1-го роду ( $J_m(x)$ ) та 2-го роду (функція Неймана) ( $N_m(x)$ ) для  $z=x>0$  та  $m=0; 1$  [21].

**9. Інтегральні форми функції Бесселя [21]:**

$$J_m(z) = \frac{1}{p} \int_0^p \cos[mt - z \sin(t)] dt, \quad (28)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots\};$$

$$J_{2m}(z) = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} \cos[z \sin(t)] \cos(2mt) dt, \quad (29)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots\};$$

$$J_{2m+1}(z) = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} \sin[z \sin(t)] \sin(2m+1)t dt, \quad (30)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots\};$$

$$J_m(z) = \frac{(-1)^m}{\pi} \int_0^\pi \exp[iz \cos(t)] \cos(mt) dt, \quad (31)$$

$$\{m = 0; 1; 2; \dots\}.$$

На рис. 2 показані графіки дійсних функцій Бесселя  $J_0(z), J_1(z), J_2(z), J_3(z)$  для дійсних чисел  $z=x$ .

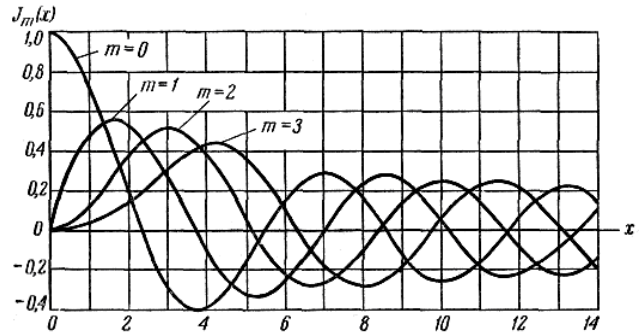


Рис. 2. Графіки функцій Бесселя  $J_0(x), J_1(x), J_2(x), J_3(x)$  для дійсного аргумента  $z=x$  для  $m=0; 1; 2; 3$  степені [21].

**10. Гіперболічні функції [21, 24]:**

• **гіперболічний косинус:**

$$Ch(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{\exp(2x) + 1}{2 \exp(x)}; \quad (32)$$

• **гіперболічний синус:**

$$Sh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \frac{\exp(2x) - 1}{2 \exp(x)}; \quad (33)$$

• **зворотній гіперболічний косинус:**

$$Arch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1. \quad (34)$$

**11. Повні еліптичні інтеграли Лежандра [21]:**

• **1-го роду**  $U_1(\alpha) = \int_0^{p/2} \frac{df}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 f}}; \quad (35)$

• **2-го роду**  $E_1(\alpha) = \int_0^{p/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 f} df. \quad (36)$

**12. Приєднані функції Лежандра**  $n$ -степеня

$m$ -порядка першого  $P_n^m$  та другого  $Q_n^m$  родів є рішення диференціального рівняння [21]:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] w = 0, \quad (37)$$

де  $n, m$  – дійсні або комплексні числа.

Рівняння (37) при  $m=0$  можна привести до диференціального рівняння Лежандра:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + n(n+1)w = 0, \quad (38)$$

де  $z=x$ .

Рівняння (38) задовольняють [21]:

• многочлени Лежандра 1-го роду для  $z=x$ :

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[ \frac{(-1)^m (2n-2m)! x^{n-2m}}{m!(n-m)!(n-2m)!} \right], \quad (39)$$

де  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ , якщо  $n$  – парне число;

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ , якщо  $n$  – непарне;

• функції Лежандра 2-го роду  $Q_n(z)$ ; для  $z=x$ ,  $-1 < x < 1$  функції дорівнюють [21]:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad (40)$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1; \quad (41)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - 1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} x; \quad (42)$$

Якщо  $n, m$  – дійсні цілі числа,  $z=x$  – дійсне число в межах  $-1 \leq x \leq 1$ , а  $x = \cos \theta$ , то рівняння (37) задовольняє приєднані функції Лежандра 1-го роду [21]:

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= \frac{1}{2^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)! m!} \sqrt{(1-x^2)^m} \times \\ &\times F\left(m-n; m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^m}}{2^n n!} \times \\ &\times \frac{d^{n+m} (x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = (-1)^{n+m} P_n^m(-x), \end{aligned} \quad (43)$$

( $n \geq m$ ;  $n=0; 1; 2; \dots$ ;  $m=0; 1; 2; \dots$ ;  $n$ ), при цьому:

$$P_n^0(x) = P_n(x); \quad (44)$$

$$P_n^m(x) = 0, \quad (45)$$

зокрема:

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} = \sin q; \quad (46)$$

$$P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2} \sin 2q; \quad (47)$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2q); \quad (48)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2} (5x^2 - 1) \sqrt{1-x^2} = \frac{3}{8} (\sin q + 5 \sin 3q); \quad (49)$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = \frac{15}{4} \cos q (\cos q - \cos 3q); \quad (50)$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = \frac{15}{4} (3 \sin q - \sin 3q); \quad (51)$$

$$\begin{aligned} P_n^n(x) &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sqrt{(1-x^2)^n} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sin^n q, \quad (52) \\ &(n=0; 1; 2; \dots), \text{ де } \cos q = x. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведені відповідні графіки приєднаної функції Лежандра  $P_1^1(x)$ ;  $P_2^1(x)$ ;  $P_3^1(x)$ .

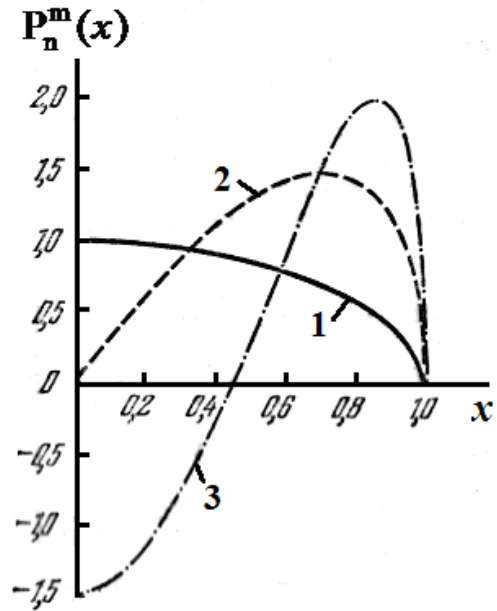


Рис. 3. Графіки приєднаних функцій Лежандра ( $m=1$ ;  $n=1, 2, 3$ ): 1 –  $P_1^1(x)$ ; 2 –  $P_2^1(x)$ ; 3 –  $P_3^1(x)$  [21].

Інтегральні властивості приєднаних функцій Лежандра [21]:

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= \frac{(-1)^{m/2} (n+m)!}{n! p} \int_0^p (x + \sqrt{x^2-1}) \times \\ &\times \cos t)^n \cos(mt) dt, \end{aligned} \quad (53)$$

$$(n=0; 1; 2; \dots; m=0; 1; 2; \dots; n);$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_r^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} d_{nr}, \quad (54)$$

$$(n, r=0; 1; 2; \dots; m=0; 1; 2; \dots; n);$$

$$\int_0^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (55)$$

$$(n=0; 1; 2; \dots; m=1; 2; \dots; n);$$

$$\int_0^1 \frac{[P_n^m(x)]^2 dx}{1-x^2} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (56)$$

$$(n=0; 1; 2; \dots; m=1; 2; \dots; n);$$

## II. Теоретична частина

Градiєнт поверхні  $\mathbf{q}$  визначається таким чином [12]:

$$q = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{e_2^2 + e_3^2}. \quad (57)$$

Використовуючи центральну граничну теорему теорії ймовірності [12, 25] отримаємо спільну щільність ймовірностей змінних  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  [12]:

$$p(e_2, e_3) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\Delta_1}(m_{02}e_2^2 - 2m_{11}e_2e_3 + m_{20}e_3^2)\right]}{2p\sqrt{\Delta_1}}. \quad (58)$$

Введемо змінні  $\varepsilon_2 = q \cos \varphi$ ,  $\varepsilon_3 = q \sin \varphi$ , знайдемо спільну щільність ймовірностей величин  $q$  і  $\varphi$  [12]:

$$p(q, \varphi) = \frac{q \exp\left[-\frac{q^2}{2\Delta_1}(m_{02} \cos^2 \varphi - m_{11} \sin 2\varphi + m_{20} \sin^2 \varphi)\right]}{2p\sqrt{\Delta_1}}. \quad (59)$$

Зміна величин  $q, \varphi$  обмежено простором

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \leq q < \infty. \end{cases} \quad (60)$$

Враховуючи (60), отримаємо вираз для щільності ймовірностей  $p(\mathbf{q})$  змінної  $\mathbf{q}$  [12]:

$$p(q) = \frac{q}{2p\sqrt{\Delta_1}} \cdot \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{q^2}{2\Delta_1}(m_{02} \cos^2 f - m_{11} \sin 2f + m_{20} \sin^2 f)\right] df; \quad (61)$$

та математичне сподіване значення градієнта анізотропної поверхні  $\mathbf{Eq}$  [12]:

$$Eq = \frac{1}{2p\sqrt{\Delta_1}} \cdot \int_0^{2\pi} q^2 dq \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{q^2}{2\Delta_1}(m_{02} \cos^2 f - m_{11} \sin 2f + m_{20} \sin^2 f)\right] df, \quad (62)$$

що відповідає [4].

Отримаємо вираз для градієнта анізотропної поверхні в кінцевому вигляді. В [4, 12] показано, що щільність ймовірностей градієнта поверхні має вигляд:

$$p(q) = \frac{q}{\sqrt{\Delta_1}} \cdot \exp(-M_2 q^2 / 4\Delta_1) \times \times J_0\left[q^2 \sqrt{M_2^2 - 4\Delta_1} / 4\Delta_1\right], \quad (63)$$

де  $M_2 = m_{20} + m_{02}$ ;

$J_0$  – нульова функція Бесселя з уявним аргументом.

Тоді, математичне сподівання градієнта анізотропної поверхні набуває вигляду [12]:

$$Eq = \frac{4\Delta_1}{\sqrt[4]{(M_2^2 - 4\Delta_1)^3}} \int_0^\infty s_1^{n_1} J_{m_1}(s_1) \times \exp\left[-\frac{x_0 s_1}{\sqrt{x_0^2 - 1}}\right] ds_1 = \frac{4\Delta_1}{\sqrt[4]{(M_2^2 - 4\Delta_1)^3}} \times \times \Gamma(n_1 + m_1 + 1) \sqrt{(x_0^2 - 1)^{n_1 + 1}} P_{n_1}^{-m_1}(x_0), \quad (64)$$

де

$$x_0 = \frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}}; \quad (65)$$

$$s_1 = \frac{\sqrt{M_2^2 - 4\Delta_1}}{4\Delta_1} q^2; \quad (66)$$

$\Gamma(k)$  – гама-функція;

$P_{n_1}^{-m_1}(x_0)$  – приєднана функція Лежандра I-го роду  $n_1$  – степеня  $m_1$  – порядку від аргументу  $x_0$  [21].

Співвідношення (64) правдиве за умови:

$$\text{Re}(n_1 + m_1) > -1. \quad (67)$$

З (67) видно, що для (64) умова (67) виконується, так як  $\nu_1 = 1/2$ ;  $\mu_1 = 0$ . Враховуючи числові значення  $\nu_1$  і  $\mu_1$ , а також те, що за [21] приєднана функція Лежандра I-го роду  $1/2$  степеня  $0$  – порядку від аргумента  $ch \eta_1$ :

$$P_{1/2}^0(ch \eta_1) = P_{1/2}(ch \eta_1) = \frac{2}{p} \exp\left(\frac{h_1}{2}\right) E_1\left(\sqrt{1 - \exp(-2h_1)}\right), \quad (68)$$

де  $ch \eta_1$  – гіперболічний косинус від аргумента  $\eta_1$  [21, 24].

Вираз (64) можна привести до вигляду [12]:

$$Eq = \sqrt[4]{\frac{4\Delta_1}{p^2}} \exp\left(\frac{h_1}{2}\right) E_1\left(\sqrt{1 - \exp(-2h_1)}\right), \quad (69)$$

де зворотній гіперболічний косинус [21, 24]:

$$h_1 = \text{Arch} \frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}}; \quad \frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}} \geq 1;$$

$E_1(x)$  – повний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду.

Для ізотропної поверхні  $\Delta_1 = m_2^2$ ;  $M_2 = 2m_2$ ;  $\eta_1 = 0$ , тоді вираз (69) набуває вигляду [12]:

$$Eq = \sqrt{\frac{pm_2}{2}}, \quad (70)$$

що співпадає з [10].

У зв'язку з тим, що аргумент  $\xi_0$  функції Лежандра I-го роду повинен задовольняти умовам  $|\xi_0 - 1| < 2$ , математичний вираз (69) буде правдивим лише за умови:

$$\frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}} < 3. \quad (71)$$

Далі отримаємо вираз для  $E_q$ , який є правдивим за будь-яких значень  $M_2$  і  $\Delta_1$ . Якщо вилучити із розгляду випадок, коли анізотропна поверхня уявляє собою систему паралельних плоских хвиль (при цьому  $\Delta_1=0$ ), то явно видно, що в інших випадках:

$$\frac{M_2}{\sqrt{M_2^2 - 4\Delta_1}} > 1. \quad (72)$$

Означимо  $\eta_2$ , як зворотній гіперболічний косинус, так [12]:

$$h_2 = \text{Arch} \left[ \frac{M_2}{\sqrt{M_2^2 - 4\Delta_1}} \right], \quad (73)$$

тоді математично сподіване значення градієнта **анізотропної поверхні** буде мати вигляд [12]:

$$E_q = \frac{4\Delta_1}{\sqrt[4]{(M_2^2 - 4\Delta_1)^3}} \int_0^\infty s_1^{m_2-1} \times \exp(-s_1 ch h_2) J_{n_2}(s_1) ds_1 = \frac{4\Delta_1}{\sqrt[4]{(M_2^2 - 4\Delta_1)^3}} \times \frac{\cos(n_2 p)}{\sin[(m_2 + n_2)p]} \cdot \frac{Q_{n_2-1/2}^{m_2-1/2}(ch h_2)}{\sqrt{\frac{p}{2}} (sh h_2)^{2m_2-1}}, \quad (74)$$

де  $Q_{n_2-1/2}^{m_2-1/2}(ch h_2)$  – приєднана функція Лежандра 2-го роду  $(n_2 - 1/2)$  степеня  $(m_2 - 1/2)$  порядку від аргумента  $z = ch \eta_2$  [21].

Співвідношення (74) правдиве, якщо виконуються умови:

$$\begin{cases} \text{Re}(m_2 + n_2) > 0; \\ \text{Re}(ch h_2) > 1. \end{cases} \quad (75)$$

Явно, що в розглянутому випадку  $\mu_2=3/2$ ;  $\nu_2=0$ ;  $ch \eta_2 > 1$ , тому вираз (74) набуває вигляду [12]:

$$E_q = -\frac{4\Delta_1 \sqrt{ch^3 h_2}}{\sqrt{\frac{p}{2}} M_2^3} \cdot \frac{Q_{-1/2}^1(ch h_2)}{sh h_2} = \frac{4\Delta_1 ch h_2}{M_2 sh h_2 \exp\left(\frac{h_2}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{2ch h_2}{p M_2}} \times \left\{ \frac{2E_1[\exp(-h_2)]}{1 - \exp(-2h_2)} - U_1[\exp(-h_2)] \right\}, \quad (76)$$

де  $U_1(x)$  – повний еліптичний інтеграл Лежандра 1-го роду.

Так як функція Лежандра 2-го роду визначена при значеннях аргументу  $ch \eta_2 > 1$ , що, як показано вище, виконується, то вираз (76) правдивий для будь-яких  $M_2$  і  $\Delta_1$ , окрім  $\Delta_1=0$ .

Для математичного сподівання значення градієнта **ізотропної поверхні**, коли  $\Delta_1=m_2^2$ ;  $M_2=2m_2$ ;  $\eta_2 \rightarrow \infty$ , вираз (76) перетворюється у вираз (70).

Для ізотропної поверхні  $\frac{q}{\sqrt{m_2}} = \sqrt{\frac{p}{2}} = \text{const}$  для всіх значень нормованих висот.

Звернемо увагу, що в [4] приведено наступний вираз для щільності ймовірностей змінної  $q$ :

$$p(q) = \frac{q}{m_2} \exp\left(-\frac{q^2}{2m_2}\right). \quad (77)$$

З цього виразу випливає сподіване значення градієнта ізотропної поверхні:

$$E_q = \int_0^\infty qp(q) dq = \sqrt{\frac{pm_2}{2}}. \quad (78)$$

## Висновки

1. Отриманий вираз для сподіваного значення градієнта анізотропної нано- та мікросорсткої поверхні твердого тіла на основі її математичної моделі випадкового поля, з якого за певних умов випливає вираз для сподіваного значення градієнта ізотропної поверхні.

2. Нормована величина градієнта ізотропної сорсткої поверхні є сталою величиною для всіх нормованих висот нано- та мікронерівностей.

**Семенюк М.Ф.** – професор, доктор технічних наук, професор кафедри машинознавства;

**Сіренко Г.О.** – професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри неорганічної та фізичної хімії;

**Солтис Л.М.** – аспірант кафедри неорганічної та фізичної хімії.

- [1] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Моделі нанометричної та мікрометричної сорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // *Фізика і хімія твердого тіла*, **11** (2), сс. 423-446 (2010).
- [2] М.И. Ядренко. *Спектральная теория случайных полей*. Вища шк., Киев. 208 с. (1980).
- [3] А.П. Хусу, Ю.Р. Виттенберг, В.А. Пальмов. *Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход*. Наука, Москва. 344 с. (1975).
- [4] М.С. Лонге-Хиггинс. Статистическая геометрия случайных поверхностей // *Гидродинамическая неустойчивость*. Мир, Москва. сс. 124-167 (1964).

- [5] M.S. Longuet-Higgins. On the statistical distribution of the highs of sea waves // *J. Marine Research*, **11** (3), p. 245 (1952).
- [6] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of a moving waveform // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (52), p. 234 (1956).
- [7] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of an isotropic random surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **250** (Ser. A), pp. 157-174 (1957).
- [8] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **249** (Ser. A), pp. 321-387 (1957).
- [9] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (54), p. 439 (1958).
- [10] П.П. Найяк. Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // *Проблемы трения и смазки*, **93** (Ser. F, 3), сс. 85-95 (1971).
- [11] С.Б. Айнбиндер, Э.Л. Тюнина. *Введение в теорию полимеров*. Зинатне, Рига. 224 с. (1978).
- [12] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сиренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // *Трение и износ*, **1** (3), сс. 465-471 (1980).
- [13] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сиренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // *Трение и износ*, **1** (5), сс. 815-823 (1980).
- [14] Г.О. Сиренко, М.Ф. Семенюк, Л.М. Солтис. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // *Фізика і хімія твердого тіла*, **11** (3), сс. 768-779 (2010).
- [15] Г.О. Сиренко, М.Ф. Семенюк, Л.М. Солтис. Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // *Фізика і хімія твердого тіла*, **11** (4), сс. 914-927 (2010).
- [16] Н.Ф. Семенюк. Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*, **7** (6), сс. 1017-1024 (1986).
- [17] Н.Ф. Семенюк. Средние значения полной и средней кривизны в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*, **7** (5), сс. 830-840 (1986).
- [18] Н.Ф. Семенюк. Исследования топографии поверхностей методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади контакта при трении твердых тел: *Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04.* – Якутск: Ин-т физико-техн. проблем Севера СО ЯФ АН СССР. 149 с. (1983).
- [19] Н.Ф. Семенюк. Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*, **7** (1), сс. 85 – 90 (1986).
- [20] Г.Б. Двайт. *Таблицы интегралов и другие математические формулы.* – Изд. второе, исп. / Пер. с англ. Н.В. Леви; под. ред. К.А. Семендяева. Наука, Москва. 228 с. (1966).
- [21] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы.* – изд. 4-е / Пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др. Наука, Москва. 832 с. (1978).
- [22] Л.П. Купцов. Гамма-функция // *Математическая энциклопедия* / Под ред. И.М. Виноградова (гол. ред.), С.И. Адян, П.С. Александров, Н.С. Бахвалов и др. (ред. коллегия). Сов. энциклопедия, Москва. 1, А-Г (1152 стб.), стб. 865-870 (1977).
- [23] В.П. Сигорский. *Математический аппарат инженера.* – Изд. 2-е, стереот. – Техніка, Киев. 768 с. (1977).
- [24] В.И. Битюцков. Гиперболические функции // *Математическая энциклопедия* / Под ред. И.М. Виноградова (гол. ред.), С.И. Адян, П.С. Александров, Н.С. Бахвалов и др. (ред. коллегия). Сов. энциклопедия, Москва. 1, А-Г (1152 стб.), стб. 991 – 992 (1977).
- [25] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, II, Wiley, New York, p. 302 (1966).

M.F. Semenyuk<sup>1</sup>, H.O. Sirenko<sup>2</sup>, L.M. Soltys<sup>2</sup>

## Gradient of Anisotropic Nano- and Microrough Surface of Solid State Modeled by Random Field

<sup>1</sup>Khmelnitsky National University, 11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

<sup>2</sup>Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine  
Tel. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: [sirenkog@rambler.ru](mailto:sirenkog@rambler.ru)

The mathematical description of gradient of anisotropic nano- and microrough surface of solid state has been resulted using the model of random field. It has been shown that from formulas for gradient of anisotropic surface follow formulas for gradient of isotropic surface.

**Key words:** microinequalities, nanoinequalities, mathematical expectation, solid state, rough surface, anisotropic surface, isotropic surface, random field, gradient of surface.