

Сверхпроводимость квантового цилиндра

П.А. Эминов, А.А. Ульдин

Московский государственный университет приборостроения и информатики

ул. Стромьнка, 20, г. Москва, 107996, Россия

E-mail: peminov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27 мая 2010 г.

Вычислен термодинамический потенциал сверхпроводящего квантового цилиндра. Изучена зависимость критической температуры и теплоемкости сверхпроводящей системы от поверхностной концентрации электронов и радиуса нанотрубки. Показано, что критическая температура осциллирует при изменении параметра, равного отношению энергии Ферми к энергии размерного конфинмента.

Обчислено термодинамічний потенціал надпровідного квантового циліндра. Вивчено залежність критичної температури та теплоємності надпровідної системи від поверхневої концентрації електронів і радіуса нанотрубки. Показано, що критична температура осцилює при зміні параметра, який дорівнює відношенню енергії Фермі до енергії розмірного конфайнмента.

PACS: 71.10.–w Теории и модели многоэлектронных систем;

75.75.–c Магнитные свойства наноструктур.

Ключевые слова: сверхпроводящий квантовый цилиндр, нанотрубка, термодинамический потенциал.

В последние годы большое внимание уделяется изучению электронных свойств низкоразмерных наноструктур. После получения графена — устойчивой в трехмерном пространстве изолированной плоской системы толщиной в один атом [1], а также квазиодномерных структур — углеродных нанотрубок [2], существенно возрос интерес к проблеме поверхностной сверхпроводимости [2,3]. Сверхпроводимость нанотрубок теоретически изучалась многими авторами (см. также [4–6]). Однако аналитические результаты, описывающие зависимость критической температуры и термодинамических свойств от параметров нанотрубки, не были получены.

Теоретическому исследованию этих вопросов на примере квантового цилиндра и посвящена предлагаемая статья.

На цилиндрической поверхности стационарное состояние электрона задается азимутальным квантовым числом $n \in Z$, импульсом продольного движения p_3 и проекцией спина на ось цилиндра ($s = \pm 1$). Энергия стационарных состояний задается формулой [4]

$$E(n, p_3) = \frac{p_3^2}{2m} + \varepsilon n^2, \quad (1)$$

где m — эффективная масса электрона, $\varepsilon = 1/(2mR^2)$ — энергия размерного конфинмента, R — радиус цилиндра.

Отметим, что спектр (1) не изменяется при обращении времени ($n \rightarrow -n$, $p_3 \rightarrow -p_3$).

Положим далее, что орбитальные моменты импульсов электронов куперовской пары на поверхности цилиндра направлены в противоположные стороны ($n_1 = -n_2 = n$), как и импульсы продольного движения и проекции спинов на ось цилиндра. Совокупность квантовых чисел, определяющих стационарное состояние электрона, будем обозначать символом (p, s) , где $p = (n, p_3)$. В представлении вторичного квантования модельный гамильтониан БКШ, в котором оставлено взаимодействие электронов с противоположными по знаку значениями всех квантовых чисел, представляется в следующем виде [7,8]:

$$H = \sum_{p,s} T(p) a^\dagger(p,s) a(p,s) - \frac{g}{S} \sum_{p,p' \neq p} \lambda(p) \lambda(p') a^\dagger(-p, \downarrow) a^\dagger(p, \uparrow) a(p', \uparrow) a(-p', \downarrow). \quad (2)$$

Здесь $S = 2\pi RL$ — площадь поверхности цилиндра, $T(p) = E(n, p_3) - \mu$, μ — химический потенциал электронного газа и принято обозначение

$$\sum_{n,p_3} f(n, p_3) = \frac{L}{2\pi} \sum_n \int dp_3 f(n, p_3). \quad (3)$$

Как и в [7] полагаем, что

$$\lambda = \begin{cases} \pm 1, & |\varepsilon(n, p_3) - \mu| < \omega_0, \\ 0, & |\varepsilon(n, p_3) - \mu| > \omega_0, \end{cases} \quad (4)$$

где ω_0 — характерная фоновая энергия.

Воспользовавшись далее ($u-v$) преобразованием и статистическим вариационным принципом Н.Н. Боголюбова [7,8], термодинамический потенциал сверхпроводящего квантового цилиндра представим в виде

$$\Psi = \frac{L}{2\pi} \sum_n \int dp_3 \left[(\varepsilon(n, p_3) - \mu) - \sqrt{(\varepsilon(n, p_3) - \mu)^2 + \Delta^2} \right] - 2T \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\sqrt{(\varepsilon(n, p_3) - \mu)^2 + \Delta^2}}{T} \right) \right] + \frac{\Delta^2}{g} S, \quad (5)$$

причем ширина энергетической щели Δ находится из уравнения

$$1 = \frac{g}{2S} \sum_n \int \left(\frac{L}{2\pi} \right) dp_3 \left[\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon(n, p_3) - \mu)^2 + \Delta^2}} \times \text{th} \frac{\sqrt{(\varepsilon(n, p_3) - \mu)^2 + \Delta^2}}{2T} \right]. \quad (6)$$

Если ширину щели Δ в (5) положить равной нулю, то Ψ — потенциал, как и должно быть, переходит в потенциал идеального ферми-газа.

При нулевой температуре уравнение (6) принимает вид

$$1 = \frac{g}{2R(2\pi)^2} \sum_n \int dp_3 \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon(n, p_3) - \mu)^2 + \Delta^2}}. \quad (7)$$

Воспользуемся далее формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_n f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int \exp(2\pi i k x) f(x) dx, \quad (8)$$

и перейдем к полярным координатам (p, φ) :

$$x = pR \cos \varphi, p_3 = p \sin \varphi. \quad (9)$$

Тогда уравнение (7) запишется в виде

$$1 = \frac{g}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty p dp \frac{J_0(2\pi k R p)}{\sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2}}, \quad (10)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Суммирование по k проведем с помощью формулы [9,10]:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx) = \frac{2}{x} + 4 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4\pi^2 n^2}}, \quad (11)$$

$$2\pi m < x < 2\pi(m+1), \quad x = 2\pi R p.$$

Учтем также, что основной вклад в образование куперовских пар дают стационарные состояния, квантовые числа которых удовлетворяют условию

$$|\eta| = |\varepsilon(n, p_3) - \mu| \cong \frac{p_F(n)}{m} |p_3 - p_F(n)| < \omega. \quad (12)$$

Здесь продольный импульс Ферми n -й зоны поперечного движения определяется формулой:

$$p_F(n) = \frac{1}{R} \sqrt{(p_F R)^2 - n^2}, \quad (13)$$

где $p_F = \sqrt{2mE_F}$, E_F — энергия Ферми.

В итоге находим следующую формулу для ширины энергетической щели при нулевой температуре:

$$\Delta_0(Rp_F) = 2\omega_0 \exp \left[-\frac{\pi\lambda}{\sum_n [(Rp_F)^2 - n^2]^{-1/2}} \right], \quad (14)$$

где безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{4\pi}{mg}, \quad (15)$$

а суммирование в показателе экспоненты проводится по всем значениям n , для которых подкоренное выражение положительно. Заметим также, что в вырожденном случае линейная концентрация электронов связана с радиусом цилиндра и импульсом Ферми p_F соотношением

$$N_L = \frac{2}{\pi R} \sum_n \sqrt{(p_F R)^2 - n^2}, \quad (16)$$

а доля частиц, которые находятся в n -й зоне энергии поперечного движения, определяется величиной

$$\frac{N_L^n}{N_L} = \frac{\sqrt{(p_F R)^2 - n^2}}{\sum_n \sqrt{(p_F R)^2 - n^2}}. \quad (17)$$

Дальнейший анализ уравнения (6) проводится по схеме, аналогичной случаю непрерывного энергетического спектра [7,8,11].

Ширина энергетической щели при конечной температуре определяется из уравнения

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta(T)} = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + t^2}} \frac{1}{\exp(\sqrt{x^2 + t^2}) + 1}, \quad (18)$$

где параметр $t = \Delta/T$, а Δ_0 определяется формулой (14).

Из формулы (18) следует, что зависимость критической температуры сверхпроводящего квантового цилиндра от радиуса нанотрубки и энергии Ферми определяется формулой

$$T_c(R, p_F) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right) 2\omega_0 \exp\left[-\frac{\lambda}{\alpha}\right]. \quad (19)$$

Здесь $\gamma = e^C$, где C — постоянная Эйлера и принято обозначение

$$\alpha = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(2\pi k R p_F).$$

При выполнении условия

$$\frac{\pi N_L R}{2} < 1 \quad (20)$$

электроны могут находиться только в основном состоянии с $n = 0$ и они совершают одномерное движение вдоль оси нанотрубки. В этом случае 1D сверхпроводника:

$$T_c = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right) 2\omega_0 \exp[-\pi\lambda R p_F], \quad (21)$$

а импульс Ферми связан с линейной концентрацией формулой

$$p_F = \frac{\pi N_L}{2}. \quad (22)$$

Формула (19) допускает предельный переход и к случаю плоского 2D сверхпроводника (поверхностная концентрация $N_S = \text{const}, R \rightarrow \infty$) [12]. Для этого суммирование по n в (19) следует заменить интегрированием в пределах от $(-p_F R)$ до $(p_F R)$. Результат имеет вид

$$T_c = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right) 2\omega_0 \exp[-\lambda] \quad (23)$$

и не зависит от R .

Для вычисления термодинамических величин сверхпроводящего квантового цилиндра наряду с (5) удобно использовать соотношение [8]

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \kappa}\right)_{T, V, \mu} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \kappa} \right\rangle, \quad (24)$$

выражающее среднее значение от производной гамильтониана системы по параметру κ через производную по тому же параметру от термодинамического потенциала.

Например, разность теплоемкостей сверхпроводящей и нормальной фазы при $T \rightarrow T_c \pm 0$ описывается формулой

$$\frac{C_S - C_N}{S} = \frac{2\pi}{7\zeta(3)} m T_c \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(2\pi k R p_F) \right), \quad (25)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

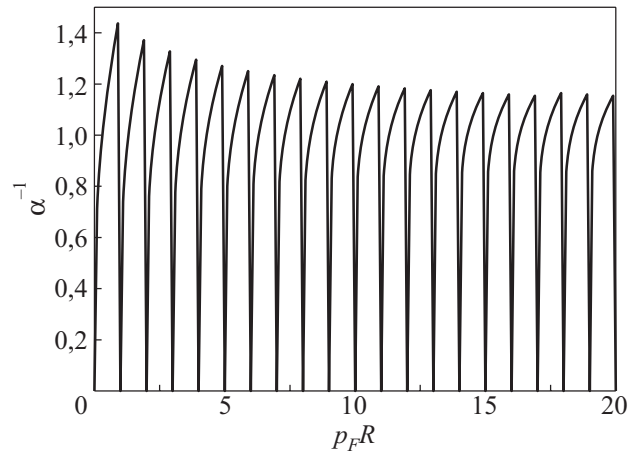


Рис. 1. Осцилляции величины α^{-1} в зависимости от параметра $p_F R$.

Критическая температура, определяемая формулой (19), испытывает осцилляции при изменении величины $p_F R \equiv \sqrt{E_F / \varepsilon}$. Для их иллюстрации на рис. 1 приведен график зависимости параметра α^{-1} в формуле (19) от величины $p_F R$. Такие же осцилляции имеют место в формуле (25) для скачка теплоемкости электронного газа нанотрубки в момент перехода из сверхпроводящего в нормальное состояние.

В заключение отметим, что при выполнении условия $p_F R = n$ имеет место сингулярность электронной плотности состояний, связанная с квантованием энергии поперечного движения (см. также [10,13,14]). Выход за рамки модели идеального газа, учет флуктуаций, а также примесей и конечной температуры приводят к сглаживанию этой сингулярности. Зависимость критической температуры и скачка теплоемкости от параметра $p_F R$ при этом остается осциллирующей.

1. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
2. C. Charlier, X. Blasé, and S. Roche, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 677 (2007).
3. В.Л. Гинзбург, *УФН* **174**, 1040 (2004).
4. П.А. Эминов, Ю.И. Сезонов, *ЖЭТФ* **134**, 772 (2008).
5. J. Zhang, A. Tselev, Y. Yang, K. Hatton, P. Barbara, and S. Shafraniuk, *Phys. Rev.* **74**, 155414 (2006).
6. T. Ando, *NPG Asia Mater.* **1**, 17 (2009).
7. Н.Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в двенадцати томах*, Наука, Москва (2007), т. 8.
8. И.А. Квасников, *Термодинамика и статистическая физика, Квантовая статистика*, КомКнига, Москва (2005), т. 4.
9. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
10. П.А. Эминов, *ЖЭТФ* **135**, 1029 (2009).
11. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика. Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1987), т. 8, ч. 2.

12. V. Barzykin and L.P. Gorkov, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 227002 (2002).
13. А.В. Чаплик, Л.И. Магарилл, Р.З. Витлина, *ФНТ* **34**, 1094 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 865 (2008)].
14. G.Y. Hu and R.F. O'Connell, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 9381 (1990).

Superconductivity of the quantum cylinder

P.A. Eminov and A.A. Uldin

Thermodynamic potential of the superconducting quantum cylinder was calculated. The dependence of the critical temperature and superconducting system

heat capacity on the surface electron density and cylinder radius was studied. It is shown that critical temperature experiences oscillations when changing the parameter equal to the ratio of the Fermi energy to the dimensional confinement energy.

PACS: **71.10.-w** Theories and models of many-electron systems;

75.75.-c Magnetic properties of nanostructures.

Keywords: superconducting quantum cylinder, nanotube, thermodynamic potential.