

# К теории пространственно неоднородной бозе-эйнштейновской конденсации магнонов в железо-иттриевом гранате

А.И. Бугрий, В.М. Локтев

*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*

*г. Киев, 03143, Украина*

E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua;

vloktev@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 12 августа 2013 г.

Предпринята попытка аналитически рассмотреть бозе-эйнштейновскую конденсацию (БЭК) рожденных мощной накачкой магнонов в тонких ферромагнитных пленках железо-иттриевого граната как системах конечного размера. При этом учтено такое свойственное этому магнитному материалу обстоятельство, как наличие минимума в спектре спиновых волн при конечном значении их волнового вектора. Введено понятие о высокотемпературной БЭК и обсуждены ее характерные особенности. Проанализирована роль граничных условий для спиновых переменных и показано, что в случае свободных спинов на границе в системе может формироваться магнонная решетка. Обсуждены факторы, способствующие ее появлению.

Зроблено спробу аналітично розглянути бозе-ейнштейнівську конденсацію (БЕК) народжених потужним накачуванням магнонів в тонких ферромагнітних плівках залізо-ітрієвого граната як системах скінченного розміру. При цьому враховано таку властиву цьому магнітному матеріалу обставину, як наявність мінімуму в спектрі спинових хвиль при відмінному від нуля значенні їх хвильового вектора. Введено поняття про високотемпературну БЕК та обговорено її характерні особливості. Проаналізовано роль граничних умов для спинових змінних і показано, що у випадку вільних спінів на межі в системі може формуватися магнонна гратка. Обговорено фактори, що сприяють її появі.

PACS: 05.30.Jр Бозонные системы;

75.30.Ds Спиновые волны;

**75.70.-i** Магнитные свойства тонких пленок, поверхностей и границ разделов.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновская конденсация, магноны, железо-иттриевый гранат.

## 1. Введение

Бозе-эйнштейновская конденсация (БЭК) — одно из немногих явлений макроскопической физики, которые имеют квантовую природу. Изучению БЭК посвящено множество теоретических и экспериментальных работ, а история длинна и поучительна (см., например, обзоры [1–4] и цитированную в них литературу). Замечательной особенностью БЭК является не столько возможность самого ее существования как фазового превращения II рода в бозе-системе, сколько то, что она может иметь место в идеальном бозе-газе, или, что то же самое, в коллективе невзаимодействующих между собой частиц либо квазичастиц. Последние, как извест-

но, имеют свою специфику, относятся к возбуждениям над основным состоянием той или иной многочастичной системы, а потому характеризуются конечным временем жизни. Следовательно, их БЭК должна происходить (и происходит), по существу, в неравновесном состоянии, исследованию чего также посвящено немало работ (к примеру, [5–11]). Это, в свою очередь, означает, что если подсистему созданных каким-либо — не термическим — способом квазичастиц, обычно подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна (экситонов [12–14], поляритонов [15–17], магнонов [5–11, 18–21], фотонов в веществе [22–24]), предоставить самой себе, то в процессе установления равновесия одним из промежуточных этапов релаксации может быть и форми-

рование бозе-конденсата. Он существует и сохраняется определенное время, в течение которого можно говорить и о конечном значении химического потенциала  $\mu$  соответствующих квазичастиц. И если не предпринять специальные усилия для поддержания их количества, то конденсат, как коллектив (квази)частиц с плотностью, не отвечающей равновесной, затухнет, и финальным этапом эволюции будет термодинамически равновесное (можно говорить, основное) состояние системы, в которой число возбуждений определяется лишь температурой  $T$  при условии  $\mu = 0$ .

БЭК, или явление накопления бозе-частиц, среднее число  $N$  которых сохраняется, что, в частности, для бесщелевого спектра контролируется условием  $\mu \rightarrow 0$ , в их нижайшем состоянии, была предсказана Эйнштейном много десятилетий назад. Согласно современным представлениям (см. [25], а также [1–4]) соответствующая этому явлению конденсация происходит в импульсном (или энергетическом) пространстве, и никакой конденсации газа в реальном координатном пространстве, а следовательно, и появление в нем конденсированной фазы не происходит. Если сказать точнее, то пространственная структура конденсата отражает лишь координатное распределение плотности вероятности нахождения частиц в их основном состоянии.

Для наблюдения БЭК в различных системах предпринимались многие попытки, однако реализовать ее экспериментально в системе частиц удалось лишь сравнительно недавно [26–28]. Основным препятствием на пути осуществления этого фазового перехода, возникающего по достижении химическим потенциалом равенства  $\mu(T_{BEC}, N) = 0$ , явилась, как известно, чрезвычайно низкая температура  $T_{BEC}$  начала формирования конденсата, когда формально число частиц  $N_0$  в основном состоянии стремится к бесконечности. Такое поведение, конечно, не физично, и обычно полагают, что БЭК отвечает условию  $\mu(T_{BEC}, N) \rightarrow 0$ ; при этом  $N_0 \rightarrow N$ , а число  $N_{exc} = N - N_0$  остальных частиц, или частиц, распределенных по всем возбужденным состояниям, относительно мало,  $N_{exc} \ll N (\sim N_0)$ . В результате, по известной формуле [29]

$$T_{BEC} = 3,31 \frac{\hbar^2}{k_B m} n^{2/3}, \quad (1.1)$$

где  $\hbar$  и  $k_B$  — постоянные Планка и Больцмана,  $m$  — масса частиц, а  $n$  — их плотность. Легко убедиться, что для экспериментально исследованных разреженных газов атомов щелочных металлов  $T_{BEC}$  не превышает  $10^{-6} - 10^{-8}$  К. В случае относительно легких частиц (или квазичастиц) ситуация, казалось бы, более благоприятна, но и для них (например, бозонов с массой, скажем, электронов) температура конденсации  $\sim 1 - 10$  К достижима, как следует из (1.1), с большим трудом, требуя почти предельных концентраций возбуждений в кристалле (см. [12]).

Тем больший и оправданный интерес вызвало сообщение о детектировании методом мандельштам-бриллюэновского рассеяния света процесса образования бозе-кондесата ферромагнонов при практически комнатных температурах [18], хотя низкотемпературная БЭК газа магнонов сверхтекучего  $^3\text{He}$  наблюдалась много раньше [5]. Не отрицая подобной возможности в принципе, все же заметим, что если БЭК действительно может иметь место при столь значительных температурах, то ее (по аналогии с высокотемпературной сверхпроводимостью) с полным правом также можно назвать *высокотемпературной*. Но тогда возникает и вопрос о причинах либо условиях, при которых подобное физическое явление становится реалистичным. А то, что его удалось наблюдать именно для магнонов вполне закономерно. Они, будучи типичными представителями кристаллических элементарных возбуждений, выделяются среди прочих, прежде всего, тем, что имеют сравнительно большое время жизни, обусловленное законом сохранения спинового момента. Поэтому с точки зрения исследования квазистационарных явлений, в которых принимают участие эти возбуждения, либо изучения поведения и измерения их характеристик работать с магнонами удобнее. Таким же условиям удовлетворяют и спиновые возбуждения в сверхтекучем  $^3\text{He}$  (см. [5]).

Отметим две очевидные причины, из-за которых температура конденсации (1.1) газов квазичастиц существенно превышает  $T_{BEC}$  атомарных газов. Во-первых, массы многих квазичастиц значительно меньше атомных: как известно, даже заряженные носители — электроны и дырки, связывающиеся в нейтральные экситоны в полупроводниках, на порядок легче свободных электронов [30,31]. Во-вторых, в газе квазичастиц можно достигать плотности  $10^{18} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$ , что намного превосходит плотность атомарных газов  $10^3 - 10^5 \text{ см}^{-3}$ , с которыми имеют дело в соответствующих БЭК опытах. Важно, что даже при такой большой плотности концентрация квазичастиц в расчете на ячейку очень мала  $\sim 10^{-5} - 10^{-3}$ , т.е. в первом приближении их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.

При этом достаточно быструю спектральную релаксацию магнонного газа можно отнести к интенсивным (но, что существенно, не изменяющим числа магнонов) обменным процессам, а также относительно более слабым взаимодействиям с другими объектами — квазичастицами иной природы (например, фононами) и разного рода дефектами, включая границы образца. Кроме того, спектром магнонов  $\varepsilon(\vec{q})$  (где  $\vec{q}$  — размерный волновой вектор), в первую очередь его щелью  $\varepsilon_0$ , достаточно легко управлять с помощью внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , что делает исследование закономерностей их поведения при больших плотностях еще более информативным.

Как показано в работе [21], квазичастицы, щель в спектре которых и температура удовлетворяют неравенству

$$k_B T \gg \varepsilon_0, \quad (1.2)$$

обнаруживают особенности перехода от исходно неравновесного своего распределения к состоянию равновесия. В частности, если допускает время жизни\*, все неравновесные (т.е. тем или иным способом накачанные в систему) квазичастицы, не пополняя заселенность никаких возбужденных состояний, успевают путем релаксации оказаться в своем нижайшем (но, повторим, являющемся также неравновесным для системы в целом) состоянии, что отмечалось в [21] (см. также [4]). А оно, в свою очередь, и является, согласно определению, конденсатным. В этом смысле БЭК именно этих квазичастиц осуществляется при любой (а не только при предельно низкой, как это обычно имеет место) температуре, и система в целом всегда пребывает в режиме БЭК. Иными словами, высокотемпературная БЭК, или, как отмечалось, накопление всех привнесенных в систему нетермических элементарных возбуждений при необходимом для этого поведении химического потенциала, для накачанных магнонов действительно имеет место.

В этой связи отметим, что при выписанном выше условии, с запасом, выполняющимся для магнонов даже в случае относительно невысоких температур или больших магнитных полей, следует учитывать, что полная концентрация  $n_0$  квазичастиц в их нижайшем состоянии (как, собственно, и во всех других) состоит из двух вкладов, а именно:  $n_0 = n_0^{\text{th}} + n_0^{\text{pump}}$ . Первый из них,  $n_0^{\text{th}}$ , — это их термически равновесная концентрация в этом состоянии, а второй,  $n_0^{\text{pump}}$ , — ее прирост после спектрального перераспределения магнонов, появившихся вследствие внешней мощной электромагнитной накачки  $I_{\text{pump}}$ . Тогда, как нетрудно проверить путем прямого расчета, величина  $n_0$ , зависящая, на самом деле, от отношения  $I_{\text{pump}} / (k_B T)$  [21], оказывается, хотя и заметно большей, чем в каждом из других квантовых состояний, но значительно меньшей, чем во всех возбужденных состояниях вместе взятых, что, как известно, прямо противоположно ситуации, характерной для БЭК в ее классическом проявлении. Тем самым, приходим к выводу, что поскольку при достаточно высоких температурах неравенство  $n_0 \ll n_{\text{exc}}$  неизбежно остается в силе, отнесение к истинной БЭК наблюдаемого в работах [18,20] процесса «оседания» неравновесных квазичастиц на свой основной уровень следует признать, в известной мере, условным. Более того, и интерпретировать это явление с позиций обра-

зования когерентного коллективного состояния также необходимо с некоторой осторожностью, поскольку конденсат в сложившейся ситуации никогда не может быть достаточно интенсивным, а его когерентные свойства требуют специальной проверки. Тем не менее отмеченные специфические черты именно такой — высокотемпературной — БЭК отнюдь не делают ее менее интересным объектом для теоретических и экспериментальных исследований.

В настоящей работе мы ставим своей целью — изучение пространственного (координатного) распределения квазичастиц, скапливающихся на нижайшем своем уровне (речь идет о ферромагнонах). Дело в том, что экспериментальные измерения проводились на тонких ферромагнитных пленках железо-иттриевого граната (ЖИГ) со средним размером  $\sim 5 \text{ мкм} \times 2 \text{ мм} \times 2 \text{ см}$  [18,20]. Они известны не только своим высоким качеством, обеспечивающим большое время жизни магнонов даже при высоких плотностях, но и тем, что спектр магнонов в этих пленках немонотонен. Его минимум (см. [32]) находится не при минимально возможном значении волнового вектора, как это бывает в большинстве магнетиков, а при некотором его конечном значении  $\tilde{q}_0$ , определяющемся диполь-дипольным взаимодействием спинов ионов железа, причем  $|\tilde{q}_0| \approx 3,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  [20]. Такое обстоятельство прямо задает пространственную гармонику, отвечающую этому нижайшему состоянию, и с неизбежностью приводит к немонотонному распределению плотности квазичастиц по образцу. Подчеркнем, что речь идет о возбужденном состоянии системы, а не о какой-либо неколлинеарной модулированной спиновой структуре основного состояния тех или иных магнетиков, примеры которых известны [33]. В данном случае периодическим оказывается не направление спина в решетке, а именно плотность возбуждений. Это проявляет себя формированием в параметрически накачанных мощными импульсами гигагерцевого диапазона пленках ЖИГа полосовых периодических структур — магнонных решеток с периодом  $\sim |\tilde{q}_0|^{-1} \text{ см}$ , которые есть не что иное, как аналог динамических оптических решеток, появляющихся, в частности, как результат самодифракции в экспериментах с когерентными световыми пучками [34].

В случае магнонов ситуация иная, процесс дифракции отсутствует, но имеет место высокотемпературная БЭК с образованием стоячей волны, в интенсивность которой, как будет видно, существенный вклад дают и тепловые возбуждения. На образованных таким образом магнонных структурах и рассеиваются пробные фотоны оптического диапазона. Тогда задачей становится не столько сам очевидный и даже достаточно

\* Оно по сути определяет порог наблюдения высокотемпературной БЭК, но не самого явления, а присутствия в системе накачанных магнонов. Очевидно, что при малом времени жизни магноны будут успевать затухнуть до того, как интенсивность накачки обеспечит необходимый рост их количества [4].

тривиальный факт соответствия между структурой спектра квазичастиц и отвечающими ему пространственными распределениями их плотностей вероятности, сколько нахождение условий, когда полосовая магنونная структура действительно может выжить в условиях наложения вкладов от двух коллективов — относительно слабого, но поддерживаемого накачкой, и мощного термического. Кроме того, довольно необычным оказывается то обстоятельство, что одним из критических факторов появления и наблюдения магنونной решетки является вид граничных условий, которым подчиняются спиновые переменные на границах образца (в реальном эксперименте — тонкой ферромагнитной пленки).

## 2. Модельный спектр и общие соотношения

Положим, что кристаллические пленки ЖИГа, которые исследовались в экспериментах по БЭК магненов, могут быть представлены параллелепипедом объемом  $V = \tilde{L}_x \tilde{L}_y \tilde{L}_z$  (рис. 1), причем в общем случае не только  $\tilde{L}_x \neq \tilde{L}_y \neq \tilde{L}_z$ , но для достаточно тонких пленок  $\tilde{L}_x \ll \tilde{L}_y \ll \tilde{L}_z$ . Количество узлов  $L_j$  ( $j = x, y, z$ ) вдоль каждого направления связано с соответствующими периодами  $a_j$  решетки обычными соотношениями:  $L_j = \tilde{L}_j / a_j + 1$ .

Как известно, в том случае, когда кристалл имеет ферромагнитное спиновое упорядочение (для определенности примем направление оси  $z$  за ось «легкого» намагничивания, которая, тем самым, будет и осью квантования), каждому элементарному возбуждению соответствует один «перевернутый» спин\* в узле [35,36]. Из линейной комбинации таких состояний легко по известным правилам построить собственные состояния многоузельной трансляционно-инвариантной системы в виде спиновых волн с амплитудами  $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l})$ , непосредственный вид которых зависит от граничных условий. Для упрощения (см. [36]) обычно используют периодические граничные условия, когда амплитуды

$$\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l}) = \prod_{j=x,y,z} L_j^{-1/2} e^{iq_j l_j}, \quad q_j = \frac{2\pi k_j}{L_j}, \quad k_j = 0, 1, \dots, L_j - 1, \quad (2.1)$$

т.е. имеют вид плоских волн, в которых безразмерный вектор  $\mathbf{l}$  нумерует узлы решетки:  $l_j = 1, 2, \dots, L_j$ , а безразмерный волновой вектор  $q_j = \tilde{q}_j a_j$  пробегает дискретный набор с шагом  $\Delta q_j = 2\pi / L_j$  в пределах первой зоны Бриллюэна ( $0 \leq q_j < 2\pi$ ).

\* Строго говоря, при произвольном спине  $S$  парамагнитного иона число таких возбуждений (спиновых уровней) на узле может достигать  $2S$ , но для дальнейших расчетов подобное увеличение несущественно, поскольку мы ограничимся так называемым «одномагنونным» приближением, т.е. будем предполагать, что на узле присутствует не более одного возбуждения.

\*\* Интересно отметить, что такой вид волновая функция имеет лишь для магненов, и если рассматривать, например, частицы, движущиеся по решетке с фиксированными для амплитуд условиями на границе, то для этого случая  $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l}) \sim \prod_j \sin q_j l_j$ .

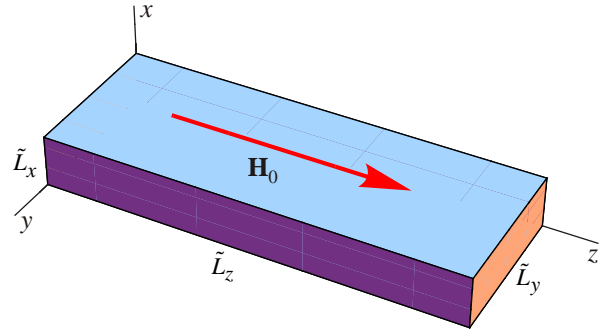


Рис. 1. Схематичное изображение пленки ЖИГа. Стрелкой обозначено направление приложенного к ней магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Для случая свободных спинов на границе решение краевой задачи с соответствующими граничными условиями дает несколько другие значения для амплитуд, а именно\*\* (ср. (2.1)):

$$\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l}) = \prod_{j=x,y,z} L_j^{-2} \gamma(q_j) \cos q_j \left( l_j - \frac{1}{2} \right), \quad q_j = \frac{\pi k_j}{L_j}, \quad (2.2)$$

$$k_j = 0, 1, \dots, L_j - 1, \quad \gamma(0) = 1, \quad \gamma(q \neq 0) = \sqrt{2}.$$

Они, как легко убедиться (см. Приложение), определяют собственные функции возникающей задачи о собственных значениях гамильтониана системы и задают полный набор стоячих волн. Зона Бриллюэна здесь определена несколько иначе —  $0 \leq q_j < \pi$ , а шаг дискретности  $\Delta q_j = \pi / L_j$ .

Каковы бы ни были граничные условия для спинов, они не сильно влияют на спектр ферромагненов, определяемый, главным образом, сильным обменным взаимодействием  $J$ , которое для простоты считаем изотропным. В этом случае кинетическая составляющая спектра может быть представлена выражением, справедливым для случая обоих типов граничных условий:

$$\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q}) = 4J \sum_{j=x,y,z} \sin^2 \frac{q_j}{2}. \quad (2.3)$$

В длинноволновой области  $q_j \ll \pi$  спектр, как следует из (2.3), приобретает обычный «квадратичный» вид:

$$\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q}) = J\mathbf{q}^2, \quad (2.4)$$

причем его легко записать через длины  $\tilde{L}_j$  ребер, периоды  $a_j$  кристаллической решетки и эффективную массу  $m_M$  магненов, непосредственно связанную с обменным интегралом  $J$ .

Выписанное выражение (2.4) не учитывает щель, величина которой в ферромагнетиках может иметь двоякую природу. В отсутствие магнитного поля она определяется магнитной анизотропией и, как правило, невелика. Для щели в случае ЖИГа важнее оказывается внешнее магнитное поле, приложенное вдоль вектора намагниченности и обеспечивающее изменяемую в довольно широком интервале величину  $\varepsilon_0 = \mu_B g H_0$  ( $\mu_B$  — магнетон Бора, а  $g$  — близкий к двум  $g$ -фактор иона трехвалентного железа), с учетом которой спектр магнонов приобретает окончательный вид

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q}). \quad (2.5)$$

Минимальные значения кинетической энергии магнонов, следующие из выражений (2.4) и (2.5), обеспечиваются наименьшими волновыми векторами из разрешенного для них диапазона. В пленках ЖИГ это, как уже упоминалось, не так, и в направлении намагниченности, или в нашем случае оси квантования  $z$ , благодаря вкладу тех же анизотропных взаимодействий, минимум достигается при некотором конечном значении  $z$ -проекции волнового вектора  $\mathbf{q}$ :  $q_z = q_0$ . Точное, хотя и громоздкое, выражение для дисперсии магнонов в ЖИГе с учетом ее своеобразного провала известно (см. [32]), однако для задачи о БЭК вполне достаточно ограничиться квадратичным приближением и для анизотропной добавки. Тогда можно кинетическую энергию магнонов представить выражением [4,20]

$$\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q}) = J \left[ \mathbf{q}_{\perp}^2 + \eta(q_z)(q_z - q_0)^2 \right]. \quad (2.6)$$

При этом безразмерный коэффициент  $\eta(q_z)$  будем в дальнейшем без потери общности считать равным единице.

Предполагая идеальность длинноволновых магнонов (напомним, что их взаимодействие друг с другом  $\sim (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)^2$  [30], и, тем самым, невелико), приходим к необходимости расчета статистической суммы  $Z$  большого канонического ансамбля, которая имеет вид

$$\ln Z = - \sum_{\mathbf{q}} \ln \left\{ 1 - e^{[\mu - \varepsilon(\mathbf{q})]/T} \right\}, \quad (2.7)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{q})$  — энергия магнона, определенная в (2.5), с волновым числом  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ , а  $\mu$  — химический потенциал магнонов. В выражении (2.7) и ниже мы используем систему единиц  $\hbar = k_B = 1$ , восстанавливая зависимость от фундаментальных величин лишь там, где это будет необходимо. Тогда для среднего числа бозе-частиц (число заполнения) в квантовом состоянии с заданным волновым вектором имеем

$$n_{\mathbf{q}} = \frac{1}{e^{[\varepsilon(\mathbf{q}) - \mu]/T} - 1}. \quad (2.8)$$

Как следует из (2.7) и (2.8), область изменения величины  $\mu$  ограничена минимальным значением энергии. В

случае дисперсионного закона (2.5) при условии наличия щели приходим к неравенству  $\mu < \varepsilon_0$ , в котором  $\varepsilon_0 = \varepsilon(\mathbf{q}_0)$ , причем  $\mathbf{q}_0 = (0, 0, q_0)$ , а сама величина  $\varepsilon_0$  полностью определяется внешним статическим полем. Если же  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ , число  $n_{\mathbf{q}_0} \rightarrow \infty$  в конечном объеме, чего быть не может.

Чтобы избежать подобного противоречия, отметим, что химический потенциал как независимая термодинамическая переменная — удобный параметр в теории, но достаточно формальная величина, если говорить об эксперименте, где о  $\mu$ , как правило, можно судить лишь косвенно (например, вычисляя его по измеренному среднему числу частиц или по другим наблюдениям). Нетрудно, однако, убедиться, что при изучении идеального бозе-газа химпотенциал можно полностью исключить из термодинамических формул, заменив его другой независимой переменной, имеющей ясное физическое содержание. Если речь идет о БЭК, то вполне оправданной и удобной величиной оказывается число  $n_0$  частиц на нижайшем уровне. В самом деле, используя (2.5) и (2.8), введем термодинамическую переменную

$$n_0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_0 - \mu)/T} - 1}, \quad (2.9)$$

которая дает возможность легко найти не только  $\mu = \varepsilon_0 - T \ln(1 + n_0^{-1})$ , но и все остальные (для  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$ ) числа заполнения:

$$n_{\mathbf{q}} = \frac{1}{(1 + n_0^{-1}) e^{[\varepsilon(\mathbf{q}) - \varepsilon_0]/T} - 1} = \frac{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} n_0}{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + n_0 + 1}. \quad (2.10)$$

В (2.10) использовано обозначение для числа

$$n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q})/T} - 1}, \quad (2.11)$$

не зависящего ни от задаваемой внешним магнитным полем щели в спектре магнонов, ни от их химического потенциала и, как видно, определяющего максимальную (насыщающую) емкость данного состояния относительно накопления в нем бозе-частиц при данном значении температуры. Замена (2.9) позволяет обойти нефизическую асимптотику  $n_0 \rightarrow \infty$  и исследовать наиболее интересную для БЭК ситуацию, когда  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ . Параметризация искомых величин числом  $n_0$  удобна еще и потому, что с ней фактически отождествляется конденсат, или  $N_{BEC} = n_0$ , а кроме того, имеется возможность корректно осуществлять переход к термодинамическому пределу, когда это необходимо.

Принимая условие  $n_0 \gg n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}}$ , соответствующее режиму конденсации, из (2.10) для всех  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$  получаем разложение

$$n_{\mathbf{q}} = n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + 1}{n_0} \right) + \left( \frac{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + 1}{n_0} \right)^2 - \dots \right], \quad (2.12)$$

которое свидетельствует, что величина (2.11) действительно есть максимально возможное (при формальном условии  $n_0 \rightarrow \infty$ ) число заполнения данного  $\mathbf{q}$ -состояния. Ряд (2.12) удобно использовать и при записи других термодинамических величин. Так, среднее число частиц приобретает вид

$$N = \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} = n_0 + \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}} = n_0 + N_{\text{exc}}, \quad (2.13)$$

где величина

$$N_{\text{exc}} = \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + 1}{n_0} \right) + \left( \frac{n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + 1}{n_0} \right)^2 - \dots \right] \approx N_{\text{sat}} - \frac{\delta N_{\text{sat}}}{n_0} \quad (2.14)$$

при заданной величине  $n_0$  определяет суммарную плотность магнонов во всех возбужденных состояниях. Из нее в последнем соотношении выделено число

$$N_{\text{sat}} = \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}}, \quad (2.15)$$

которое задает максимальное, достигаемое при том же (см. выше) условии  $n_0 \rightarrow \infty$ , количество всех тепловых возбуждений, и коэффициент

$$\delta N_{\text{sat}} = \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} (n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} + 1) \quad (2.16)$$

при первой по  $1/n_0$  поправке, определяющий тепловые флуктуации величины (2.15). При этом видно что вне зависимости от конкретного вида (типа (2.6)) дисперсии элементарных возбуждений обе величины  $N_{\text{sat}}$  и  $\delta N_{\text{sat}}$  суть монотонно растущие функции температуры, поскольку с увеличением  $T$  растут и все числа заполнения  $n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}}$ .

Наконец, комбинируя (2.13), (2.15) и (2.16) в естественном предположении  $N \gg 1$  (и, разумеется,  $n_0 \gg 1$ ), приходим к уравнению

$$N \simeq n_0 + N_{\text{sat}} - \frac{\delta N_{\text{sat}}}{n_0} \quad (2.17)$$

для отыскания плотности бозе-конденсата. В частности, из (2.17) следует, что критическая температура БЭК является решением уравнения  $N_{\text{sat}}(T_{\text{BEC}}) = N$  и уже зависит как от полной концентрации частиц, так и от конкретного вида спектра. А явное выражение для температуры  $T_{\text{BEC}}$  определяется также размерностью и даже формой образца, включая условия на всех его границах.

Аналогичные величины можно ввести для тепловых магнонов, когда  $\mu = 0$ , таким же образом выделив в ней равновесную заселенность

$$n_0^{\text{th}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_0/T} - 1} \quad (2.18)$$

и представив, соответственно,

$$n_{\mathbf{q}}^{\text{th}} = \frac{n_{\mathbf{q}} n_0^{\text{th}}}{n_{\mathbf{q}} + n_0^{\text{th}} + 1}, \quad (2.19)$$

где  $n_{\mathbf{q}}$  — то же число заполнения (2.12), что и в выражении (2.10). Вспоминая теперь, что в условиях накачки все заселенности можно разбить на две составляющие:  $n_{\mathbf{q}} = n_{\mathbf{q}}^{\text{th}} + n_{\mathbf{q}}^{\text{pump}}$ , с помощью (2.14) и (2.19) находим, что для всех  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$

$$n_{\mathbf{q}}^{\text{pump}} \approx \frac{\mu}{T} n_{\mathbf{q}} (n_{\mathbf{q}} + 1). \quad (2.20)$$

Другими словами, в силу условия  $\mu \ll T$ , заселенности возбужденных состояний практически не изменяются, в то время как плотность накачанных частиц в бозе-конденсате ведет себя совершенно иначе:

$$n_0^{\text{pump}} \approx \frac{T}{\mu_B g H_0} \frac{\mu}{(\mu_B g H_0 - \mu)},$$

или может быть сколь угодно большой при сближении  $\mu \rightarrow \mu_B g H_0$ . Более того, из последнего выражения следует, что для конденсатного состояния (в отличие от (2.20)), наоборот, имеет место даже «фактор усиления», поскольку  $T \gg \mu_B g H_0$ . В известной мере увеличение за счет прироста полного числа возбуждений только величины  $n_0$  согласуется с описанием БЭК магнонов на основе феноменологического подхода, в котором динамическая макроскопическая намагниченность, отождествляемая с конденсатом, целиком обусловлена накачкой [10] (см. также [4]).

В результате приходим к уже упомянутому ранее заключению: магноны, которые рождены в термически заселенной ферросистеме интенсивной электромагнитной накачкой, скапливаются преимущественно на своем нижайшем уровне. Следовательно, такая искусственно созданная при любой температуре, удовлетворяющей неравенству  $T \gg \varepsilon_0$  (1.2), подсистема квазичастиц сама по себе формально (если позволяет время жизни) претерпевает БЭК, сосуществуя при этом с мощным тепловым коллективом тождественных ей частиц. Именно такая БЭК является по существу высокотемпературной, а сопутствующий ей процесс есть не что иное, как превращение магнитного кристалла с аномально возбужденной нижайшей модой в магнонный камертон.

### 3. Пространственное распределение плотности возбуждений

Определим одночастичную функцию распределения магнонов следующим образом:

$$\rho(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} |\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l})|^2, \quad (3.1)$$

где  $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l})$  — амплитуда спиновой волны. В случае периодических граничных условий (2.1)  $|\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{l})|^2 = (L_x L_y L_z)^{-1}$ , и функция распределения (3.1) не зависит от  $\mathbf{l}$ . Для свободных же граничных условий амплитуда вещественна и выражается в виде «стоячей волны» (2.1). Поэтому, выделив в сумме (3.1) слагаемое с

наибольшим значением  $n_{\mathbf{q}}$ , а именно: при  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , согласно (2.6), получим

$$\rho(\mathbf{l}) = \frac{2n_0}{L_x L_y L_z} \cos^2 q_0 (l_z - \frac{1}{2}) + \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{l}). \quad (3.2)$$

При увеличении  $n_0$  второе слагаемое в (3.2) достигает предела

$$\rho_{\text{sat}}(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} \psi_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{l}),$$

так что рано или поздно первое слагаемое в (3.2) станет доминирующим. В результате  $\rho(\mathbf{l})$  приобретет осциллирующий характер с частотой  $q_0$  вдоль оси  $z$ . Таким образом, на качественном уровне механизм возникновения периодической структуры в пространственной плотности магнонов оказывается сравнительно простым. Однако точный расчет функции (3.2) достаточно громоздок, поэтому имеет смысл рассмотреть сначала одномерный случай. Это позволит проследить за тем, как и при каких условиях в накачанной системе магнонов может формироваться решетка при температурах, намного превышающих спектральную щель.

### 3.1. Одномерный ферромагнетик

В случае свободных граничных условий волновая функция и квазиимпульс записываются следующим образом (см. Приложение):

$$\psi_q(l) = L^{-\frac{1}{2}} \gamma(q) \cos q(l - \frac{1}{2}), \quad q = \frac{\pi k}{L}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (3.3)$$

Распределение (3.1) также легко переписывается, приобретая вид

$$\rho(l) = \sum_q n_q \psi_q^2(l), \quad (3.4)$$

в котором

$$n_q = \frac{n_q^{\text{sat}} n_0}{n_q^{\text{sat}} + n_0 + 1}, \quad n_q^{\text{sat}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\text{kin}}(q)/T} - 1}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим сначала «монотонный» закон дисперсии  $\varepsilon(q) = \varepsilon_0 + Jq^2$ . Поскольку квазиимпульс  $q$  величина дискретная (см. 3.3)), вместо числа заполнения  $n_q$  введем функцию целочисленного аргумента

$$f(k) = n_q = \frac{1}{e^{\delta + \omega^2 k^2} - 1}, \quad \delta = \ln(1 + n_0^{-1}), \quad \omega^2 = \frac{J}{\pi^2 L^2 T}. \quad (3.6)$$

Тогда пространственную плотность магнонов (3.4) для случая (2.10) можно записать в виде суммы:

$$\rho(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \gamma^2(k) \cos^2 \pi k z = \frac{1}{2L} [\rho_1(z) + \rho_1(0)], \quad (3.7)$$

где переменная  $z = (l - 1/2)/L$  изменяется в пределах  $0 < z < 1$ . Через  $\rho_1(z)$  обозначена сумма

$$\rho_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cos 2\pi k z. \quad (3.8)$$

Заметим, что из определения (3.7) следует, что  $\rho(z) = \rho(1-z)$ , т.е. плотность магнонов является симметричной относительно точки  $z = 1/2$  функцией.

Рассматривая переменную  $k$  как комплексную, выразим искомую сумму (3.8) через контурный интеграл

$$\rho_1(z) = \oint_{C_1} \frac{dk e^{2\pi i k z}}{e^{2\pi i k} - 1} f(k), \quad (3.9)$$

где путь интегрирования  $C_1$  изображен на рис. 2.

Поскольку, как нетрудно убедиться, функция (3.6) имеет простые полюсы в точках  $k = k_j$ , где

$$\omega k_j = \pm i u_j \pm \frac{\pi j}{u_j}, \quad u_j = \sqrt{\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \pi^2 j^2}}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

интеграл (3.9) выражается через сумму вычетов в этих полюсах, в которой можно ограничиться лишь вкладом от полюсов, ближайших к вещественной оси в комплексной  $k$ -плоскости. Прделав необходимые выкладки, получим выражение

$$\rho_1(z) = \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \alpha (1-2z)}{\omega^2 \alpha \operatorname{ch} \alpha} + o[e^{-\pi^{3/2} z / \omega}], \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\delta}, \quad (3.11)$$

входящее в формулу (3.7) для  $\rho(z)$ . Она, однако, содержит значение  $\rho_1(0)$ , которое из (3.11) не следует ввиду большой величины поправок для  $z = 0$ . Для расчета  $\rho_1(z)$  в области малых значений  $z$  необходимо вместо (3.9) использовать представление

$$\rho_1(z) = -\frac{i}{2} \oint_{C_1} dk f(k) \cos 2\pi k z \operatorname{ctg} \pi k = \frac{2\pi^2}{\omega^2 \alpha} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha z}{e^{2\alpha} - 1} + \int_0^{\infty} dk f(k) \cos 2\pi k z + o[e^{-\pi^{3/2} z / \omega}], \quad (3.12)$$

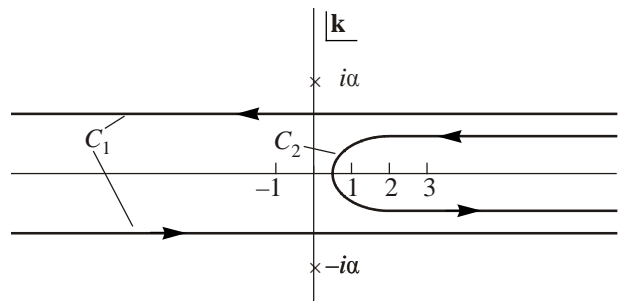


Рис. 2.  $C_1, C_2$  — контуры интегрирования в интегралах (3.9), (3.17). Крестиками обозначены ближайшие к вещественной оси комплексной  $k$ -плоскости полюсы функций  $f(k)$  (3.6) и  $F(k)$  (3.31).

откуда находим:

$$\begin{aligned} \rho_1(0) &= \frac{2\pi^2}{\omega^2 \alpha (e^{2\alpha} - 1)} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega} Li_{1/2}(e^{-\delta}) = \\ &= n_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \left[ Li_{1/2}(e^{-\delta}) - \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $Li_{1/2}(e^{-\delta})$  — полилогарифм [37]. Найденные зависимости решают задачу о пространственном распределении магнов, но в предположении квадратичного спектра оно оказывается гладким не только для случая периодических граничных условий, но и в случае свободных границ.

Иная ситуация возникает, если спектр имеет минимум в точке  $q = q_0 \neq 0$ , что в одномерном случае может быть без потери общности представлено в виде

$$\varepsilon(q) = \varepsilon_0 + J(q - q_0)^2. \quad (3.14)$$

Тогда, с учетом (3.14), выражение (3.4) приобретает форму

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} f(k - k_0) \gamma^2(k) \cos^2 \pi k z = \\ &= \frac{1}{L} [A_{\text{latt}}(z) \cos^2 \pi k_0 z + A(z)], \\ A_{\text{latt}}(z) &= 2\rho_1(z), \\ A(z) &= \rho_1(0) - \rho_1(z) - \rho_2(0) - \rho_2(z) - f(k_0), \end{aligned} \quad (3.15)$$

в котором выделено осциллирующее с характерным периодом  $\sim k_0^{-1} = \pi / (Lq_0)$  слагаемое, целиком обусловленное присутствием косинуса в волновой функции (3.3). Функция  $\rho_1(z)$  в (3.15) определена в (3.8), а функция

$$\rho_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k + k_0) \cos 2\pi k z \quad (3.16)$$

также может быть представлена контурным интегралом

$$\rho_2(z) = \oint_{C_2} \frac{dk e^{2\pi i k z}}{e^{2\pi i k} - 1} f(k + k_0), \quad (3.17)$$

где контур интегрирования  $C_2$  изображен на рис. 2.

Непосредственный расчет этого интеграла, как и (3.9), проведем в два приема. Сначала предположим, что введенные выше параметры  $\delta$  и  $\omega$  малы, а значение  $k_0$  велико, что соответствует ситуации, имеющей место при исследовании ЖИГа. Тогда, воспользовавшись точным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi e^{2\pi \xi z}}{e^{2\pi \xi} + 1} = \frac{1}{2 \sin \pi z}$$

и разлагая в ряд функцию  $f(k + k_0)$  в окрестности точки  $k = 1/2$ , найдем асимптотическое разложение для интеграла (3.17). В первом порядке имеем

$$\rho_2(z) \simeq -f_0 \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\kappa}}{1 - e^{-2\kappa - 2\pi i z}} \right), \quad (3.18)$$

где  $f_0 = f(k_0 + 1/2)$ ,  $\kappa = f_1 / 2f_0$  и  $f_1 = f'(k_0 + 1/2)$ . Выражение (3.18) является хорошим приближением в диапазоне  $k_0^{-1} < z < 1 - k_0^{-1}$ , а при меньших значениях  $z$  необходимо использовать представление

$$\rho_2(z) = -\frac{i}{2} \oint_{C_2} dk f(k + k_0) \cos 2\pi k z \operatorname{ctg} \pi k = I_1(z) + I_2(z), \quad (3.19)$$

$$I_1(z) = 2\operatorname{Re} \int_{C_-} \frac{dk \cos 2\pi k z}{e^{2\pi i k} - 1} f(k + k_0),$$

$$I_2(z) = \int_{1/2}^{\infty} dk f(k + k_0) \cos 2\pi k z,$$

в котором через  $C_-$  обозначен участок контура  $C_2$ , лежащий в нижней полуплоскости комплексной переменной  $k$ . Приближенное выражение для первого из интегралов (3.19) можно получить аналогично (3.18), что дает:

$$I_1(z) \simeq -\frac{1}{24} (2\pi z f_0 \sin \pi z - f_1 \cos \pi z). \quad (3.20)$$

Второй интеграл также можно найти после несложных вычислений. Мы приведем его лишь для точки  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} I_2(0) &= \frac{1}{\omega \sqrt{\delta}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{\delta}}{\omega(k_0 + 1/2)} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega} Li_{1/2}(e^{-\delta}) - \frac{\pi}{2\omega \sqrt{\delta}} + \\ &+ \int_0^{k_0+1/2} dk \left( \frac{1}{\delta + \omega^2 k^2} - \frac{1}{e^{\delta + \omega^2 k^2} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В итоге, из (3.18)–(3.21) видно, что даже при небольшом удалении от краев цепочки между вкладками  $\rho_2(z)$  и  $\rho_2(0)$  имеет место неравенство  $\rho_2(0) \gg \rho_2(z)$ , и только в непосредственной близости от границ эти вклады становятся сравнимыми. Тогда для амплитуды (3.15) периодической структуры из (3.11) находим

$$A_{\text{latt}}(z) = 2n_0 \alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{4\pi^2}{\omega^2} \lambda(z), \quad \lambda(z) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha z) \operatorname{sh} \alpha(1-z)}{\alpha \operatorname{sh} \alpha}. \quad (3.22)$$

Выражение для неоднородного, но «нерешеточного» распределения  $A(z)$  из (3.15) имеет более громоздкий вид, но после расчета интегралов (3.17) и (3.19) с учетом (3.20) и (3.21) для него можно получить достаточно простую приближенную формулу:

$$A(z) = \frac{2}{\omega^2} \left[ \pi^2 \lambda(z) - \mathcal{O} \left( \frac{1}{2k_0 + 1} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Из явного вида функций  $A_{\text{latt}}(z)$  и  $A(z)$ , входящих в распределение (3.15) плотности магнов в цепочке,



можно найти условия формирования магнонной решетки. Соответствующая периодическая структура возникнет в том случае, когда ее амплитуда  $A_{\text{latt}}(z)$  превысит величину сравнительно плавного вклада  $A(z)$ , что физически контролируется отношением  $a_{\text{latt}}(z) = A_{\text{latt}}(z)/A(z)$ . Для малых значений  $n_0$  конденсатной составляющей бозе-частиц, или при выполнении неравенств  $\omega^2 n_0 \ll 1$ ,  $\alpha \gg 1$ , коэффициент  $a_{\text{latt}}(z) \approx 1/2e^{-2\alpha z} \ll 1$ , так что осцилляции проявиться не могут, что, собственно, и должно быть. Тем более периодическая структура отсутствует в равновесии, хотя заселенность  $n_0^{\text{th}}$  (см. (2.18)) является наибольшей. Напротив, для случая больших чисел  $n_0$  и малой щели в спектре магнонов, когда  $\alpha \ll 1$ , величина  $a_{\text{latt}}(z) \approx n_0 \omega^2 / [\pi^2 z(1-z)] \gg 1$ , и решетка плотности возбуждений преобладает над фоном. При этом критической (переходной) плотностью бозе-конденсата, как нетрудно убедиться, является ее значение, при котором  $a_{\text{latt}}(z) \approx 1$ , или  $n_0 \approx 1/\omega^2 = \pi^2 L^2 T / J$ . Следует также отметить, что появление модулированной структуры на относительно гладком фоне распределения плотности накаченных возбуждений происходит по мере увеличения накачки (т.е. плотности бозе-конденсата) плавно, а не скачкообразно, как это утверждается в работе [9], и не требует предположения о наличии в системе двух конденсатов [25] либо аномально сильно затухания квазичастиц (магнонов).

### 3.2. Трехмерный ферромагнетик

Представим отношение  $\epsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q})/T$  в безразмерных параметрах

$$\frac{\epsilon_{\text{kin}}(\mathbf{q})}{T} = \omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 (k_z - k_0)^2, \quad (3.24)$$

где  $k_0 = 22282$  — ближайшее к  $\tilde{q}_0 L_z / \pi$  при  $L_z = 2$  см целое число, а

$$\omega_x = \frac{\tilde{L}_z}{L_x} \omega, \quad \omega_y = \frac{\tilde{L}_z}{L_y} \omega, \quad \omega_z = \omega = \frac{\pi}{L_z} \sqrt{\frac{J}{T}}. \quad (3.25)$$

Если при этом выразить константу  $J$  через массу магнона  $m_{\text{mag}}$  (в ЖИГе она  $\simeq 5m_e$ ), получим, что в области комнатных температур ( $T \simeq 300$  К)

$$\omega = \frac{\pi \hbar}{L_z} (2m_{\text{mag}} k_B T)^{-\frac{1}{2}} \simeq 8,53 \cdot 10^{-8}. \quad (3.26)$$

Для количественного описания эффекта осцилляций нужно вычислить сумму в правой части (3.2). Но вместо нее проще рассматривать плотность магнонов, усредненную по координатам  $\mathbf{l}_{\perp}$ , а именно:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z) &= L_z \sum_{\mathbf{l}_{\perp}} \rho(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} \gamma^2(q_z) \cos^2 q_z (l_z - \frac{1}{2}) = \\ &= \sum_{k_z=0}^{\infty} F(k_z - k_0) \gamma^2(k_z) \cos^2 \pi k_z z, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$F(k_z - k_0) = \sum_{\mathbf{q}_{\perp}} n_{\mathbf{q}}, \quad z = \frac{l_z - 1/2}{L_z}. \quad (3.28)$$

Представим  $\bar{\rho}(z)$  аналогично одномерному случаю (3.15):

$$\bar{\rho}(z) = A_{\text{latt}}(z) \cos^2 \pi k_0 z + A(z), \quad (3.29)$$

$$A_{\text{latt}}(z) = 2\rho_1(z), \quad A(z) = \rho_1(0) - \rho_1(z) - \rho_2(0) - \rho_2(z) - F(k_0),$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(z) &= \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} F(k_z) \cos 2\pi k_z z, \\ \rho_2(z) &= \sum_{k_z=1}^{\infty} F(k_z + k_0) \cos 2\pi k_z z. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Как видно из определения (3.28), функция  $F(k_z)$  является суммой «бозе»-слагаемых типа (3.6)

$$F(k_z) = \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \frac{1}{e^w - 1}, \quad (3.31)$$

где

$$w = w(k_x, k_y, k_z) = \delta + \omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2. \quad (3.32)$$

Поэтому для вычисления  $\rho_1(z)$  можно воспользоваться преобразованиями (3.9), когда  $k_0^{-1} < z < 1 - k_0^{-1}$ , либо (3.12), когда  $0 \leq z < k_0^{-1}$ . В результате получим для  $\rho_1(z)$  представление в виде ряда

$$\rho_1(z) = \frac{\pi^2}{\omega_z^2} \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \frac{\text{cth } \alpha_z (1-2z)}{\alpha_z \text{ sh } \alpha_z}, \quad (3.33)$$

где через  $\alpha_j$  обозначены функции:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_x(k_y, k_z) = \frac{\pi}{\omega_x} \sqrt{\delta + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2}, \\ \alpha_y &= \alpha_y(k_x, k_z) = \frac{\pi}{\omega_y} \sqrt{\delta + \omega_x^2 k_x^2 + \omega_z^2 k_z^2}, \\ \alpha_z &= \alpha_z(k_x, k_y) = \frac{\pi}{\omega_z} \sqrt{\delta + \omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

При  $\delta \ll 1$  и с учетом малости отношений  $\omega_z/\omega_x$ ,  $\omega_z/\omega_y$  для (3.33) справедливо приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \rho_1(z) &= \frac{\pi^2}{\omega_z^2} \frac{\text{cth } \alpha (1-2z)}{\alpha \text{ sh } \alpha} - \frac{\pi}{\omega_z \omega_y} \ln(1 - e^{-2\pi z \omega_y / \omega_z}) = \\ &= \frac{\alpha \text{ cth } \alpha}{\delta} + \frac{2\pi^2}{\omega_z^2} \frac{\text{sh } \alpha z \cdot \text{sh } \alpha (1-z)}{\alpha \text{ sh } \alpha} - \frac{\pi}{\omega_z \omega_y} \ln(1 - e^{-2\pi z \omega_y / \omega_z}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $\lambda(z)$  определено в (3.22), а  $\alpha = \alpha_z(0,0) = \pi \sqrt{\delta} / \omega_z$ . Отброшенные вклады в (3.35) не превышают величины  $\pi e^{-2\pi z \omega_x / \omega_z} / (2\omega_x \omega_z)$ . Как и ранее, для отыскания

значения  $\rho_1(0)$  воспользуемся преобразованием (3.12). Тогда

$$\rho_1(0) = \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} F(k_z) = R + I, \quad (3.36)$$

где  $R$  — сумма вычетов в ближайших к вещественной оси полюсах функции  $F(k_z)$

$$R = \frac{2\pi^2}{\omega_z^2} \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_x (e^{2\alpha_x} - 1)}. \quad (3.37)$$

Аналогично (3.35) получим для  $R$  приближенное выражение:

$$R = \frac{2\pi^2}{\omega_z^2} \frac{1}{\alpha (e^{2\alpha} - 1)} = \frac{\alpha \operatorname{cth} \alpha}{\delta} - \frac{\pi}{\omega_z} \frac{1}{\delta^{1/2}}, \quad (3.38)$$

причем отброшенные члены не превышают величины  $\pi e^{-2\pi\omega_y/\omega_z} / (\omega_y \omega_z)$ . Через  $I$  в правой части (3.36) обозначен интеграл

$$I = 2 \int_0^{\infty} dk_z F(k_z). \quad (3.39)$$

Применим последовательно к суммированиям в (3.31) преобразование (3.7). Тогда, в частности, для суммы по  $k_y$  получим

$$\sum_{k_y=0}^{\infty} \frac{1}{e^w - 1} = \frac{\pi^2}{\omega_y^2} \frac{1}{\alpha_y} \frac{1}{e^{2\alpha_y} - 1} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y [1 + \delta(k_y)]}{e^w - 1}, \quad (3.40)$$

где  $\delta(k)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Выполняя аналогично (3.40) суммирование по  $k_x$ , получим для  $F(k_z)$  следующее выражение:

$$F(k_z) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y}{e^w - 1} [1 + \delta(k_x)][1 + \delta(k_y)] + \frac{\pi^2}{2\omega_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y [1 + \delta(k_y)]}{\alpha_x e^{2\alpha_x} - 1} + \frac{\pi^2}{\omega_y^2} \sum_{k_x=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_y e^{2\alpha_y} - 1}. \quad (3.41)$$

Отметим, что в сумме в правой части (3.41) можно удерживать только член с  $k_x = 0$ , так как остальные слагаемые «экспоненциально» малы:  $\sim e^{-2\pi\omega_x/\omega_z}$ . Подставляя (3.41) в (3.39) и выполняя интегрирование, получим для интеграла  $I$  следующее выражение:

$$I = \frac{\pi^{3/2}}{8\omega_x \omega_y \omega_z} \operatorname{Li}_3(e^{-\delta}) - \frac{\pi(\omega_y + \omega_x)}{8\omega_x \omega_y \omega_z} \ln(1 - e^{-\delta}) + \frac{\sqrt{\pi}}{8\omega_z} \operatorname{Li}_1(e^{-\delta}) - \frac{\pi}{4\omega_y \omega_z} \ln\left(1 - e^{-2\pi\delta^{1/2}/\omega_x}\right) + \frac{\pi}{\omega_y \omega_z} G\left(\frac{2\pi}{\omega_y} \delta^{1/2}\right) + \frac{\pi}{2\omega_x \omega_z} G\left(\frac{2\pi}{\omega_x} \delta^{1/2}\right), \quad (3.42)$$

где через  $G(t)$  обозначен интеграл

$$G(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{t^2 + x^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{t^2 + x^2}} - 1}. \quad (3.43)$$

Асимптотическое разложение  $G(t)$  при  $t \ll 1$  имеет вид

$$G(t) = \frac{\pi}{2t} + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{4\pi} + C - \frac{\zeta(3)}{16\pi^2} t^2 + O(t^4), \quad (3.44)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $\zeta(\theta)$  —  $\zeta$ -функция Римана. Расчет  $\rho_2(z)$  по сути не отличается от одномерного случая (3.18): нужно только вместо функции  $f(k)$  (3.6) использовать функцию  $F(k)$  (3.41). Тогда при  $k_0^{-1} < z < 1 - k_0^{-1}$  получим

$$\rho_2(z) = -F_0 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-\kappa}}{1 - e^{-2\kappa - 2\pi iz}} \right], \quad (3.45)$$

где  $F_0 = F(k_0 + \frac{1}{2})$ ,  $F_1 = F'(k_0 + \frac{1}{2})$ ,  $\kappa = \frac{F_1}{2F_0}$ , а при  $z = 0$

$$\rho_2(0) = \frac{1}{2} I - I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_0^{k_0+1/2} dk_z F(k_z), \quad I_2 = \operatorname{Re} \int_{C_-} \frac{dk_z F(k_z + k_0)}{e^{2\pi i k_z} - 1}. \quad (3.46)$$

Подставляя в (3.29) соотношения (3.35), (3.36), (3.38), (3.45) и (3.46), получим выражение для  $A(z)$ . Оно выглядит довольно громоздким, хотя и состоит из элементарных функций и однократных интегралов, численный расчет которых не составляет труда. Оказывается, однако, что в области  $k_0^{-1} < z < 1 - k_0^{-1}$  хорошим приближением для коэффициентов  $A_{\text{latt}}(z)$ ,  $A(z)$  является

$$A_{\text{latt}}(z) = 2n_0 \alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{4\pi^2}{\omega^2} \lambda(z),$$

$$A(z) = N_{\text{sat}} - \frac{\delta N_{\text{sat}}}{n_0} + \frac{2\pi^2}{\omega^2} \lambda(z), \quad (3.47)$$

где  $\alpha = \pi / (\omega_z \sqrt{n_0})$ ,

$$N_{\text{sat}} = \Omega \left\{ \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \varkappa \ln(1 - \varkappa) + \omega_x \ln\left(\frac{\omega_x}{8\pi\omega_y^2}\right) \right] \right\},$$

$$\delta N_{\text{sat}} = \frac{\pi \zeta(3)}{2\omega_y^3 \omega_z},$$

$$\Omega = \frac{\pi}{8\omega_x \omega_y \omega_z} = L_x L_y L_z \left( \frac{m_{\text{mag}} k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}, \quad \varkappa = \omega_z (k_0 + \frac{1}{2}). \quad (3.48)$$

Относительная погрешность приближенного выражения (3.47) по сравнению с точным (3.29) при  $n_0 > \omega_y^{-2} \gg \omega_x^{-2}$  не превышает  $0,5 \cdot 10^{-3}$ . Как видно из (3.47), амплитуда осцилляций  $A_{\text{latt}}(z)$  убывает по мере удаления вдоль координаты  $z$  от границ пленки, а фо-

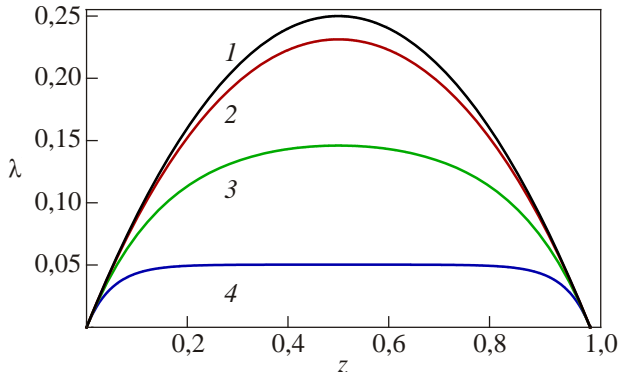


Рис. 3. Поведение функции  $\lambda(z)$  при разных значениях  $n_0$ . Кривым 2–4 ( $j > 1$ ) соответствует  $n_0 = 10^{3-j} \omega_z^2$ , а кривой 1 —  $n_0 = \infty$ .

новый вклад, напротив, возрастает за счет слагаемых, пропорциональных функции  $\lambda(z)$  (3.22). График этой функции для некоторых значений  $n_0$  показан на рис. 3.

Заметим, что выражение (3.47) для  $A_{\text{latt}}(z)$  в трехмерном случае не отличается от одномерного (3.22). Однако фоновый вклад  $A(z)$  значительно превышает таковой для одномерной задачи (3.23), поэтому наблюдать периодические пространственные осцилляции  $\rho(z)$  значительно легче в тонких пленках, причем, чем тоньше, тем лучше. В противном случае требуется предельно большая накачка, которая позволила бы довести величину  $n_0$  до значений, сравнимых с  $N_{\text{sat}}$ . Именно такая зависимость от уровня накачки наблюдалась в работе [38].

#### 4. Заключение

Хотя условия формирования и наблюдение магнной решетки в магнитных пленках типа ЖИГа достаточно жесткие, особенно при комнатных температурах, можно назвать ряд факторов, которые способствуют этому эффекту. Кроме отмечавшегося выше уменьшения толщины пленок, это понижение температуры, а также, что менее очевидно, увеличение избирательности измерительной аппаратуры, подавляющей частоты вне резонансной области, к которой в данном случае следует отнести частоту  $\nu_0 = \varepsilon_0 / \hbar$ , равную в ЖИГе  $\simeq 2$  ГГц.

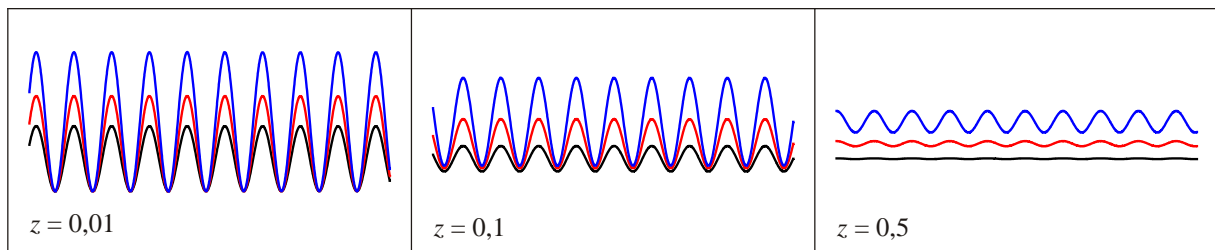


Рис. 4. Осцилляции пространственной плотности магненов на различных участках пленки:  $z = (0,01, 0,1, 0,5)$  в зависимости от величины  $n_0 = (0,5, 1,2) \cdot 10^{14} \gg n_0^{\text{th}}$ .

В самом деле, предположим, что амплитудно-частотная характеристика приемника характеризуется функцией

$$\Phi(u_{\mathbf{q}}) = \frac{1}{1 + Q^2 (u_{\mathbf{q}} - u_{\mathbf{q}}^{-1})^2}, \quad (4.1)$$

где  $Q$  — добротность,  $u_{\mathbf{q}} = \varepsilon(\mathbf{q}) / \varepsilon_0$ . Тогда вместо  $N_{\text{sat}}$  (3.48) будет наблюдаться другая величина  $N_{\text{obs}}$

$$N_{\text{obs}} = \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0} n_{\mathbf{q}}^{\text{sat}} \Phi(u_{\mathbf{q}}). \quad (4.2)$$

Проведя для нее выкладки, подобные тем, что выполнены при вычислении (3.47), можно получить следующее приближенное выражение:

$$N_{\text{obs}} = \Omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\pi Q T}} \left[ \pi + \arctg(1 + 2v) - \arctg(1 - 2v) + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2v + 2v^2}{1 - 2v + 2v^2} + v \ln(1 + v^{-4} / 4) \right], \quad (4.3)$$

где  $v = \varkappa \sqrt{Q T} / \varepsilon_0$ . Как видно из сравнения (3.48) и (4.3), подавление фона определяется коэффициентом  $\sqrt{\varepsilon_0 / (Q T)}$ . Например, при  $Q = 20$  численные значения  $N_{\text{sat}}$  и  $N_{\text{obs}}$  таковы:

$$N_{\text{sat}} \simeq 7,42 \cdot 10^{16}, \quad N_{\text{obs}} \simeq 3,68 \cdot 10^{14}, \quad N_{\text{sat}} / N_{\text{obs}} \simeq 200.$$

Полюсы в комплексной  $k$ -плоскости функции (4.1) расположены намного дальше от вещественной оси, чем полюсы функции  $F(k)$  (3.28). Поэтому введение функции  $\Phi(u_{\mathbf{q}})$  практически не влияет на величину коэффициента  $A_{\text{latt}}(z)$  (3.47). В результате, при  $n_0 \sim N_{\text{obs}}$  выражение для плотности магненов приобретает очень простой вид:

$$\bar{\rho}(z) = [2n_0 \alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{4\pi^2}{\omega^2} \lambda(z)] \cos^2 \pi k_0 z + N_{\text{obs}} - \frac{\delta N_{\text{sat}}}{n_0} + \frac{2\pi^2}{\omega^2} \lambda(z) \simeq 2n_0 \cos^2 q_0 l_z + N_{\text{obs}}. \quad (4.4)$$

На рис. 4 показаны графики пространственной плотности магненов, рассчитанные согласно выражениям (4.3), (4.4), видно, что амплитуда осцилляций возрастает при увеличении накачки и уменьшении расстояния от края образца вдоль оси  $z$ .

Отметим, что эксперименты [20] могут обеспечить наиболее точный способ для определения положения минимума в законе дисперсии. Из последней формулы следует, что при накачках, обеспечивающих значение  $n_0$ , как минимум на два порядка меньше, чем  $N_{\text{sat}}$ , в тонкой ферромагнитной пленке можно наблюдать стоячее пространственное распределение плотности накачанных и благодаря релаксации сконденсировавшихся в нижайшем состоянии магновов с периодом, пропорциональным  $q_0^{-1}$ . Такая волна проявляется в виде линейчатой (полосовой) структуры плотности магновов по оси, вдоль которой имеется провал в их законе дисперсии  $\epsilon(\mathbf{q})$ . Период структуры составляет величину  $\pi/\tilde{q}_0$  и для случая ЖИГа равен  $\approx 0,92$  мкм, которая не зависит от размеров образца, что и подтверждается измерениями [38]. При этом, как отмечается в той же работе [38], глубина провалов в сформировавшейся стоячей волне пространственного распределения конденсата существенно зависит от интенсивности накачки  $I_{\text{pump}}$ , хотя можно показать (см. [21]), что контраст магнонной решетки не должен зависеть от отношения  $I_{\text{pump}}/(k_B T)$ . Что касается наблюдения в работе [38] краевых дислокаций в этой решетке, то их появление парами отвечает сохранению топологического заряда, однако сам механизм зарождения таких топологических дефектов требует отдельного рассмотрения, ввиду того, что присутствие в структуре дислокаций повышает ее энергию, а следовательно, периодический конденсат с протяженными дефектами — это возбужденный конденсат. Кроме того, на магнонных решетках можно рассеивать свет и исследовать другие оптические явления, в которых такая решетка может себя проявить.

Мы признательны С.Г. Одулову за обсуждение вопроса об оптических решетках. Работа выполнена в рамках Целевой программы фундаментальных исследований Отделения физики и астрономии НАН Украины.

### Приложение

Как известно, проекции оператора спина  $\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z)$  удовлетворяют перестановочным соотношениям [35]:

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad S^\pm = S^x \pm iS^y. \quad (\text{П.1})$$

Обозначим через  $\chi_S$  нормированный на единицу собственный вектор оператора  $S^z$  с максимальным собственным значением  $S$ , так что

$$S^z \chi_S = S \chi_S, \quad S^+ \chi_S = 0, \quad S^- \chi_S = \sqrt{2S} \chi_{S-1}, \quad (\chi_S, \chi_S) = 1. \quad (\text{П.2})$$

Вектор  $\chi_{S-1}$  в (П.2) также собственный для оператора  $S^z$  и для него из (П.1) следуют очевидные соотношения:

$$S^z \chi_{S-1} = (S-1) \chi_{S-1}, \quad (\chi_{S-1}, \chi_{S-1}) = 1, \quad (\chi_{S-1}, \chi_S) = 0.$$

Назовем  $|0\rangle$  основным (вакуумным) состоянием цепочки из  $L$  спинов, ориентированных вдоль направления  $z$  и имеющих максимальное значение  $z$ -проекции, а  $|l\rangle$  — ее одночастичное возбужденное состояние, когда  $z$ -проекция спина, расположенного в узле  $l$ , на единицу меньше:

$$|0\rangle = \prod_{j=1}^L \chi_S(j), \quad |l\rangle = \prod_{j=1}^{l-1} \chi_S(j) \chi_{S-1}(l) \prod_{j=l+1}^L \chi_S(j), \quad (\text{П.3})$$

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 0|l\rangle = 0, \quad \langle l|l'\rangle = \delta_{l,l'}.$$

Если в спиновой цепочке взаимодействуют только ближайшие соседи, то ее простейший гамильтониан может быть представлен в виде  $\mathcal{H} = JH$ , где

$$H = S^{-1} \sum_{l=1}^{L-1} (S^2 - \mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l+1}), \quad [\mathbf{S}_{l_1}, \mathbf{S}_{l_2}] = 0. \quad (\text{П.4})$$

С помощью (П.1) легко установить, что  $H|0\rangle = 0$ ; для всех  $l$ , удовлетворяющих условию  $1 < l < L$ ,

$$H|l\rangle = 2|l\rangle - |l+1\rangle - |l-1\rangle,$$

а на состояния, соответствующие крайним узлам, этот гамильтониан действует иначе:

$$H|1\rangle = |1\rangle - |2\rangle, \quad H|L\rangle = |L\rangle - |L-1\rangle. \quad (\text{П.5})$$

Введем линейную комбинацию одночастичных состояний

$$|q\rangle = \sum_{l=1}^L \psi_q(l) |l\rangle$$

и подействуем на нее оператором  $H$  с учетом (П.5):

$$H|q\rangle = \sum_{l=1}^L [2\psi_q(l) - \psi_q(l-1) - \psi_q(l+1)] |l\rangle, \quad (\text{П.6})$$

причем волновые функции (амплитуды) удовлетворяют свободным граничным условиям:

$$\psi_q(0) = \psi_q(1), \quad \psi_q(L+1) = \psi_q(L). \quad (\text{П.7})$$

Из (П.6) видно, что бра-вектор  $|q\rangle$  будет собственным одномагнонным состоянием спинового гамильтониана:

$$H|q\rangle = 4 \sin^2(q/2) |q\rangle,$$

если амплитуда  $\psi_q(l)$  имеет вид

$$\psi_q(l) = L^{-1/2} \gamma(q) \cos q(l - \frac{1}{2}), \quad q = \frac{\pi k}{L}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1,$$

а коэффициент ее нормировки определяется из условия  $\langle q|q'\rangle = \delta_{q,q'}$ , откуда находим

$$\gamma^{-2}(q) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \cos^2 q(l - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 + \delta_{q,0}).$$

Заметим, наконец, что для обычно используемых циклических условий к гамильтониану (П.4) добавляется слагаемое  $S^{-1}(S^2 - \mathbf{S}_L \mathbf{S}_1)$ , что обуславливает изменение граничных условий (П.7) на периодические (все узлы эквивалентны):

$$\psi_q(0) = \psi_q(L), \quad \psi_q(L+1) = \psi_q(1),$$

В результате чего волновая функция приобретает простой экспоненциальный вид:

$$\psi_q(l) = L^{-\frac{1}{2}} \gamma(q) e^{iq l}, \quad q = \frac{2\pi k}{L}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1.$$

1. S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
2. T. Giamarchi, C. Ruegg, and O. Chernyshov, *Nature Phys.* **4**, 198 (2008).
3. Ю.М. Буньков, *УФН* **180**, 884 (2010).
4. Yu.M. Bunkov and G.E. Volovik, *ArXiv: 1003.4889* (2012).
5. A.S. Bogovik-Romanov, Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, Yu.M. Mukharskiy, and D.A. Sergatskov, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1631 (1989).
6. Yu.D. Kalafati and V.L. Safonov, *Sov. Phys. JETP* **68**, 1162 (1989).
7. М.И. Каганов, Н.Б. Пустыльник, Т.И. Шалаева, *УФН* **167**, 197 (1997).
8. G.A. Melkov, V.L. Safonov, A.Yu. Taranenko, and S.V. Sholom, *J. Magn. Magn. Mater.* **132**, 180 (1994).
9. S.M. Rezende, *Phys. Rev. B* **80**, 092409 (2009).
10. B.A. Malomed, O. Dzyapko, V.E. Demidov, and S.O. Demokritov, *Phys. Rev. B* **81**, 024418 (2010).
11. Ю.М. Буньков, Е.М. Алакшин, Р.Р. Газизулин, А.В. Ключков, В.В. Кузьмин, Т.Р. Сафин, М.С. Тагиров, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 68 (2011).
12. S.A. Moskalenko and D.W. Snoke, *Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
13. L.V. Butov, A.L. Ivanov, A. Imamoglu, P.W. Littlewood, A.A. Shashkin, V.T. Dolgoplov, K.L. Campman, and A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5608 (2001).
14. В.Б. Тимофеев, *УФН* **175**, 315 (2006).
15. Yu.E. Lozovik, A.G. Semenov, and M. Willander, *Pisma ZhETF* **84**, 176 (2006).
16. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J.M.J. Kelling, F.M. Marchetti, M.H. Szymaska, R. Andre, J.L. Staehli, V. Savona, P.V. Littlewood, B. Deveaud, and L.S. Dang, *Nature* **443**, 409 (2006).
17. R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer, and K. West, *Science* **316**, 1007 (2007).
18. S.O. Demokritov, V.E. Demidov, O. Dzyapko, G.A. Melkov, A.A. Serga, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
19. А.И. Бугрий, В.М. Локтев, *ФHT* **33**, 51 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 39 (2007)].
20. V.E. Demidov, O. Dzyapko, M. Buchmeier, T. Stockhoff, G. Schmitz, G.A. Melkov, and S.O. Demokritov, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 257201 (2008).
21. А.И. Бугрий, В.М. Локтев, *ФHT* **34**, 1259 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 992 (2008)].
22. J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, *Nature (London)* **468**, 545 (2010).
23. J. Klaers, J. Schmitt, T. Damm, D. Dung, F. Vewinger, and M. Weitz, *Proc. SPIE* **8600**, 86000L (2013).
24. A. Kruchkov and Yu. Slyusarenko, *Phys. Rev. A* **88**, 013615 (2013).
25. F. Li, W.M. Saslow, and V.L. Pokrovsky, *Sci. Rep.* **3**, 1372 (2013).
26. M.H. Anderson, J.N. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
27. C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
28. K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
29. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Oxford, Pergamon Press (1980), P. 1.
30. C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (1963).
31. N.B. Brandt and V.A. Kul'bachinskii, *Quasiparticles in Condensed Matter*, Fizmatlit, Moscow (2005).
32. B.A. Kalinikos and A.N. Slavin, *J. Phys. C* **19**, 7013 (1986).
33. Yu.A. Izyumov and R.P. Ozerov, *Magnetic Neutronography*, Plenum Press, London (1970).
34. V.L. Vinetskii, N.V. Kukhtarev, S.G. Odulov, and M.S. Soskin, *Sov. Phys. Usp.* **22**, 742 (1979).
35. A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar, and S.V. Peletminskii, *Spin Waves*, North Holland, Amsterdam (1968).
36. А.С. Давыдов, *Теория твердого тела*, Наука, Москва (1976).
37. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Физматлит, Москва (2003).
38. P. Nowik-Boltyk, O. Dzyapko, V.E. Demidov, N.G. Berloff, and O. Demokritov, *Nature Sci. Rep.* **2**, 482 (2012).

### To the theory of spatial inhomogeneous Bose–Einstein condensation of magnons in yttrium-iron garnet

A.I. Bugrij and V.M. Loktev

An attempt is made to consider the Bose–Einstein condensation (BEC) of strong pumping-induced magnons in thin ferrimagnetic films of the yttrium-iron garnet. In this case a peculiar feature typical of this magnetic material such as a minimum in the spectrum of spin waves at a finite value of their wave vector is taken into account. The notion of high temperature BEC is introduced and its peculiarities are discussed. The role of boundary conditions for spin variables is analyzed and it is suggested that for free spins at the boundaries a magnon lattice is formed in the system. The factors that are responsible for the lattice formation are considered.

PACS: 05.30.Jp Boson systems;  
75.30.Ds Spin waves;  
**75.70.-i** Magnetic properties of thin films, surfaces, and interfaces.

Keywords: Bose–Einstein condensation, magnons, yttrium-iron garnet.