

# Динамика электронной температуры и времена релаксации электрон-фононной системы металлической пленки

А.И. Безуглый<sup>1</sup>, В.А. Шкловский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: bezuglyj@kipt.kharkov.ua  
shklovskij@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 20 августа 2012 г.

Получено нелинейное интегро-дифференциальное динамическое уравнение для электронной температуры  $T_e$  в случае нестационарного нагрева металлической пленки при низких температурах. Это уравнение описывает процесс передачи тепла от электронов к фононам и обмен фононами между пленкой и подложкой. Детально рассмотрен нагрев пленки осциллирующим тепловым источником малой мощности. В рамках линейного отклика установлена связь частотной дисперсии амплитуды  $T_e$  с характерным временем электрон-фононных столкновений ( $\tau_e$ ) и со средним временем ухода фононов из пленки ( $\tau_{es}$ ). В следующем (квадратичном) порядке теории возмущений найдена постоянная добавка к  $T_e$  и показано, что ее частотная зависимость также содержит информацию о временах  $\tau_e$  и  $\tau_{es}$ . Результаты обобщены на грязные металлические пленки. Обсуждаются различные возможности экспериментального определения времен  $\tau_e$  и  $\tau_{es}$ .

Отримано нелінійне інтегро-диференціальне динамічне рівняння для електронної температури  $T_e$  у разі нестационарного нагріву металевої плівки при низьких температурах. Це рівняння описує процес передачі тепла від електронів до фононів та обмін фононами між плівкою й підкладкою. Детально розглянуто нагрів плівки осцилюючим тепловим джерелом малої потужності. У рамках лінійного відгуку встановлено зв'язок частотної дисперсії амплітуди  $T_e$  з характерним часом електрон-фононних зіткнень ( $\tau_e$ ) та з середнім часом виходу фононів з плівки ( $\tau_{es}$ ). У наступному (квадратичному) порядку теорії збурень знайдена постійна добавка до  $T_e$  і показано, що її частотна залежність також містить інформацію про часи  $\tau_e$  і  $\tau_{es}$ . Результати узагальнено на забруднені металеві плівки. Обговорюються різні можливості експериментального визначення часів  $\tau_e$  і  $\tau_{es}$ .

PACS: 63.20.kd Фонон-электронные взаимодействия;

72.15.Lh Времена релаксации и средние длины свободного пробега.

Ключевые слова: металлические пленки, нестационарный нагрев, электрон-фононная кинетика, низкие температуры.

## 1. Введение

Энергетическую релаксацию электронов в металлических пленках, нагретых лазерным импульсом, обычно описывают в терминах двухтемпературной модели, которая введена в пионерской работе Каганова, Лифшица и Танатарова [1]. В этой модели предполагается, что в пленке и электроны, и фононы термализованы, причем

температура электронов  $T_e$  больше температуры фононов  $T_p$ . Динамика этих температур определяется электронной и фононной теплоемкостями и удельной мощностью  $P_{ep}$ , передаваемой от электронов к фононам. Для фононов с дебаевским спектром и электронов с квадратичным законом дисперсии в работе [1] была найдена мощность  $P_{ep}$  при произвольных значениях  $T_e$  и  $T_p$ . В предельных случаях высоких и низких температур

(по сравнению с дебаевской температурой  $\Theta_D$ ) общее выражение для  $P_{ep}$  сводится к  $P_{ep} = G(T_e - T_p)$  и  $P_{ep} = \Sigma(T_e^5 - T_p^5)$  соответственно. Параметры  $G$  и  $\Sigma$ , характеризующие силу электрон-фононного взаимодействия при высоких и низких температурах, пропорциональны квадрату деформационного потенциала и не зависят от  $T_e$  и  $T_p$ . В работе [2] результаты [1] обобщены на случай произвольного электронного спектра и произвольной частотной зависимости функции Элиашберга  $\alpha^2 F(\omega)$ . Аналогичное обобщение позволило Аллену [3] показать, что параметр  $G$  пропорционален константе электрон-фононной связи  $\lambda$ , причем коэффициент пропорциональности не содержит свободных параметров. На основании полученных Алленом соотношений были найдены значения  $\lambda$  для большого числа нормальных металлов и сверхпроводников, включая ВТСП [4–9].

Вместе с тем, в экспериментах по облучению пленок лазерными импульсами малой мощности [10–13] обнаружилось, что при умеренных температурах  $T_e \lesssim 100$  К двухтемпературная модель дает качественно неверную температурную зависимость времени электрон-фононной энергетической релаксации  $\tau_e(T_e)$ , поскольку при таких температурах нарушается важное условие применимости двухтемпературной модели — быстрая термализация электронной подсистемы. Условие быстрой термализации состоит в том, что время электрон-электронных столкновений должно быть много меньше характерного времени релаксации электронной температуры:  $\tau_{ee} \ll \tau_e$ . Оценки показали, что для обычных металлов это неравенство выполняется при высоких температурах  $T_e \gtrsim 10^3$  К (типичных для экспериментов [4–9]). Заметим, что в этой области температур нетермический характер фононной функции распределения не является существенным из-за большой теплоемкости фононного газа [12]. Таким образом, двухтемпературная модель адекватно описывает динамику электрон-фононной системы при высоких температурах ( $T_e \gtrsim 10^3$  К) и теряет свою применимость при  $T_e \lesssim 100$  К.

В настоящей работе мы обращаем внимание на то, что в области кельвиновых и субкельвиновых температур (важной, например, для астрофизических исследований [14–16]), также выполняется неравенство  $\tau_{ee} \ll \tau_e^*$ . Значит, при анализе низкотемпературной энергетической релаксации пленок можно считать, что электроны термализованы и описываются зависящей от времени температурой  $T_e(t)$ . При этом следует иметь в виду, что в области низких температур фононная теплоемкость сравнима с электронной и, поскольку фононы не термализованы, необходимо из кинетического уравнения находить точный вид их функции распределения.

Ниже, в рамках подхода, основанного на зависящей от времени электронной температуре и кинетическом

уравнении для фононов, рассмотрим линейный и нелинейный отклики электронной температуры на осциллирующий нагрев металлической пленки. Особенности откликов будут связаны с временами энергетической релаксации электрон-фононной системы. При этом учет обмена фононами между пленкой и подложкой позволит включить в микроскопическую теорию эффекты теплоотода. Заметим, что аналогичный подход был использован в работе [17], где подробно рассмотрена кинетика остывания электронов в металлической пленке после мгновенного их нагрева.

## 2. Модель и основные соотношения

Для вычисления отклика электрон-фононной системы металлической пленки на осциллирующий тепловой источник воспользуемся простой микроскопической моделью. Будем считать, что закон дисперсии электронов квадратичен и изотропен,  $\epsilon_p = p^2/2m$  ( $m$  — эффективная масса), а фононы имеют одну акустическую ветвь с продольной поляризацией. Поскольку рассматриваемая область температур существенно меньше дебаевской температуры, закон дисперсии фононов можно считать линейным:  $\omega_{\mathbf{q}} = sq$ , где  $s$  — скорость продольного звука,  $q$  — модуль волнового вектора фонона. Для электрон-фононного взаимодействия используем приближение потенциала деформации, а теплоотвод в подложку будем описывать в терминах акустических импедансов сред (модель акустического рассогласования) [18,19]. Удобство нашего подхода заключается в том, что он дает аналитическое описание всех процессов, связанных с релаксацией энергии нагретых электронов в системе «металлическая пленка — диэлектрическая подложка». Заметим, что включение в модель поперечных фононов привело бы, в частности, к необходимости учитывать конверсию продольных и поперечных мод колебаний на границе между пленкой и подложкой, что потребовало бы уже численных методов [18,20].

Как отмечалось во введении, в низкотемпературной области электрон-электронные столкновения доминируют над электрон-фононными и электронная функция распределения является фермиевской. При этом вследствие высокой теплопроводности электронного газа температура  $T_e$  не зависит от перпендикулярной к пленке координаты  $z$  и является только функцией времени. Фононная функция распределения  $N_{\mathbf{q}}(z, t)$  находится из кинетического уравнения

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} + s_z \frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial z} = I_{pe}(N_{\mathbf{q}}), \quad (1)$$

где  $s_z$  — проекция скорости фонона на ось  $z$ ,  $I_{pe}$  — интеграл фонон-электронных столкновений (стандартный вид  $I_{pe}$  см., например, в [21]).

\* В области низких температур для чистых пленок  $\tau_{ee}$  меньше, чем  $\tau_e$ , если  $(T_e < \Theta_D^2/T_F \sim 1$  К ( $T_F$  — фермиевская температура). В грязных пленках условие  $\tau_{ee} < \tau_e$  выполняется при  $T_e \lesssim 10$  К (см. разд. 5).

В случае фермиевской функции распределения электронов интеграл фонон-электронных столкновений существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$I_{pe}(N_{\mathbf{q}}) = v \{n_q [T_e(t)] - N_{\mathbf{q}}(z, t)\}. \quad (2)$$

Здесь  $n_q(T) = [\exp(\hbar\omega_q/T) - 1]^{-1}$  — бозевская функция распределения ( $k_B = 1$ ). В приближении потенциала деформации частота фонон-электронных столкновений дается формулой

$$v = \frac{m^2 \mu^2}{2\pi \hbar^3 \rho s} \omega_q, \quad (3)$$

где  $\mu$  — константа потенциала деформации, имеющая порядок энергии Ферми  $\epsilon_F$ ;  $\rho$  — плотность пленки. Заметим, что формула (3) относится к случаю чистой пленки. В грязных пленках зависимость  $v$  от  $\omega_q$  можно аппроксимировать степенной функцией с показателем степени, зависящим от типа дефектов (подробности см. в разд. 5).

К уравнению (1) следует прибавить граничные условия (см. рис. 1). Если  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z > 0)$  — волновой вектор фонона, налетающего на границу  $z = d$ , то, предполагая зеркальное отражение фононов, имеем

$$N_{\mathbf{q}}(d, t) = N_{\mathbf{q}'}(d, t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{q}' = (q_x, q_y, -q_z)$  — волновой вектор зеркально отраженного фонона. Когда фонон с волновым вектором  $\mathbf{q}'$  налетает из пленки на границу с подложкой, он с вероятностью  $\alpha$  проходит в подложку и с вероятностью  $\beta = 1 - \alpha$  отражается от границы, переходя в состояние с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Кроме того, в состоянии с вол-

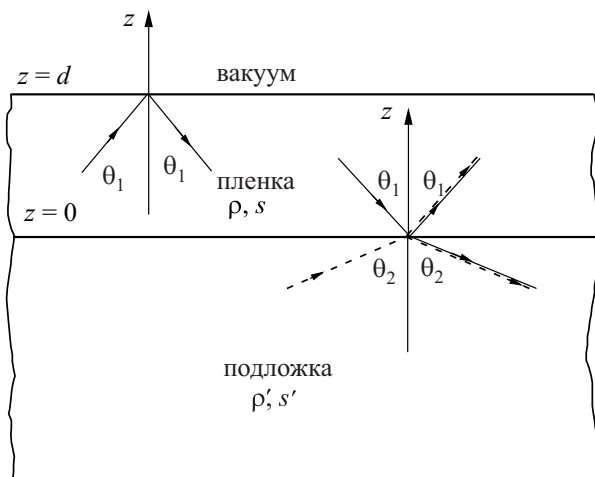


Рис. 1. Зеркальное отражение фонона на границе пленки с вакуумом ( $z = d$ ) и преломление фононов на границе «пленка-подложка» ( $z = 0$ ). Фонон, налетающий на границу  $z = 0$  из подложки, обозначен штриховой линией. Углы падения  $\theta_1$  и преломления  $\theta_2$  связаны равенством  $s' \sin \theta_1 = s \sin \theta_2$ . Через  $\rho$  ( $\rho'$ ) и  $s$  ( $s'$ ) обозначены плотность и скорость продольного звука для пленки (подложки) соответственно.

новым вектором  $\mathbf{q}$  приходят фононы из подложки. Таким образом, при  $z = 0$  выполняется условие

$$N_{\mathbf{q}}(0, t) = \alpha n_q(T_B) + \beta N_{\mathbf{q}'}(0, t), \quad (5)$$

где  $T_B$  — температура подложки. Условие (5) предполагает, что вылетевшие из пленки фононы не возвращаются назад. Такая картина характерна для монокристаллических подложек с высокой теплопроводностью и достаточно узких пленок.

В модели акустического рассогласования [18,19] вероятность  $\alpha$  зависит от угла падения фонона и акустических импедансов пленки и подложки:

$$\alpha(\theta_1) = \frac{4ZZ' \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z \cos \theta_2 + Z' \cos \theta_1)^2}. \quad (6)$$

Здесь  $Z = \rho s$  ( $Z' = \rho' s'$ ) — акустический импеданс пленки (подложки); углы падения и преломления связаны соотношением  $s' \sin \theta_1 = s \sin \theta_2$ .

Решение кинетического уравнения (1) с граничными условиями (4) и (5) может быть найдено с помощью преобразования Фурье по времени. Не останавливаясь на довольно громоздких выкладках (см. подробности вычислений в [17]), приведем результат:

$$N_{\mathbf{q}}(z, t) = \alpha [1 - \beta x(0)]^{-1} \exp[-z v / s_z] n_q(T_B) + \int_{-\infty}^t dt' n_q [T_e(t')] v \exp[-v(t-t')] \beta^{\lceil \tau + 1 - z/2d \rceil}, \quad (7)$$

$$N_{\mathbf{q}'}(z, t) = \alpha [1 - \beta x(0)]^{-1} \exp[-(2d - z)v / |s_z|] n_q(T_B) + \int_{-\infty}^t dt' n_q [T_e(t')] v \exp[-v(t-t')] \beta^{\lceil \tau + z/2d \rceil}. \quad (8)$$

В этих выражениях  $x(0) = \exp(-2dv / |s_z|)$  и  $\tau = |s_z| (t - t') / 2d$ . Как и ранее, считается, что вектор  $\mathbf{q}$  имеет положительную  $z$ -компоненту, а вектор  $\mathbf{q}'$  — отрицательную. Квадратные скобки в показателе степени  $\beta$  обозначают целую часть числа.

Уравнение для электронной температуры следует из условия теплового баланса

$$c_e(T_e) \frac{dT_e}{dt} = W(t) - P_{ep}(t). \quad (9)$$

Здесь электронная теплоемкость  $c_e = (\pi^2/3) N(0) T_e$  (где  $N(0) = m \rho_F / \pi^2 \hbar^3$  — плотность состояний на поверхности Ферми),  $W(t)$  — удельная мощность источников тепла,  $P_{ep}$  — усредненная по толщине пленки удельная мощность, передаваемая от электронов к фононам.  $P_{ep}$  выражается через интеграл фонон-электронных столкновений:

$$P_{ep} = \frac{1}{d} \int_0^d dz \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q I_{pe} [N_{\mathbf{q}}(z, t)]. \quad (10)$$

Вычислив  $P_{ep}$ , приходим к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению для электронной температуры:

$$c_e(T_e) \frac{dT_e}{dt} = W(t) - 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v \{n_q(T_e(t)) - n_q(T_B) - \int_{-\infty}^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] v \exp[-v(t-t')] \beta^{[\tau]} (1 - \alpha\{\tau\})\}, \quad (11)$$

где  $[\tau]$  и  $\{\tau\}$  обозначают соответственно целую и дробную части  $\tau$ . Заметим, что фоновый вклад в уравнение теплового баланса состоит из двух слагаемых. Первое из них (локальное по времени) описывает излучение неравновесных фононов в момент времени  $t$ , а второе (интегральное по времени) учитывает поглощение неравновесных фононов, излученных в более ранние моменты  $t' < t$ .

Зная фоновую функцию распределения, можно также найти нестационарный поток тепла из пленки в подложку. Для этого в формулу

$$Q(t) = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z [N_{q'}(0, t) - N_q(0, t)] \quad (12)$$

следует подставить выражения (7) и (8). После несложных вычислений получаем

$$Q(t) = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha v \int_{-\infty}^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \exp[-v(t-t')] \beta^{[\tau]}. \quad (13)$$

Из полученных результатов видно, что поток тепла  $Q(t)$  и интенсивность теплового источника  $W(t)$  связаны друг с другом через электронную температуру  $T_e(t)$ . Эта связь является интегральной по времени, поскольку в тепловой поток  $Q(t)$  вносят вклад фононы, излученные в предыдущие моменты  $t' < t$ .

### 3. Стационарный нагрев пленки и линейный отклик электронной температуры на осцилляции теплового источника

Особенности кинетики электрон-фононной системы металлической пленки проанализируем в случае, когда поглощаемая электронами мощность имеет как постоянную, так и малую осциллирующую компоненту, т.е. возьмем  $W(t) = W_0 + W_1 e^{-i\omega t}$  при условии, что  $W_1 \ll W_0$ . В рамках линейного отклика электронная температура имеет вид

$$T_e(t) = T_0 + T_1 e^{-i\omega t}, \quad (14)$$

где амплитуда осциллирующей добавки к температуре в общем случае является комплексной, причем  $|T_1| \ll T_0$ . Подстановка (14) в (11) дает в нулевом порядке по  $T_1$  уравнение для средней температуры электронов:

$$W_0 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{\alpha s_z}{d} \frac{[1-x(0)]}{[1-\beta x(0)]} [n_q(T_0) - n_q(T_B)], \quad (15)$$

а в первом порядке — уравнение для комплексной амплитуды  $T_1$ :

$$-i\omega c_e(T_0) T_1 = W_1 - 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{dn_q}{dT_0} \times v \left[ \frac{-i\omega}{v-i\omega} + \frac{\alpha s_z v [1-x(\omega)]}{2d(v-i\omega)^2 [1-\beta x(\omega)]} \right] T_1, \quad (16)$$

где  $x(\omega) = \exp[-2d(v-i\omega)/|s_z|]$ .

Для потока тепла  $Q(t)$ , который в линейном приближении складывается из среднего значения  $Q_0$  и малой осциллирующей компоненты  $Q_1 e^{-i\omega t}$ , уравнение (13) дает  $Q_0 = dW_0$  и

$$Q_1 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha \frac{dn_q}{dT_0} \frac{v [1-x(\omega)]}{(v-i\omega) [1-\beta x(\omega)]} T_1. \quad (17)$$

#### 3.1. Стационарный нагрев

Электрон-фононная кинетика пленки при стационарном нагреве электронов ( $W_1 = 0$ ) подробно рассмотрена одним из авторов в работе [22]. Для удобства читателя напомним некоторые основные результаты этой работы. Оказывается, что в зависимости от значений таких параметров, как толщина пленки  $d$ , средняя вероятность ухода фононов из пленки  $\langle \alpha \rangle$  и длина пробега тепловых фононов  $l_{pe}(T_0)$ , можно выделить предельные случаи эффективно толстых и эффективно тонких пленок. (Длина  $l_{pe}(T_0) \sim s/v(T_0)$ , где  $v(T_0)$  определяется формулой (3) с  $\omega_q \sim T_0/\hbar$ .) Если ввести эффективную толщину пленки  $d_{\text{eff}} = d/\langle \alpha \rangle$ , то в толстых пленках, для которых  $d_{\text{eff}} \gg l_{pe}(T_0)$ , неравновесные фононы в основном перепоглощаются электронами. При этом  $[1-x(0)]/[1-\beta x(0)] = 1$ , и уравнение (15) дает

$$W_0 = \frac{\pi^2 \langle \alpha \rangle}{120 \hbar^3 s^2 d} (T_0^4 - T_B^4). \quad (18)$$

Здесь усредненная по углам вероятность ухода фононов из пленки

$$\langle \alpha \rangle = \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta) \sin(2\theta) d\theta. \quad (19)$$

В противоположном предельном случае эффективно тонких пленок,  $d_{\text{eff}} \ll l_{pe}(T_0)$ , излученные горячими электронами неравновесные фононы в основном вылетают из пленки в подложку без перепоглощения. В этом случае  $[1-x(0)]/[1-\beta x(0)] = 2dv/(\alpha |s_z|)$ , и уравнение для  $T_0$  имеет вид

$$W_0 = \frac{D_5}{4\pi^3} \frac{m^2 \mu^2}{\hbar^7 \rho_s^4} (T_0^5 - T_B^5), \quad (20)$$

где  $D_k = \int_0^\infty x^{k-1} (e^x - 1)^{-1} dx$ . Заметим, что выраже-

ние (20) совпадает с результатом, полученным в двух-температурном приближении [1]. Причина такого совпадения состоит в том, что в главном (нулевом) приближении по малому параметру  $d_{\text{eff}}/l_{pe}(T_0)$  функция распределения фононов в эффективно тонких пленках равна равновесной функции  $n_q(T_B)$ , и, следовательно, электроны и фононы характеризуются различными температурами  $T_0$  и  $T_B$  соответственно. Отметим, кстати, что в эффективно толстых пленках функция распределения фононов равна  $n_q(T_0)$  за исключением узкой области вблизи границы с подложкой (шириной порядка  $l_{pe}(T_0)$ ) и, таким образом, в эффективно толстых пленках электроны и фононы имеют одинаковую температуру  $T_0 > T_B$ .

### 3.2. Линейный отклик на осцилляции теплового источника

В нестационарных условиях помимо параметра  $d_{\text{eff}}/l_{pe}(T_0)$  возникает еще один важный параметр  $\omega/v(T_0)$ , описывающий термализацию электрон-фононной системы в течение периода колебаний теплового источника. Рассмотрим сначала эффективно толстые пленки, для которых  $[1-x(\omega)]/[1-\beta x(\omega)] = 1$ , вследствие чего уравнение (16) упрощается и принимает вид

$$-i\omega c_e(T_0)T_1 = W_1 - 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v \frac{dn_q(T_0)}{dT_0} \times \left[ \frac{-i\omega}{v-i\omega} + \frac{\alpha s_z v}{2d(v-i\omega)^2} \right] T_1. \quad (21)$$

В области низких частот,  $\omega \ll v(T_0)$ , из (21) следует выражение для амплитуды линейного отклика:

$$T_1 = W_1 \{-i\omega [c_e(T_0) + c_p(T_0)] + c_p(T_0)/\tau_{es}\}^{-1}, \quad (22)$$

где  $c_p = (2\pi^2/15)(k_B^4 T_0^3 / \hbar^3 s^3)$  — фононная теплоемкость в модели с одной акустической ветвью колебаний,  $\tau_{es} = 4d_{\text{eff}}/s$  — среднее время ухода фононов из пленки. Формула (22) отражает то обстоятельство, что при низких частотах фононы в толстых пленках находятся в тепловом равновесии с электронами. При этом динамика их общей температуры определяется временем  $\tau'_{es} = \tau_{es}[1 + c_e(T_0)/c_p(T_0)]$ , которое больше, чем  $\tau_{es}$ , вследствие вклада электронов в тепловую инерцию пленки.

Совершенно иная ситуация складывается в области высоких частот. При  $\omega \gg v(T_0)$  квадратная скобка в (21) равна единице, тогда

$$\left\{ -i\omega c_e(T_0) + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v \frac{dn_q(T_0)}{dT_0} \right\} T_1 = W_1. \quad (23)$$

Приравняв интеграл в формуле (23) величине  $c_e(T_0)/\tau_e(T_0)$ , для времени  $\tau_e(T_0)$  получаем

$$\tau_e(T_0) = \frac{4\pi^5 N(0) \hbar^7 \rho_s^4}{15 D_5 m^2 \mu^2 T_0^3}, \quad (24)$$

а амплитуда линейного отклика будет выражаться формулой

$$T_1 = [W_1/c_e(T_0)][-i\omega + \tau_e^{-1}(T_0)]^{-1}. \quad (25)$$

Таким образом, высокочастотный отклик эффективно толстой пленки определяет время электрон-фононной релаксации  $\tau_e(T_0)$ . Отметим, что в области высоких частот фононы являются термостатом для электронов и не вносят вклад в тепловую инерцию пленки.

В случае эффективно тонкой пленки квадратную скобку в уравнении (16) можно заменить единицей как при высоких, так и при низких частотах. Это означает, что выражение (25) описывает отклик тонкой пленки независимо от частоты теплового источника. Для наглядности на рис. 2 схематически изображена зависимость амплитуды осцилляций электронной температуры от частоты теплового источника для случаев эффективно толстой и эффективно тонкой пленок.

Обратимся к выражению (17) для комплексной амплитуды теплового потока. В предельном случае эффективно толстых пленок оно существенно упрощается:

$$Q_1 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha \frac{dn_q}{dT_0} \frac{v}{v-i\omega} T_1. \quad (26)$$

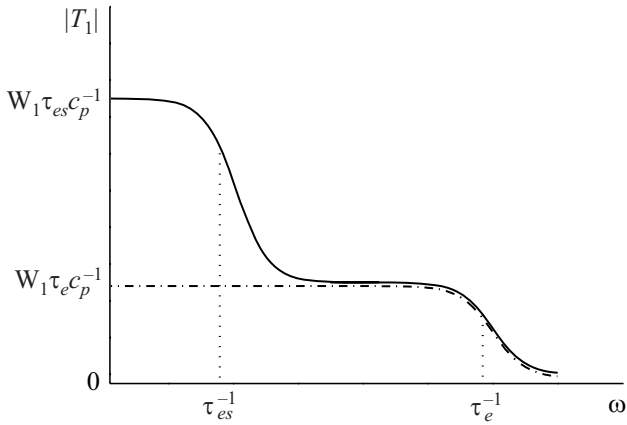


Рис. 2. Зависимость амплитуды осцилляций электронной температуры  $|T_1|$  от частоты теплового источника  $\omega$  (схематически). Сплошная линия соответствует эффективно толстой, а штрих-пунктирная — эффективно тонкой пленкам. Считается, что частота фонов-электронных соударений  $v(T_0)$  мала по сравнению с обратным временем электрон-фононной энергетической релаксации  $\tau_e^{-1}(T_0)$ .

При низких частотах,  $\omega \ll v(T_0)$ ,

$$Q_1 = \frac{1}{4} c_p(T_0) s \langle \alpha \rangle [1 + i \omega \tau_p(T_0)] T_1, \quad (27)$$

где среднее время фонов-электронных столкновений

$$\tau_p(T_0) = \frac{1}{c_p(T_0)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{dn_q(T_0)}{dT_0} \frac{1}{v} = \frac{45 D_3 \hbar^4 \rho s}{2 \pi^3 m^2 \mu^2 T_0}. \quad (28)$$

Время  $\tau_p(T_0)$  определяет сдвиг фазы  $\varphi_Q$  между осцилляциями теплового потока и электронной температуры:  $\varphi_Q = \arctg(\omega \tau_p(T_0))$ . Физическая причина запаздывания  $Q_1(t)$  относительно  $T_1(t)$  состоит в том, что фононам, излученным вблизи границы с подложкой в слое толщиной порядка  $l_{pe}(T_0)$ , требуется время порядка  $\tau_p(T_0)$ , чтобы долететь до подложки. В области высоких частот,  $\omega \gg v(T_0)$ , формула (26) дает

$$Q_1 = \frac{i}{4\omega} c_p(T_0) s \langle \alpha \rangle v(T_0) T_1, \quad (29)$$

где

$$v_p(T_0) = \frac{1}{c_p(T_0)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{dn_q(T_0)}{dT_0} v = \frac{75 D_5 m^2 \mu^2 T_0}{8 \pi^5 \hbar^4 \rho s}. \quad (30)$$

Уравнение (29) описывает интегральную связь между  $Q_1(t)$  и  $T_1(t)$ , отражающую тот факт, что тепловой

поток в момент  $t$  определяется фононами, излученными ранее. Заметим, что в пределе высоких частот  $\varphi_Q = \pi/2$ . Можно сказать, что в этом случае тепловой поток  $Q_1(t)$  ведет себя аналогично напряжению на емкости, которое на четверть периода отстает от колебаний электрического тока.

Для эффективно тонких пленок и частот  $\omega \lesssim v(T_0)$  выражение (17) дает

$$Q_1 = dc_p(T_0) v(T_0) T_1 = dc_e(T_0) \tau_e^{-1}(T_0) T_1, \quad (31)$$

и, значит, при частотах  $\omega \lesssim v(T_0)$  тепловой поток адиабатически следует за изменениями электронной температуры. При высоких частотах,  $\omega \gg s/d$ , пленка оказывается достаточно толстой для того, чтобы границы с подложкой достигали фононы, излученные много периодов колебаний назад. В таком случае толщина пленки становится несущественной, и амплитуда  $Q_1$  определяется выражением (29), полученным для эффективно толстой пленки.

В конце разд. 2 мы отметили, что в общем случае зависимость потока тепла  $Q(t)$  от мощности теплового источника  $W(t)$  задана неявно через температуру электронов. Ситуация существенно упрощается в рассматриваемом случае малых гармонических колебаний мощности теплового источника, когда, как следует из равенств (16) и (17), амплитуды  $Q_1$  и  $W_1$  просто пропорциональны друг другу. При этом оказывается, что в пределе низких частот величина  $Q_1$  мало отличается от «адиабатического» значения  $W_1 d$ , тогда как при высоких частотах  $Q_1$  (будучи пропорциональной  $\omega^{-2}$ ) значительно меньше  $W_1 d$ . Интересно, что в пределе  $\omega \rightarrow \infty$  сдвиг фаз между колебаниями  $W$  и  $Q$  стремится к  $\pi$ , т.е. мощность тепла, выделяющаяся в пленке, и поток тепла из пленки колеблются в противофазе.

#### 4. Нелинейный отклик электронной температуры

Уравнение (11) — удобный исходный пункт для вычисления нелинейного отклика электронной температуры на осцилляции теплового источника. Отметим, что ранее нелинейный отклик тонкой пленки был найден численными методами в рамках двухтемпературного подхода [23]. Не будем ограничиваться случаем эффективно тонких пленок, а на основании уравнения (11) получим аналитические результаты для нелинейного отклика как эффективно тонких, так и эффективно толстых пленок.

Пусть пленка нагревается переменным током  $j = j_0 \sin \omega t$ , соответственно, удельная мощность тепловыделения дается выражением

$$W(t) = P_0 (1 - \cos 2\omega t). \quad (32)$$

Здесь  $P_0 = j_0^2/2\sigma$ , где  $\sigma$  — проводимость пленки, которую при низких температурах можно считать не зависящей от температуры. Тепловыделение (32) имеет как постоянную, так и переменную компоненту, однако, в отличие от предыдущего раздела, они одного порядка. Пусть нагрев пленки относительно невелик, то есть  $T_e(t) - T_B \ll T_B$ . В этом случае электронную температуру можно найти методами теории возмущений, представив  $T_e$  в виде ряда  $T_e = T_B + T_1 + T_2 + \dots$ , где  $T_i \propto P_0^i$ . В каждом порядке теории возмущений поправку  $T_i$  удобно записать в виде суммы ее среднего значения и осциллирующей компоненты:  $T_i(t) = \bar{T}_i + \tilde{T}_i(t)$ .

Для возмущений первого порядка можно использовать результаты предыдущего раздела, согласовав их с видом теплового источника (32). Модификация формул довольно проста. Так, (15) дает уравнение для  $\bar{T}_1$ :

$$P_0 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{\alpha s_z}{d} \frac{[1-x(0)]}{[1-\beta x(0)]} \frac{dn_q(T_B)}{dT_B} \bar{T}_1. \quad (33)$$

Записав  $\tilde{T}_1(t)$  в виде  $\tilde{T}_1 e^{-2i\omega t}$ , для комплексной амплитуды  $\tilde{T}_1$  получим уравнение

$$\left\{ 2i\omega c_e(T_B) + 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v \frac{dn_q(T_B)}{dT_B} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2i\omega}{v-2i\omega} - \frac{\alpha s_z v [1-x(2\omega)]}{2d(v-2i\omega)^2 [1-\beta x(2\omega)]} \right] \right\} \tilde{T}_1 = P_0, \quad (34)$$

которое отличается от (16) заменой  $T_0$  на  $T_B$ ,  $W_1$  на  $-P_0$  и  $\omega$  на  $2\omega$ . Следовательно, для  $\tilde{T}_1$  справедливы результаты предыдущего раздела с такими же заменами.

Во втором порядке теории возмущений нас будет интересовать постоянная компонента  $\bar{T}_2$ , которая, в отличие от  $\bar{T}_1$ , существенно зависит от частоты  $\omega$ . Как оказывается, особенности зависимости  $\bar{T}_2(\omega)$  непосредственно связаны с временами релаксации электрон-фононной системы. Уравнение для  $\bar{T}_2$  имеет вид

$$\int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 n_q(T_B)}{dT_B^2} \left( \bar{T}_1^2 + \frac{1}{2} |\tilde{T}_1|^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{dn_q(T_B)}{dT_B} \bar{T}_2 \right] \frac{\alpha s_z [1-x(0)]}{[1-\beta x(0)]} = 0. \quad (35)$$

Для эффективно толстой пленки (35) дает

$$\bar{T}_2 = -\frac{3}{2T_B} (\bar{T}_1^2 + \frac{1}{2} |\tilde{T}_1|^2), \quad (36)$$

где

$$\bar{T}_1 = P_0 \tau_{es} / c_p(T_B). \quad (37)$$

В области низких частот,  $\omega \ll v(T_B)$ , комплексная амплитуда  $\tilde{T}_1$  дается выражением

$$\tilde{T}_1 = -\left[ \frac{P_0 \tau_{es}}{c_p(T_B)} \right] \left\{ 1 - 2i\omega \tau_{es} \left[ 1 + \frac{c_e(T_B)}{c_p(T_B)} \right] \right\}^{-1}. \quad (38)$$

Подстановка (37) и (38) в (36) приводит к следующему результату:

$$\bar{T}_2 = -\frac{3}{2T_B} \frac{P_0^2 \tau_{es}^2}{c_p^2(T_B)} \left( 1 + \frac{1}{2 \{ 1 + 4\omega^2 \tau_{es}^2 [1 + c_e(T_B)/c_p(T_B)]^2 \}} \right). \quad (39)$$

Видно, что при нагреве металлической пленки переменным током постоянная добавка к электронной температуре существенно зависит от частоты. Этот эффект, очевидно, имеет нелинейную природу и возникает вследствие нелинейности исходного уравнения (11). Рассмотрим теперь более детально зависимость  $\bar{T}_2(\omega)$ . Если  $\tau_{es}^{-1} \ll v(T_B)$ , эта зависимость имеет вид сглаженной ступеньки и, соответственно, производная  $d\bar{T}_2/d\omega$  представляет собой выпуклую кривую. Максимум этой кривой достигается при частоте  $\omega_{es} = \{ 2\sqrt{3} \tau_{es} [1 + c_e(T_B)/c_p(T_B)] \}^{-1}$ . Таким образом, по положению низкочастотного максимума  $\omega_{es}$  в эксперименте можно найти среднее время ухода фононов из пленки. Заметим, что  $\omega_{es}$  определяет  $\tau_{es}$  без подгонных параметров.

В случае высоких частот  $\omega \gg v(T_B)$

$$\tilde{T}_1 = -[P_0 \tau_e(T_B)/c_e(T_B)][1 - 2i\omega \tau_e(T_B)]^{-1} \quad (40)$$

и

$$\bar{T}_2 = -\frac{3P_0^2}{2T_B} \left( \frac{\tau_{es}^2}{c_p^2(T_B)} + \frac{\tau_e^2(T_B)}{2c_e^2(T_B)} \frac{1}{[1 + 4\omega^2 \tau_e^2(T_B)]} \right). \quad (41)$$

Из (41) следует, что в высокочастотной области максимум производной  $d\bar{T}_2/d\omega$  достигается при  $\omega_e = \{ 2\sqrt{3} \tau_e(T_B) \}^{-1}$ , т.е. по положению высокочастотного максимума можно определить время электрон-фононных столкновений при температуре  $T_B$ .

\* Как будет видно из дальнейшего, параметрами разложения являются  $P_0 \tau_{es}/c_p T_B$  для толстых пленок, низких частот и  $P_0 \tau_e/c_e T_B$  — в остальных предельных случаях.

Обратимся к тонким пленкам. Нелинейный отклик эффективно тонкой пленки интересен тем, что характерное время релаксации электронов  $\tau_e(T_B)$  можно найти не только по частотной дисперсии  $\bar{T}_2(\omega)$ , но и из разности  $\bar{T}_2(\infty) - \bar{T}_2(0)$ . Действительно, уравнение (35) дает для эффективно тонкой пленки

$$\bar{T}_2(\omega) = -\frac{2}{T_B} \left( \bar{T}_1^2 + \frac{1}{2} |\tilde{T}_1(\omega)|^2 \right), \quad (42)$$

где амплитуда  $\tilde{T}_1$  определяется формулой (40). Соответственно, кривая  $d\bar{T}_2/d\omega$  имеет максимум при  $\omega_e = \{2\sqrt{3}\tau_e(T_B)\}^{-1}$ .

Вычислим разность  $\bar{T}_2(\infty) - \bar{T}_2(0)$ . Из выражения (42) следует, что

$$\bar{T}_2(\infty) - \bar{T}_2(0) = \frac{1}{T_B} |\tilde{T}_1(0)|^2 = \frac{P_0^2}{T_B} \frac{\tau_e^2(T_B)}{c_e^2(T_B)}. \quad (43)$$

Эта величина весьма чувствительна к температуре термостата  $T_B$ , так как с понижением  $T_B$  она растет как  $T_B^{-9}$ . Таким образом, в эффективно тонких пленках время электрон-фононных столкновений  $\tau_e(T_B)$  можно найти и по частотной дисперсии нелинейного отклика  $\bar{T}_2(\omega)$ , и из разности  $\bar{T}_2(\infty) - \bar{T}_2(0)$ . В первом случае  $\tau_e(T_B)$  находится без подгоночных параметров, во втором случае имеется один подгоночный параметр — средняя удельная поглощаемая мощность  $P_0$ .

### 5. Обсуждение результатов

Результаты, полученные в предыдущих разделах, описывают динамику электронной температуры в случае чистых металлических пленок, где длина свободного пробега электрона  $l$  много больше длины волны тепловых фононов  $\lambda_T$  ( $\lambda_T = 2\pi\hbar s/T$ ). Эти результаты можно обобщить на случай «грязных» пленок с  $l \ll \lambda_T$ . Как показано в работе [24], в грязных пленках рассеяние электронов на точечных дефектах ослабляет электрон-фононное взаимодействие, что приводит к соотношению  $\tau_e \propto T^{-4}l$  и, следовательно, к  $T^6$ -зависимости для потока тепла от электронов к фононам. Подобная зависимость наблюдалась в экспериментах [14,25,26]. Вместе с тем в ряде экспериментов [15,16,27–29] было получено  $\tau_e \propto T^{-2}$ , что может быть следствием сильного рассеяния электронов на массивных дефектах, которые не «увлекаются» колебаниями решетки [30]. Заметим, что в общем случае в эксперименте можно ожидать зависимости  $\tau_e \propto T^{-(3+r)}$  с  $r$ , близкими к 1, при доминировании рассеяния электронов на колеблющихся дефектах и с  $r \approx -1$ , если основной вклад в рассеяние электронов дают дефекты, которые не колеблются вместе с решеткой.

Чтобы обобщить наши результаты на грязные пленки, возьмем (как в [17]) матричный элемент электрон-фононного взаимодействия в виде

$$w(q) = \frac{\pi\mu_1^2(\hbar\omega_q)^{1+r}}{\rho s^2\hbar}, \quad (44)$$

где число  $r$  не обязательно целое, а  $\mu_1$  — феноменологический параметр, который определяется доминирующим типом дефектов (неподвижные или колеблющиеся вместе с кристаллической решеткой), а также длиной свободного пробега электронов. Переход к чистому случаю осуществляется простой заменой  $r=0$  и  $\mu_1 = \mu$ . Можно показать, что выражение (44) приводит к степенной частотной зависимости функции Элиашберга:  $\alpha^2 F(\omega) \propto \omega_q^{2+r}$  и, как следствие, к степенной температурной зависимости времени электрон-фононных столкновений [28,31]. Вычисления [17] дают

$$\tau_e(T) = \frac{4\pi^5 N(0)\hbar^7 \rho s^4}{3(5+r)D_{5+r} m^2 \mu_1^2 T^{3+r}}, \quad (45)$$

таким образом, при  $r=1$  время  $\tau_e \propto T^{-4}$ , а при  $r=-1$  имеем  $\tau_e \propto T^{-2}$ .

Важно отметить, что проведенное выше обобщение на грязные пленки не меняет вида формул, полученных в предыдущих разделах, поэтому результаты настоящей работы в равной мере описывают динамику электронной температуры как в чистых, так и в грязных пленках. Заметим, кстати, что в грязных пленках, где электрон-электронное взаимодействие усилено эффектами слабой локализации, область применимости нашей модели расширяется, и максимальная температура, при которой применима модель, может достигать 10 К [31].

Проведенный в предыдущих разделах анализ динамики электрон-фононной системы позволяет также выяснить вопрос о применимости двухтемпературной модели [1] при низких температурах. В случае эффективно тонких пленок перепоглощение неравновесных фононов несущественно, поэтому в уравнении (11) можно пренебречь интегральным по времени слагаемым. Остальные члены дают такое же уравнение для электронной температуры  $T_e$ , что и двухтемпературное приближение. (При этом температура фононов постоянна и равна температуре подложки  $T_B$ .) Для эффективно толстых пленок ограничиться двухтемпературным приближением нельзя и необходимо полное кинетическое описание фононной системы.

Теперь обратимся к эксперименту. В интересующей нас области низких температур ( $T < 10$  К) время электрон-фононной энергетической релаксации  $\tau_e$  в эффективно тонкой пленке обычно определяется по величине электронного перегрева при слабом нагреве пленки либо постоянным [14–16,25,26], либо высоко-



частотным [27,31,32] током. В первом случае в пленке создается состояние стационарного электронного перегрева, где температура электронов  $T_e$  превышает температуру решетки  $T_B$ , причем (как, например, следует из (25) при  $\omega = 0$ ) разность  $T_e - T_B = \tau_e W_0 / c_e(T_B)$ . На основании этого выражения время  $\tau_e$  определяется по разности температур  $T_e - T_B$  при известных значениях электронной теплоемкости  $c_e(T_B)$  и удельной мощности джоулева тепловыделения  $W_0$ .

Во втором случае (при высокочастотном нагреве) время  $\tau_e$  находится непосредственно из частотной зависимости болометрического отклика пленки. Поскольку болометрический отклик пропорционален изменению электронной температуры, измеренную амплитудно-частотную характеристику отклика нужно сопоставить с формулой

$$|T_1(\omega)| = \frac{W_1 \tau_e}{c_e(T_B)} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_e(T_B)^2}}, \quad (46)$$

которая является простым следствием (25). Из формулы (46) видно, что время  $\tau_e$  равно обратной величине частоты, при которой амплитуда отклика уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с ее значением при  $\omega \rightarrow 0$ . Отметим, что в работе [27] установлено хорошее согласие амплитудно-частотной характеристики тонкой ниобиевой пленки с (46), что, в частности, позволило установить зависимость  $\tau_e \propto T_B^{-2}$  для исследуемых грязных пленок. (В [27] формула (46) получена из двухтемпературного приближения.)

В завершение раздела обсудим некоторые новые возможности определения времен  $\tau_e$  и  $\tau_{es}$  в высокочастотных экспериментах. В достаточно толстых пленках, где среднее время ухода фононов  $\tau_{es} \gg \tau_e(T_B)$ , амплитуда осцилляций электронной температуры (при  $\omega \ll \nu(T_B)$ ) дается выражением

$$|T_1(\omega)| = \frac{W_1 \tau_{es}}{c_p(T_B)} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_{es}^2 [1 + c_e(T_B) / c_p(T_B)]^2}}. \quad (47)$$

Следовательно, измерив частотную зависимость болометрического отклика эффективно толстой пленки, можно найти время  $\tau_{es}$ , которое связано с таким важным параметром, как тепловое сопротивление границы между пленкой и подложкой  $R_T$  [19]. (В рассмотренной модели  $R_T = \tau_{es} / [dc_p(T_B)]$ .) При более высоких частотах,  $\omega \gg \nu(T_B)$ , болометрический отклик эффективно толстой пленки описывается формулой (46), что дает возможность экспериментально определить время электрон-фононной энергетической релаксации  $\tau_e$ .

Времена  $\tau_e$  и  $\tau_{es}$  могут быть также получены из измерения частотной зависимости сдвига фазы колебаний электронной температуры\*. Из формул (22) и (25) сле-

дует, что для эффективно толстых пленок при  $\omega \ll \nu(T_B)$  величина сдвига фазы

$$\varphi_T = \arctg \left( \omega \tau_{es} \left[ 1 + \frac{c_e(T_B)}{c_p(T_B)} \right] \right),$$

а в случае тонких пленок  $\varphi_T = \arctg [\omega \tau_e(T_B)]$ .

Заметим, наконец, что, согласно разд. 4, измерение частотной зависимости постоянной компоненты нелинейного отклика  $\bar{T}_2(\omega)$  также позволяет найти времена  $\tau_e$  и  $\tau_{es}$  в эффективно толстой пленке и время  $\tau_e$  в эффективно тонкой пленке. Кроме того, величину  $\tau_e$  в тонкой пленке можно определить по разности  $\bar{T}_2(\omega)|_{\omega \ll \tau_e^{-1}} - \bar{T}_2(\omega)|_{\omega \gg \tau_e^{-1}}$ .

## 6. Заключение

В представленной работе мы постарались дать ясную микроскопическую картину динамических процессов, протекающих при низких температурах в электрон-фононной системе металлической пленки, нагреваемой осциллирующим источником тепла. Результаты представлены в виде выражений, описывающих частотно-зависимые линейный (разд. 3) и нелинейный (разд. 4) отклики электронной температуры. Как оказалось, особенности частотной зависимости амплитуд этих откликов в случае эффективно тонких пленок определяют время электрон-фононной энергетической релаксации  $\tau_e$ . Отклик эффективно толстых пленок содержит также информацию о среднем времени ухода фононов из пленки в подложку  $\tau_{es}$ . На наш взгляд, полученные результаты могут служить основанием для экспериментального исследования температурной зависимости характерных времен релаксации электрон-фононной системы как чистых, так и грязных металлических пленок.

1. М.И. Каганов, И.М. Лифшиц, Л.В. Танатаров, *ЖЭТФ* **31**, 232 (1956).
2. V.A. Shklovskij, *J. Low Temp. Phys.* **41**, 375 (1980).
3. P.B. Allen, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1460 (1987).
4. S.D. Brorson, A. Kazeroonian, J.S. Modera, D.W. Face, T.K. Cheng, E.P. Ippen, M.S. Dresselhaus, and G. Dresselhaus, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2172 (1990).
5. S.V. Chekalin, V.M. Farztdinov, V.V. Golovlyov, V.M. Letokhov, Yu.E. Lozovik, Yu.A. Matveets, and A.G. Stepanov, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3860 (1991).
6. P.B. Allen, in: *Handbook of Superconductivity*, C.P. Poole, Jr. (ed.), Academic Press, New York (1999).
7. C. Gadermaier, A.S. Alexandrov, V.V. Kabanov, P. Kusar, T. Mertelj, X. Yao, C. Manzoni, D. Brida, G. Cerullo, and D. Mihailovic, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 257001 (2010).
8. N. Singh, *Int. J. Mod. Phys. B* **24**, 1141 (2010).
9. B. Mansart, D. Boschetto, A. Savia, F. Rullier-Albenque,

\* Сдвиг фазы  $\varphi_T$  определяется равенством  $T_1 = |T_1| e^{i\varphi_T}$ .

- F. Bouquet, E. Papalazaron, A. Forget, D. Colson, A. Rouse, and M. Marsi, *Phys. Rev. B* **82**, 024513 (2010).
10. W.S. Fann, R. Storz, H.W.K. Tom, and J. Bokor, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2834 (1992).
11. R.H.M. Groeneveld, R. Sprik, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **45**, 5079 (1992).
12. R.H.M. Groeneveld, R. Sprik, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **51**, 11433 (1995).
13. K.H. Ahn, M.J. Graf, S.A. Trugman, J. Demsar, R.D. Averitt, J.L. Sarrao, and A.J. Taylor, *Phys. Rev. B* **69**, 045114 (2004).
14. M.E. Gershenson, D. Gong, T. Sato, B.S. Karasik, and A.V. Sergeev, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 2049 (2001).
15. B.S. Karasik, D. Olaya, J. Wei, S. Pereverzev, M.E. Gershenson, J.H. Kavamura, W.R. McGrath, and A.V. Sergeev, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **17**, 293 (2007).
16. J. Wei, D. Olaya, B.S. Karasik, S.V. Pereverzev, A.V. Sergeev, and M.E. Gershenson, *Nature Nanotechnol.* **3**, 496 (2008).
17. А.И. Безуглый, В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **111**, 2106 (1997).
18. A.W. Little, *Can. J. Phys.* **37**, 334 (1959).
19. E.T. Swartz and R.O. Pohl, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 605 (1989).
20. S.B. Kaplan, *J. Low Temp. Phys.* **37**, 343 (1979).
21. Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, Мир, Москва (1965).
22. В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **78**, 1281 (1980).
23. L.J. Taskinen, J.M. Kivioja, J.T. Karvonen, and I.J. Maasilta, *Phys. Status Solidi (c)* **1**, 2856 (2004).
24. A. Schmid, *Z. Physik* **259**, 421 (1973).
25. J.T. Karvonen, L.J. Taskinen, and I.J. Maasilta, *Phys. Rev. B* **72**, 012302 (2005).
26. J.T. Karvonen, L.J. Taskinen, and I.J. Maasilta, *J. Low Temp. Phys.* **146**, 213 (2007).
27. Е.М. Гершензон, М.Е. Гершензон, Г.Н. Гольцман, А.М. Люлькин, А.Д. Семенов, А.В. Сергеев, *ЖЭТФ* **97**, 901 (1990).
28. G. Bergmann, W. Wei, Y. Zou, and R.M. Mueller, *Phys. Rev. B* **41**, 7386 (1990).
29. J.J. Lin and J.P. Bird, *J. Phys. Condens. Matter* **14**, R501 (2002).
30. A. Sergeev and V. Mitin, *Phys. Rev. B* **61**, 6041 (2000).
31. Е.М. Гершензон, М.Е. Гершензон, Г.Н. Гольцман, А.Д. Семенов, А.В. Сергеев, *Письма в ЖЭТФ* **36**, 241 (1982).
32. Е.М. Гершензон, М.Е. Гершензон, Г.Н. Гольцман, А.Д. Семенов, А.В. Сергеев, *ЖЭТФ* **86**, 758 (1984).

## The dynamics of electron temperature and the relaxation times of electron–phonon system of a metal film

A.I. Bezuglyj and V.A. Shklovskij

We obtained a nonlinear integro-differential dynamic equation for electron temperature  $T_e$  in the case of transient heating of metal films at low temperatures. The equation describes the process of heat transfer from electron to phonons and the exchange of phonons between the film and the substrate. The heating of the film by an oscillating thermal source of low-power is considered in detail. In the framework of linear response, a relation of frequency dispersion of  $T_e$  amplitude with characteristic time of electron–phonon collisions ( $\tau_e$ ) and an average time of phonon departure from the film ( $\tau_{es}$ ) is derived. In the following (quadratic) order of the perturbation theory, a stationary correction to  $T_e$  was found and it is shown that its frequency dependence also contains information about the times  $\tau_e$  and  $\tau_{es}$ . The results were extended to dirty metal films. We discuss various possibilities of experimentation of the times  $\tau_e$  and  $\tau_{es}$ .

PACS: 63.20.kd Phonon-electron interactions;  
72.15.Lh Relaxation times and mean free paths.

Keywords: metal films, transient heating, electron–phonon kinetics, low temperatures.